Übungsblatt 1

Die Hausaufgaben sollen schriftlich bearbeitet werden und spätestens am 13. April abgegeben werden.

Determinanten

Übung 1. Sei K ein Körper. Beweisen Sie, dass für Matrizen $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ und $C \in \mathrm{Mat}_m(K)$

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(A)\det(C)$$

gilt, unabhängig von $B \in \mathrm{Mat}_{n,m}(K)$. Wie kann man diesen Satz verallgemeinern für quadratische Matrizen $A_1, ..., A_n$?

Übung 2. Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{Q})$

(c) $\begin{bmatrix} t & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ t & 1 & -t \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{Z}[t])$

(d) $\begin{bmatrix} \pi & \pi^2 & 0 & 0 \\ \pi & \pi & 0 & 0 \\ \pi & \pi^2 & \pi & -\pi^2 \\ -\pi & \pi & \pi & \pi \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{R})$

Übung 3. Wenden Sie die Cramersche Regel an, um das folgende rationale Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{cases} w & & +3y & +4z & = & 1 \\ & x & & +2z & = & 2 \\ w & & +y & & = & 0 \\ & x & & +z & = & 4 \end{cases}$$

Übung 4. Beweisen Sie die folgenden Formeln:

(a) $\det(A) = (-1)^{n-1}(n-1)$ für $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ mit $a_{ij} = \begin{cases} 1 & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases}$.

(b) $\det(A) = \prod_{i<j}(c_j - c_i)$ für $c_1, ..., c_n \in K$ und $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathrm{Mat}_n(K)$ mit $a_{ij} = c_j^{i-1}$. (Die sogenannte Vandermonde-Matrix.)

Übung 5. Sei $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Welche falsch? Geben Sie einen Beweis oder Gegenbeispiel.

(a) Wenn $|a_{ij}| \leq 1$ für $1 \leq i, j \leq n$ dann $|\det(A)| \leq n!$

(b) Wenn $a_{ij} \leq 0$ für $1 \leq i, j \leq n$ dann $\det(A) \leq 0$

Darstellungsmatrizen

Hausaufgabe 6. Sei $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $V = K[X]_{\leq 1}$. Wie viele lineare Abbildungen $f : V \to V$ gibt es? Wie viele davon sind bijektiv? Geben Sie Darstellungsmatrizen an für alle solche Abbildungen bzgl. der Basis $(1, X)$.

Hausaufgabe 7. Wir betrachten die Basen $\mathcal{A} = (e_1, e_2, e_3)$ und $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ des $\mathbb{R}^3$ mit

$$v_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Weiterhin definieren wir $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -2z \\ x + 2y + z \\ x + 3z \end{bmatrix}$.

(a) Berechnen Sie die Darstellungsmatrizen $M_{\mathcal{A}}(f)$ und $M_{\mathcal{B}}(f)$ bzgl. $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.

(b) Berechnen Sie $M_{\mathcal{B}}(f)^{10}$ und wenden Sie dieses Ergebnis an, um $M_{\mathcal{A}}(f)^{10}$ zu berechnen.