TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften, Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Prof. Dr. Ulrike Baumann, Dr. Henri Mühle. Wintersemester 2019/20

8. Kurzlösung zur Vorlesung "Einführung in die Mathematik für Informatiker – Lineare Algebra"

Dimensionsformel für Matrizen, Invertierbarkeit

H47. (a) Mit dem Gauß–Jordan-Verfahren erhält man die inverse Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

(b) Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Wir sollen also zeigen, dass aus $|\mathrm{Ker}(A)| > 1$ oder $|\mathrm{Ker}(B)| > 1$ stets $|\mathrm{Ker}(AB)| > 1$ folgt.

Sei zunächst $|\mathrm{Ker}(B)| > 1$. Dann gibt es $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{o\}$, sodass $Bx = o$. Also ist aber auch $(AB)x = A(Bx) = Ao = o$, und damit ist $x \in \mathrm{Ker}(AB)$, also $|\mathrm{Ker}(AB)| > 1$.

Sei nun $|\mathrm{Ker}(B)| = 1$ und $|\mathrm{Ker}(A)| > 1$. Folglich ist $\mathrm{Ker}(B) = \{o\}$, und nach Ü45 ist B also invertierbar. Weiter gibt es $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{o\}$ mit $Ax = o$. Damit ist aber $AB(B^{-1}x) = Ax = o$, also $B^{-1}x \in \mathrm{Ker}(B)$. Da $x \neq o$ und B invertierbar, ist auch $B^{-1}x \neq o$, also $|\mathrm{Ker}(AB)| > 1$.

(c) Es gilt

$$AB^{-1} = B^{-1}A \iff AB^{-1}B = B^{-1}AB \iff BAB^{-1}B = BB^{-1}AB \iff BA = AB.$$

H48. Es gilt für A:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1+i & 2+i & 3+i & 0 & 1 & 0 \\ 1-i & 2-i & 3-i & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1-i & -1+i \\ 0 & 1 & 0 & -2 & \frac{3+i}{2} & \frac{3-i}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Für B gilt:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1-i & 1+i & 1 & 0 & 0 \\ 1+i & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1-i & 2-2i & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1-3i}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & i & \frac{1+i}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1-i \end{array}\right).$$

(i) Aus der Zeilenstufenform folgt $\mathrm{rg}(A) = 3$, $\dim \mathrm{Ker}(A) = 0$ und $\mathrm{Ker}(A) = \{o\}$, bzw. $\mathrm{rg}(B) = 2$, $\dim \mathrm{Ker}(B) = 1$, und

$$\mathrm{Ker}(B) = \left\{ \begin{pmatrix} (1-3i)s \\ 2is \\ -2s \end{pmatrix} \,\middle|\, s \in \mathbb{C} \right\}.$$

(ii) Da $\mathrm{rg}(A) = 3$ folgt $\mathrm{Col}(A) = \mathrm{Row}(A) = \mathbb{C}^3$. Damit sind sowohl die Einheitsvektoren, als auch die Spalten- bzw. Zeilenvektoren von A Basisvektoren von $\mathrm{Col}(A)$ bzw. $\mathrm{Row}(A)$.

Die ersten beiden Spalten- bzw. Zeilenvektoren von B sind Basisvektoren von $\mathrm{Col}(B)$ bzw. $\mathrm{Row}(B)$.

(iii) Da $\mathrm{rg}(A) = 3$, ist A invertierbar, und es gilt

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1-i & -1+i \\ -2 & \frac{3+i}{2} & \frac{3-i}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Da $\mathrm{rg}(B) = 2 < 3$, ist B nicht invertierbar.