Übungsblatt 10

Die Hausaufgaben sollen schriftlich bearbeitet werden und spätestens am 22. Juni abgegeben werden.

Sei $n \in \mathbb{N}$, sei X eine nichtleere Menge und sei K ein Körper.

Vorbereitungsaufgabe 72. Sei $K = \mathbb{Q}$, sei $V = K^3$ und sei U der von

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

erzeugte Untervektorraum. Geben Sie eine Basis des Annulators U^0 an.

Übung 73. Sei V ein K-Vektorraum, sei U ein Untervektorraum von V und sei $\varphi : U \to K$ eine Linearform auf U. Wir definieren die Menge

$$X = \{(U', \varphi') \mid U \subseteq U' \subseteq V \text{ Untervektorraum}, \varphi' \in \mathrm{Hom}_K(U', K) \text{ mit } \varphi'|_U = \varphi\}.$$

Zeigen Sie, dass

(a) $(U', \varphi') \preccurlyeq (U'', \varphi'') \iff (U' \subseteq U'') \wedge (\varphi''|_{U'} = \varphi')$ eine Halbordnung auf X definiert.

(b) $(X, \preccurlyeq)$ ein maximales Elements besitzt.

(c) ein solches maximales Element eine Linearform $\psi : V \to K$ definiert.

Übung 74. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\Phi : \mathrm{Mat}_n(K) \to \mathrm{Mat}_n(K)^*, B \mapsto \varphi_B \quad \text{mit} \quad \varphi_B : \mathrm{Mat}_n(K) \to K, A \mapsto \mathrm{tr}(BA)$$

ein Isomorphismus von K-Vektorräume ist.

Übung 75. Wir betrachten den K-Vektorraum $V = K[t]$ mit Basis $\mathcal{B} = (1, t, t^2, ...)$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}^*$ keine Basis des duale Vektorraums V^* bildet indem Sie eine K-lineare Abbildung $\varphi : V \to K$ angeben, welche nicht in $\mathrm{span}(\mathcal{B}^*)$ enthalten ist. Folgern Sie, dass die kanonische Abbildung

$$\iota : V \to V^{**}, x \mapsto \iota_x$$

mit $\iota_x(\varphi) = \varphi(x)$ kein Isomorphismus ist. Verallgemeinern Sie diese Aussage für ein Beliebiger unendlichdimensionaler K-Vektorraum.

Übung 76. Sei $V = K[t]_{\leq n}$. Zeigen Sie, dass der Einsetzungshomomorphismus

$$\varphi_x : V \to K, P \mapsto P(x)$$

für jedes $x \in K$ eine Linearform definiert. Geben Sie, wenn möglich, eine Basis des V^* aus solche Einsetzungshomomorphismen an.

Übung 77. Wir betrachten die Menge $\mathcal{H}$ aller Halbordnungen $H \subseteq X \times X$ von X.

(a) Zeigen Sie, dass

$$H \preccurlyeq H' \iff H \subseteq H'$$

eine Halbordnung auf $\mathcal{H}$ definiert.

(b) Beweisen Sie, dass die maximalen Elemente von $(\mathcal{H}, \preccurlyeq)$ genau die Totalordnungen auf X sind.

(c) Wenden Sie das Lemma von Zorn an, um für eine beliebige Halbordnung $H \in \mathcal{H}$, eine Totalordnung $T \in \mathcal{H}$ zu finden mit $H \preccurlyeq T$.

(d) Schlussfolgern Sie, dass $H = \bigcap \{T \in \mathcal{H} \mid H \preccurlyeq T, T \text{ total}\}$ für jedes $H \in \mathcal{H}$ gilt.

Hausaufgabe 78. Geben Sie eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -\sqrt{3} & \sqrt{6} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{6} & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R}).$$

Hausaufgabe 79. Sei V ein K-Vektorraum und sei $X \subseteq V$ ein Erzeugendensystem von V. Zeigen Sie, dass X eine Basis von V enthält. [Achtung: V ist nicht notwendigerweise endlichdimensional!]