Übungsblatt 5

Die Hausaufgaben sollen schriftlich bearbeitet werden und spätestens am 11. Mai abgegeben werden.

Sei K ein Körper und sei $n \in \mathbb{N}$.

Vorbereitungsaufgabe 33. Sei $A \in \mathrm{Mat}_9(K)$ so dass $(A - \mathbb{1}_9)^4 = 0$ und $\mathrm{rk}(A - \mathbb{1}_9)^3 = 2$. Bestimmen Sie die Jordan-Normalform dieser Matrix.

Übung 34. Berechnen Sie die Haupträume der folgenden Matrizen:

(a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{Q})$

Übung 35. In dieser Übung berechnen wir A^{1000}, wobei

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R}).$$

(a) Berechnen Sie dazu das charakteristische Polynom $\chi_A \in \mathbb{R}[t]$ und zerlegen Sie χ_A in ein Produkt von Linearfaktoren. Was sind die Eigenwerte von A und ihre algebraische Vielfachheit?

(b) Berechnen Sie dem Rang der Matrix $A - \lambda\mathbb{1}_3$ für jeden Eigenwert λ und leiten Sie daraus die geometrische Vielfachheit von λ ab. Ist A diagonalisierbar?

(c) Geben Sie die Jordansche Normalform J von A an (ohne Rechnung, nur aus den Ergebnissen von (a) und (b)).

(d) Finden Sie eine invertierbare Matrix S, so dass $S^{-1}AS$ die Jordansche Normalform von A ist.

(e) Berechnen Sie A^{1000} als $SJ^{1000}S^{-1}$.

Übung 36. Klassifizieren Sie die Elemente von $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ bis auf Ähnlichkeit, d.h. geben Sie Bedingungen für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ an, so dass die Matrix $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

(a) keine Eigenwerte

(b) einen Eigenwert λ mit algebraischer Vielfachheit 2 und geometrischer Vielfachheit 1

(c) einen Eigenwert λ mit algebraischer Vielfachheit 2 und geometrischer Vielfachheit 2

(d) zwei Eigenwerte $\lambda_1 \neq \lambda_2$

hat. Finden Sie - falls möglich - jeweils die Jordan-Normalform von A.

Übung 37. Zwei Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^n$ nennt man *orthogonal*, wenn $< u, v >= 0$.

(a) Beweisen Sie den Satz des Pythagoras: Sind u und v orthogonal, so ist $||u+v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$.

(b) Seien $u, v \in \mathbb{R}^n$ ungleich 0. Zeigen Sie dass $u' = u - \frac{<u,v>}{<v,v>} v$ und v orthogonal sind.

(c) Beweisen Sie die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung $| < u, v > | \leq ||u|| \cdot ||v||$ für beliebige $u, v \in \mathbb{R}^n$.

Hausaufgabe 38. Für Vektoren $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$ und $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$ definieren wir das Kreuz- oder Vektorprodukt

$$u \times v = \begin{bmatrix} u_2 v_3 - v_2 u_3 \\ v_1 u_3 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - v_1 u_2 \end{bmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass es sich um eine bilineare Abbildung $(\cdot \times \cdot) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ handelt, d.h. dass

$$(\lambda u + \mu u') \times v = \lambda \cdot (u \times v) + \mu \cdot (u' \times v) \quad \text{und} \quad u \times (\lambda v + \mu v') = \lambda \cdot (u \times v) + \mu \cdot (u \times v')$$

für alle Vektoren $u, u', v, v' \in \mathbb{R}^3$ und Skalare $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(b) Beweisen Sie, dass $u \times v$ zu u und v orthogonal ist für alle Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^3$.

(c) Weisen Sie nach, dass $u \times (v \times w) + v \times (w \times u) + w \times (u \times v) = 0$ für alle Vektoren $u, v, w \in \mathbb{R}^3$.

Hausaufgabe 39. Bringen Sie den Endomorphismus $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ mit folgender Darstellungsmatrix bezüglich der kanonischen Basis

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

in Jordan-Normalform, d. h. geben Sie die Jordan-Normalform und eine Basis, bezüglich welcher die Darstellungsmatrix genau die Jordan-Normalform ist, an.