Übungsblatt 6

Die Hausaufgaben sollen schriftlich bearbeitet werden und spätestens am 18. Mai abgegeben werden.

Sei $n \in \mathbb{N}$.

Vorbereitungsaufgabe 40. Wir betrachten einen endlichdimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraum V. Sei $s : V \times V \to \mathbb{C}$ eine hermitesche Sequilinearform mit zugehöriger quadratischer Form q_s. Beweisen Sie dass, mit $u, v \in V$,

$$s(u, v) = \frac{1}{4}(q_s(u + v) - q_s(u - v) + iq_s(u + iv) - iq_s(u - iv))$$

gilt.

Übung 41. Sei $V = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$. Wir betrachten die Abbildung

$$s : V \times V \to \mathbb{R}, (A, B) \mapsto \mathrm{tr}(AB).$$

(Erinnern Sie sich daran, dass die Spur einer Matrix die Summe der Diagonalelemente ist.)

(a) Zeigen Sie, dass diese Abbildung eine symmetrische Bilinearform ist.

(b) Nehme an $n = 2$. Geben Sie die Darstellungsmatrix bezüglich der Basis

$$\mathcal{B} = \left(e_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, e_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, e_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, e_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

an.

Übung 42. Sei $V = \mathbb{R}^2$ und sei $c \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass es genau eine Bilinearform $d : V \times V \to \mathbb{R}$ gibt so, dass $d(u, v) = -d(v, u)$ für alle $u, v \in V$ und $d(e_1, e_2) = c$.

Übung 43. Für $a_1, ..., a_n, c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$ sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine rekursiv definierte Folge gegeben durch

$$a_{k+1} = \sum_{i=1}^{n} c_i a_{k-n+i}$$

für $k > n$.

(a) Geben Sie eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ an mit

$$\begin{bmatrix} a_{k-n+2} \\ \vdots \\ a_{k+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} a_{k-n+1} \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix}.$$

(b) Geben Sie eine explizite Formel für a_k wenn $n = 2, a_1 = a_2 = c_1 = c_2 = 1$.

Übung 44. Sei S_3 die dreidimensionale Kugel mit Radius eins und Mittelpunkt 0. Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto x + 2y + 3z.$$

Was ist das Maximum der $\{f(s) \mid s \in S_3\}$? Für welche Punkte wird das Maximum erreicht? Wie kann man diese Aussage verallgemeinern?

Hausaufgabe 45. Prüfen Sie welche der folgende Abbildungen Bilinearformen bzw. Sesquilinearformen sind:

(a) $\mathbb{K} = \mathbb{C}, V = \mathbb{C}, s : V \times V \to \mathbb{K}, (a, b) \mapsto a\bar{b}$,

(b) $\mathbb{K} = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^3, s : V \times V \to \mathbb{K}, \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \right) \mapsto x - y'$,

(c) $\mathbb{K} = \mathbb{C}, V = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}), s : V \times V \to \mathbb{K}, (A, B) \mapsto \det(AB)$,

(d) $\mathbb{K} = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}[t]_{\leq n}, s : V \times V \to \mathbb{K}, (f, g) \mapsto \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$.

Hausaufgabe 46. Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Eine nicht-ausgeartete Bilinearform $s : V \times V \to K$ heißt *symplektisch* wenn $\forall u, v \in V : s(u, v) = -s(v, u)$. Zeigen Sie, dass die Dimension eines Vektorraums V mit symplektischer Bilinearform $s : V \times V \to \mathbb{R}$ gerade ist.