Übungsblatt 3

Die Hausaufgaben sollen schriftlich bearbeitet werden und spätestens am 27. April abgegeben werden.

Diagonalisierbarkeit & Trigonalisierbarkeit

Sei K ein Körper und sei $n \in \mathbb{N}$.

Vorbereitungsaufgabe 17. Zeigen Sie, dass $\chi_A(t) = \chi_{A-\lambda \mathbb{1}_n}(t-\lambda)$ für jedes $\lambda \in K$ und $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$.

NB: Ist S ein Ring und sei $R \subseteq S$ ein Teilring, so kann man ein Polynom $P \in R[t]$ als Polynom über S sehen, da $R[t] \subseteq S[t]$. Somit gibt es auch für jedes $s \in S$ einen Einsetzungshomomorphismus $e_s : R[t] \to S, \sum_{i=0}^n r_i t^i \mapsto \sum_{i=0}^n r_i s^i$. Insbesondere wenn $S = R[t]$ ergibt dies, dass es für jedes Polynom $P \in R[t]$ einen Einsetzungshomomorphismus $e_P : R[t] \to R[t], \sum_{i=0}^n r_i t^i \mapsto \sum_{i=0}^n r_i P^i$ gibt. Mit $\chi_A(t-\lambda)$ ist das Bild von $\chi_A(t)$ unter dem Einsetzungshomomorphismus $e_{t-\lambda}$ gemeint.

Übung 18. Prüfen Sie ob folgende Matrizen diagonalisierbar bzw. trigonalisierbar sind und geben Sie, wenn möglich, eine Diagonalisierung an, d.h. eine zu A ähnliche Diagonalmatrix und die Transformationsmatrizen:

(a) $A = \begin{bmatrix} i-1 & 1 \\ -1 & i+1 \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$

(b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & 4 \\ 4 & -8 & 7 \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{Q})$

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ [NB: abhängig von p!]

(d) $A = \begin{bmatrix} -1 & 12 & 4 \\ 0 & 5 & 5 \\ -4 & 8 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$

(e) $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$

Übung 19. Zeigen Sie, dass eine symmetrische Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ (d.h. $A = A^t$) nur reelle Eigenwerte hat.

Übung 20. Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und sei $f : V \to V$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie dass $\chi_f(t) = t^n$ genau dann wenn eine Basis existiert bezüglich welcher $M_{\mathcal{B}}(f)$ eine strikte obere Dreiecksmatrix ist.

Übung 21. Berechnen Sie das Minimalpolynom für die Matrizen in Teilen (a), (b) und (c) der Übung 18.

Übung 22. Zeigen Sie dass für zwei ähnliche Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$ die Minimalpolynome gleich sind. Nehmen Sie jetzt an, dass $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ Minimalpolynom $\sum_{i=0}^m \alpha_i t^i$ hat. Was ist das Minimalpolynom der Matrix A^{-1}?

Hausaufgabe 23. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Welche falsch? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

(a) Über $\mathbb{C}$ ist jede Matrix diagonalisierbar.

(b) Zwei Matrizen sind genau dann ähnlich, wenn ihre Eigenwerte gleich sind.

(c) Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ungerader Dimension. Jede lineare Abbildung $f : V \to V$ hat einen reellen Eigenwert.

Hausaufgabe 24. Berechnen Sie Eigenwerte und deren Eigenräume der Matrix $A_n = (a_{ij})_{i,j} \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, definiert durch

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i+j) \text{ gerade ist} \\ 0 & \text{falls } (i+j) \text{ ungerade ist} \end{cases}$$

Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist A_n diagonalisierbar? Untersuchen Sie die Diagonalisierbarkeit nochmals für den Fall, dass der zugrundeliegende Körper $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist.