TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften, Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Prof. Dr. Ulrike Baumann, Dr. Henri Mühle. Wintersemester 2019/20

9. Kurzlösung zur Vorlesung "Einführung in die Mathematik für Informatiker – Lineare Algebra"

Lineare Abbildungen

Ü51. (a) Offenbar sind $\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\right\}$ linear unabhängig und es gilt

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = -x\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} - y\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}.$$

Da f linear ist, gilt also

$$\begin{aligned}
f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) &= f\left(-x\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} - y\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\right)\\
&= -xf\left(\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\right) - yf\left(\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\right)\\
&= -x\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} - y\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}x-y\\x+y\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(b) Die Darstellungsmatrix von f bzgl. der Standardbasen ist

$$A_f = \left(f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)\ f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)\right) = \begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}.$$

(c) f ist bijektiv, da $\operatorname{rg}(A_f) = 2$.

(d) Geometrisch entspricht f einer Drehung um 45° (um den Ursprung) gegen den Uhrzeigersinn mit gleichzeitiger Streckung um $\sqrt{2}$.

H53. Seien $p_1, p_2 \in V$, und seien $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. Dann gibt es also $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$ sodass $p_1(x) = a_1 + b_1x + c_1x^2$ und $p_2(x) = a_1 + b_2x + c_2x^2$. Es gilt

$$\begin{aligned}
f\Big(k_1p_1(x) + k_2p_2(x)\Big) &= f\Big(k_1(a_1 + b_1x + c_1x^2) + k_2(a_2 + b_2x + c_2x^2)\Big)\\
&= f\Big(\underbrace{k_1a_1 + k_2a_2}_{a} + (\underbrace{k_1b_1 + k_2b_2}_{b})x + (\underbrace{k_1c_1 + k_2c_2}_{c})x^2\Big)\\
&= 3(k_1a_1 + k_2a_2) - (k_1c_1 + k_2c_2)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \big((k_1a_1+k_2a_2)+(k_1b_1+k_2b_2)+(k_1c_1+k_2c_2)\big)x^2 \\
&= k_1\big(3a_1 - c_1 + (a_1+b_1+c_1)x^2\big) + k_2\big(3a_2 - c_2 + (a_2+b_2+c_2)x^2\big) \\
&= k_1 f\big(p_1(x)\big) + k_2 f\big(p_2(x)\big).
\end{aligned}
$$

Also ist f linear.

Sei $B = (m_0, m_1, m_2)$ die geordnete Basis von V aus Ü38. Die Koordinatenvektoren (bzgl. B) der Bilder der Basisvektoren sind:

$$
f(m_0)_B = \big[3+x^2\big]_B = \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}, \quad f(m_1)_B = \big[x^2\big]_B = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad f(m_2)_B = \big[-1+x^2\big]_B = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.
$$

Es gilt

$$
\begin{pmatrix}3&0&-1\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}3&0&-1\\0&3&4\\0&0&0\end{pmatrix},
$$

also ist, nach Ü50(a), f weder injektiv noch surjektiv.

H54. (a) Es gilt

$$
f\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}10\\-2\\3\end{pmatrix},
$$

also ist $A_f = \begin{pmatrix}2&2&10\\-1&0&-2\\3&-1&3\end{pmatrix}$.

(b) Per Definition ist $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Col}(A_f)$. Es gilt

$$
\begin{pmatrix}2&2&10\\-1&0&-2\\3&-1&3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&3\\0&0&0\end{pmatrix}.
$$

Also besteht eine Basis von $\operatorname{Col}(A_f)$ aus den ersten beiden Spaltenvektoren von A_f.

(c) Der Kern von f ist

$$
\operatorname{Ker}(f) = \big\{v \in \mathbb{R}^3 \mid f(v) = o\big\} = \big\{v \in \mathbb{R}^3 \mid A_f \cdot v = o\big\} = \operatorname{Ker}(A_f).
$$

Aus der obigen Zeilenstufenform folgt

$$
\operatorname{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix}-2s\\-3s\\s\end{pmatrix} \;\middle|\; s \in \mathbb{R} \right\}.
$$

(d) Da $\operatorname{rg}(A_f) = 2$ ist, ist f weder injektiv noch surjektiv.

(e) Es gilt

$$U = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \;\middle|\; s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Also folgt

$$\begin{aligned} f(U) &= \left\{ f\left(s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \;\middle|\; s, t \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \operatorname{Span}_{\mathbb{R}} \left(\left\{ \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right). \end{aligned}$$

Insbesondere ist $f(U)$ wieder ein Spannraum, also ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$.