TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften, Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Prof. Dr. Ulrike Baumann, Dr. Henri Mühle. Wintersemester 2019/20

9. Übungsblatt zur Vorlesung "Einführung in die Mathematik für Informatiker – Lineare Algebra"

Lineare Abbildungen

Ü49. Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

$$\begin{array}{llcll}
\text{(i)} & f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & x & \mapsto & 5x+1. \\
\text{(ii)} & f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x+2y-z \\ x-z \\ 5y \\ -2x+y-4z \end{pmatrix}. \\
\text{(iii)} & f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x+y \\ x \cdot y \end{pmatrix}.
\end{array}$$

Ü50. (a) Es seien V und W $\mathbb{K}$-Vektorräume und $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Sei weiter $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V, und seien $w_i = f(v_i)$, für $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, die Bilder der Basisvektoren unter f. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(i) f ist genau dann injektiv, wenn $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ linear unabhängig ist.

(ii) f ist genau dann surjektiv, wenn $\mathrm{Span}\big(\{w_1, w_2, \ldots, w_n)\big) = W$.

(iii) f ist genau dann bijektiv, wenn $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ eine Basis von W ist.

(b) Betrachtet wird die lineare Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y+z \\ x-y-z \end{pmatrix}.$$

Verwenden Sie die Aussagen aus (a) um f auf Injektivität und Surjektivität zu untersuchen.

Ü51. Betrachtet wird die lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, von der folgende Werte bekannt sind:

$$f\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie, für einen beliebigen Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ das Bild unter f.

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von f bzgl. der Standardbasen.

(c) Untersuchen Sie, ob f injektiv, surjektiv oder beides ist.

(d) Beschreiben Sie das Bild des Einheitsquadrats unter f.

A52. **Hausaufgabe, bitte vor Beginn der 10. Übung (oder im Lernraum) unter Angabe von Name, Matrikelnummer, Übungsgruppe und ÜbungsleiterIn abgeben.**
Gegeben sind zwei Abbildungen $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, sowie folgende Werte:

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$g\left(\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad g\left(\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

(a) Es sei zusätzlich gegeben, dass f linear ist.

   (i) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von f bzgl. der Standardbasen.

   (ii) Untersuchen Sie, ob f injektiv, surjektiv oder beides ist.

(b) Begründen Sie, dass g nicht linear sein kann.

H53. Es sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Polynomfunktionen vom Grad kleiner 3. (Siehe auch Ü38.) Betrachtet wird $f\colon V \to V$ definiert durch

$$f(a + bx + cx^2) = 3a - c + (a + b + c)x^2.$$

Zeigen Sie, dass f linear ist. Untersuchen Sie, ob f injektiv, surjektiv oder beides ist.

H54. Betrachtet wird die lineare Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}2x + 2y + 10z\\-x - 2z\\3x - y + 3z\end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von f bzgl. der Standardbasen.

(b) Stellen Sie das Bild $\operatorname{Im}(f)$ als Spannraum mit einem minimalen Erzeugendensystem dar.

(c) Bestimmen Sie den Kern von f.

(d) Untersuchen Sie, ob f injektiv, surjektiv oder beides ist.

(e) Bestimmen Sie die Bildmenge $f(U)$ für den Untervektorraum

$$U = \left\{ \begin{pmatrix}2t + s\\3t\\-t - s\end{pmatrix} \;\middle|\; s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ist $f(U)$ wieder ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$?