Übungsblatt 7

Die Hausaufgaben sollen schriftlich bearbeitet werden und spätestens am 1. Juni abgegeben werden.

Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Vorbereitungsaufgabe 47. Sei s eine symmetrische Bilinearform auf $V = \mathbb{R}^2$ mit zugehöriger quadratischer Form $q_s(u) = u_1u_2 - u_1^2$. Sei $v = [1, 0]^t$. Geben Sie alle Vektoren u mit $s(u, v) = 0$ an.

Übung 48. Wenden Sie das Gram-Schmidt Verfahren an, um für die Basis $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ des $\mathbb{R}^3$ mit

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad b_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}' = (b'_1, b'_2, b'_3)$ zu finden so, dass $\mathrm{span}_{\mathbb{R}}(b_1, ..., b_i) = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}(b'_1, ..., b'_i)$ für jedes i.

Übung 49. Sei $V = \mathbb{C}[t]_{\leq n}$ und $x_0, ..., x_n \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden.

(a) Zeigen Sie, dass $< P, Q >= \sum_{i=0}^{n} P(x_i)\overline{Q(x_i)}$ eine positiv definite hermitesche Sesquilinearform auf V ist.

(b) Sei $n = 2, x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$. Geben Sie $U^{\perp}$ an für $U = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}(t^2)$.

Übung 50. Sei V ein n-dimensionaler euklidischer (bzw. unitärer) $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine *Hyperebene* ist ein affiner Unterraum der Form

$$H = \{p + u \mid u \in U\}$$

mit $p \in V$ ein beliebiger Vektor und $U \subset V$ ein Untervektorraum der Dimension $n - 1$.

(a) Zeigen Sie, dass man jede Hyperebene darstellen kann als $\{v \in V \mid < w, v > -d = 0\}$ für feste $0 \neq w \in V$ und $d \in \mathbb{K}$, und dass jede solche Darstellung eine Hyperebene definiert. Diese Darstellung nennt man die Hessesche Normalform der Hyperebene.

(b) Sei $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 3}$, und $< u, v >= \int_{-1}^{1} u(t)v(t)dt$. Berechnen Sie die Hessesche Normalform für die Hyperebene mit $p = 1 + t$ und $U = \{a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 \mid a_i \in \mathbb{R}, a_0 = 0\}$.

Übung 51. Erinnern Sie sich daran, dass jedes $u \in \mathbb{R}^2$ eine Darstellung in Polarkoordinaten

$$u = c \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad c \in \mathbb{R}, \alpha \in [0, 2\pi)$$

hat. Der Winkel zwischen

$$u = c \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad v = d \begin{bmatrix} \cos(\beta) \\ \sin(\beta) \end{bmatrix}$$

ist $\theta(u, v) = \begin{cases} \alpha - \beta & \text{wenn } \alpha \geq \beta \\ \alpha - \beta + 2\pi & \text{wenn } \alpha < \beta \end{cases}$.

(a) Zeigen Sie: Für $u, v \in \mathbb{R}^2$ ist $< u, v >= ||u|| \cdot ||v|| \cos(\theta(u, v))$. Nutzen Sie die bekannte Gleichung $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$.

(b) Folgern Sie, dass für $u \neq 0 \neq v$ genau dann $u \perp v$ gilt, wenn $\theta(u, v) \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$.

(c) Zeigen Sie, dass $||v|| \cdot |\cos(\theta(u,v))| = ||\mathrm{pr}_{\mathbb{R}u}(v)||$.

Übung 52. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Welche falsch? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

(a) Ist eine symmetrische Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ invertierbar, so ist A^tA positiv definit.

(b) Eine symmetrische Matrix $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ für welche alle a_{ij} positiv sind, ist positiv definit.

Hausaufgabe 53. Bestimmen Sie die $\lambda \in \mathbb{R}$ für welche folgende Matrix positiv (semi)definit ist:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2\lambda & 1 \\ 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Hausaufgabe 54. Sei V ein n-dimensionaler euklidischer (bzw. unitärer) $\mathbb{K}$-Vektorraum und seien $v_1, ..., v_n$ Vektoren in V. Wir definieren $G = (g_{ij})_{i,j} \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ mit $g_{ij} =< v_i, v_j >$. Zeigen Sie, dass $\det(G)$ genau dann von 0 verschieden ist, wenn $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis von V ist.