TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften, Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Prof. Dr. Ulrike Baumann, Dr. Henri Mühle. Wintersemester 2019/20

7. Übungsblatt zur Vorlesung "Einführung in die Mathematik für Informatiker – Lineare Algebra"

Spaltenraum, Zeilenraum und Kern von Matrizen

Ü37. Betrachtet wird die Menge

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a+3b-8c \\ a-b+4c \\ 2a-b+5c \end{pmatrix} \;\middle|\; a,b,c \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

(a) Stellen Sie U als Spannraum dar, und bestimmen Sie eine Basis von U. Erweitern Sie diese Basis zu einer Basis des $\mathbb{R}^3$.

(b) Liegt $v = (-1,2,2)^T$ in U? Erweitern Sie die Menge $\{v, 2v\}$ zu einem Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$.

(c) Stellen Sie U als Spaltenraum einer Matrix A dar, und bestimmen Sie die Dimension des Kerns von A.

Ü38. Es sei $V = \{a + bx + cx^2 \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Polynomfunktionen vom Grad kleiner 3 bzgl. der üblichen Addition und Skalarmultiplikation. Betrachtet werden die folgenden Elemente von V:

$$p_1(x) = -1 + 2x^2, \quad p_2 = 3 + x + x^2, \quad p_3(x) = -5 - x + 3x^2.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Menge $\{m_0, m_1, m_2\}$, mit $m_k(x) = x^k$ für $k \in \{0,1,2\}$, eine Basis von V ist. Geben Sie die Koordinatenvektoren von p_1, p_2, p_3 bzgl. dieser Basis an.

(b) Ist die Menge $\{p_1, p_2, p_3\}$ linear unabhängig?

Ü39. Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3^{3\times 4} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}.$$

(i) Bestimmen Sie jeweils eine Basis des Spaltenraums, eine Basis des Zeilenraums, den Kern und dessen Dimension.

(ii) Liegt der Vektor $(1,1,1)^T$ im Spaltenraum einer dieser Matrizen?

A40. **Hausaufgabe, bitte vor Beginn der 8. Übung (oder im Lernraum) unter Angabe von Name, Matrikelnummer, Übungsgruppe und ÜbungsleiterIn abgeben.**
Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}.$$

(a) Verwenden Sie das Gauß–Jordan-Verfahren, um die Dimension und eine Basis des Spaltenraums von A zu bestimmen.

(b) Gehört $v = (1,2,3)^T$ zum Spaltenraum von A? Falls ja, bestimmen Sie den Koordinatenvektor von v bzgl. der in (a) gefundenen Basis.

(c) Stellen Sie den Kern von A als Spannraum dar, und geben Sie eine Basis des Kerns an.

(d) Untersuchen Sie, ob der Vektor $(2,-8,-2,0)^T$ im Kern von A liegt.

H41. (a) Es sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ derart, dass das System $Ax = b$ für alle $b \in \mathbb{R}^m$ höchstens eine Lösung hat. Begründen Sie, dass die Spaltenvektoren von A linear unabhängig sind.

(b) Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass aus $\left|\mathrm{Ker}(AB)\right| > 1$ stets $\left|\mathrm{Ker}(A)\right| > 1$ oder $\left|\mathrm{Ker}(B)\right| > 1$ folgt.

H42. (a) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} i & -i & 0 & 1 \\ -1 & -i & -1 & 0 \\ 1+i & 0 & 3 & i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 4}.$$

Bestimmen Sie Spaltenraum und Kern von A, und stellen Sie den Kern als Spannraum einer geeigneten Basis dar. Liegt $(i,i,i)^T$ im Spaltenraum von A?

(b) Bestimmen Sie die maximale Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren der folgenden Matrix in Abhängigkeit von $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-2 & b-1 & 0 \\ 0 & 2 & a+2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}.$$