Übungsblatt 11

Die Hausaufgaben sollen schriftlich bearbeitet werden und spätestens am 29. Juni abgegeben werden.

Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei K ein Körper.

Vorbereitungsaufgabe 80. Wir betrachten den folgenden Untervektorraum des $\mathbb{R}^4$:

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a-b \\ 0 \\ b-a \\ 2b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Geben Sie ein lineares Gleichungssystem an, dessen Lösungsraum genau U ist.

Übung 81. Sei V ein unitärer Vektorraum. Beweisen Sie, dass für jeden Endomorphismus $f : V \to V$ gilt:

(a) $\mathrm{Ker}(f^{\mathrm{adj}}) = \mathrm{Im}(f)^{\perp}$,

(b) $\mathrm{Im}(f^{\mathrm{adj}}) = \mathrm{Ker}(f)^{\perp}$.

Übung 82. Seien V und W endlichdimensionale K-Vektorräume. Die Abbildung $f : V \times W \to K$ sei K-bilinear, das heißt $f(\lambda v + \lambda' v', w) = \lambda f(v, w) + \lambda' f(v', w)$ und $f(v, \lambda w + \lambda w') = \lambda f(v, w) + \lambda' f(v, w')$ für beliebige $v, v' \in V, w, w' \in W, \lambda, \lambda' \in K$. Wir nennen eine solche Abbildung *perfekt* wenn für jedes $v \in V$ (bzw. $w \in W$) ein $w \in W$ (bzw. $v \in V$) existiert mit $f(v, w) \neq 0$. Zeigen Sie, dass wenn f perfekt ist die Abbildungen

$$\phi : W \to V^*, w \mapsto \phi_w \quad \text{mit} \quad \phi_w : V \to K, v \mapsto f(v, w)$$

und

$$\psi : V \to W^*, v \mapsto \psi_v \quad \text{mit} \quad \psi_v : W \to K, w \mapsto f(v, w)$$

Isomorphismen sind.

Übung 83. Wir betrachten den Endomorphismus

$$f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3, \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} i(x - iy + z) \\ x - iy + z \\ ix + y - iz \end{bmatrix}.$$

Geben Sie Darstellungsmatrizen (bzgl. der Standardbasis des $\mathbb{C}^3$) an für f und f^{adj}. Berechnen Sie $\mathrm{Eig}(f, \lambda)$ und $\mathrm{Eig}(f^{\mathrm{adj}}, \lambda)$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ und folgern Sie, dass $f(v) = \lambda v$ genau dann wenn $f^{\mathrm{adj}}(\overline{v}) = \overline{\lambda}\overline{v}$. Mit $\overline{v}$ wird hier der Vektor gemeint mit $\overline{v}_i = \overline{v_i}$ für jede $1 \leq i \leq n$.

Übung 84. Sei V ein unitärer Vektorraum. Wir nennen einen Endomorphismus f von V *positiv* wenn $< f(v), v > \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ für jedes $v \in V$.

(a) Zeigen Sie, dass jeder positive Endomorphismus f selbstadjungiert ist.

(b) Zeigen Sie, dass jeder Eigenwert eines positiven Endomorphismus nichtnegativ ist.

(c) Zeigen Sie, dass $f \circ f^{\mathrm{adj}}$ für jeden Endomorphismus f positiv ist.

Hausaufgabe 85. Wir betrachten einen unitären Vektorraum V und einen Endomorphismus $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$. Zeigen Sie, dass

(a) eindeutig bestimmte selbstadjungierte Endomorphismen $f_R, f_I \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ existieren mit $f = f_R + if_I$.

(b) f genau dann normal ist, wenn f_R und f_I kommutieren.

Hausaufgabe 86. Wir betrachten den folgenden Untervektorraum des $\mathbb{C}^4$:

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} ib \\ 2a - 3b \\ 2b - 3a \\ 2ia \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C} \right\}.$$

Geben Sie ein lineares Gleichungssystem an, dessen Lösungsraum genau U ist.