TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

**Bereich Mathematik und Naturwissenschaften**, Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Prof. Dr. Ulrike Baumann, Dr. Henri Mühle. Wintersemester 2019/20

# 8. Übungsblatt zur Vorlesung "Einführung in die Mathematik für Informatiker – Lineare Algebra"

*Dimensionsformel für Matrizen, Invertierbarkeit*

Ü43. Gegeben sind die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_2^{4\times 4}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \quad C = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(i) Berechnen Sie jeweils den Rang der Matrix, die Dimension des Kerns und den Kern der Matrix.

(ii) Geben Sie jeweils eine Basis des Spalten- und des Zeilenraums an.

(iii) Berechnen Sie jeweils, falls möglich, die inverse Matrix.

Ü44. Gegeben ist die folgende Matrix in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$:

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) Für welche $a$ ist diese Matrix *nicht* invertierbar?

(b) Berechnen Sie für $a = -1$ die inverse Matrix $(A_{-1})^{-1}$, und überprüfen Sie Ihr Ergebnis durch eine Probe.

Ü45. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper, es sei $o \in \mathbb{K}^n$ der Nullvektor, und $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Beweisen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

(i) A ist invertierbar.

(ii) $\mathrm{Ker}(A) = \{o\}$.

(iii) $\mathrm{rg}(A) = n$.

A46. **Hausaufgabe, bitte vor Beginn der 9. Übung (oder im Lernraum) unter Angabe von Name, Matrikelnummer, Übungsgruppe und ÜbungsleiterIn abgeben.**
Gegeben sind die folgenden Matrizen über $\mathbb{Z}_3$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(i) Berechnen Sie jeweils den Rang der Matrix, die Dimension des Kerns und den Kern der Matrix.

(ii) Begründen Sie welche dieser Matrizen invertierbar ist, und berechnen Sie die inverse Matrix mittels des Gauß–Jordan-Verfahrens.

H47. (a) Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ derart, dass $ad - bc \neq 0$. Berechnen Sie die inverse Matrix von $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, und führen Sie eine Probe durch.

(b) Beweisen Sie die Umkehrung der Implikation aus H41(b).

(c) Seien $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ derart, dass $B$ invertierbar ist. Beweisen Sie, dass genau dann $AB^{-1} = B^{-1}A$ gilt, wenn $AB = BA$ ist.

H48. Gegeben sind die komplexen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1+i & 2+i & 3+i \\ 1-i & 2-i & 3-i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1-i & 1+i \\ 1+i & 1 & 2 \\ 2 & 1-i & 2-2i \end{pmatrix}.$$

(i) Berechnen Sie jeweils den Rang der Matrix, die Dimension des Kerns und den Kern der Matrix.

(ii) Geben Sie jeweils eine Basis des Spalten- und Zeilenraums an.

(iii) Berechnen Sie jeweils, falls möglich, die inverse Matrix.