Übungsblatt 9

Die Hausaufgaben sollen schriftlich bearbeitet werden und spätestens am 15. Juni abgegeben werden.

Sei $n \in \mathbb{N}$.

Vorbereitungsaufgabe 64. Geben Sie eine symmetrische Matrix $A \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$, einen Vektor $b \in \mathbb{R}^3$ und einen Skalar $c \in \mathbb{R}$ so, dass die Quadrik, die durch (A, b, c) definiert wird, genau gleich

$$\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 4x^2 - y + 2z^2 = 0 \right\}$$

ist.

Übung 65. Zeigen Sie, dass folgende Matrizen hermitesch sind und deshalb Darstellungsmatrizen (bzgl. der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^3$) selbstadjungierter Endomorphismen sind.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 1 \\ -i & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren. Bestimmen Sie $r_+(s)$ und $r_-(s)$, wobei s die hermitesche Sesquilinearform mit Darstellungsmatrix A ist.

Übung 66. Welche der folgenden (A, b, c) mit $A \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^3$ und $c \in \mathbb{R}$ definieren Quadriken vom kegeligen Typ, vom parabolischen Typ bzw. Mittelpunktsquadriken?

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, c = -4$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, c = 1$

Übung 67. Beschreiben Sie die Teilmengen des $\mathbb{R}^1$, welche Quadriken sind.

Übung 68. Wir betrachten die Menge $Q = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid x^2 + y^2 + xy - 4 = 0 \right\}$.

(a) Zeigen Sie, dass Q eine Quadrik ist, indem Sie eine symmetrische Matrix $A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$, einen Vektor $b \in \mathbb{R}^2$ und einen Skalar $c \in \mathbb{R}$ angeben, für welche $Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x^t A t + 2bt + c = 0\}$.

(b) Zeigen Sie, dass die Rotationsmatrix

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

für jeden Winkel θ eine Isometrie definiert.

(c) Schlussfolgern Sie zu welcher der in Beispiel 8.12 angegebenen Quadriken die Quadrik (A, b, c) isometrisch ist.

Übung 69. Beweisen Sie folgende Aussage: Ist Q eine Quadrik, so ist

$$I = \{(A, b, c) \in V \mid A \text{ symmmetrisch}, \forall q \in Q : q^t Aq + 2b^t q + c = 0\}$$

ein Untervektorraum des $V = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

Hausaufgabe 70. Welche der folgende Relationen sind reflexiv, transitiv, symmetrisch, antisymmetrisch, total?

(a) $X = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, $R = \{(x, y) \in X^2 \mid \exists z \in X : x = yz\}$

(b) $X = \mathbb{Z}$, $R = \{(x, y) \in X^2 \mid \exists n \in \mathbb{N} : x^n = y\}$

(c) $X = \{S \subset \mathbb{N} \mid |S| < \infty\}$, $R = \{(x, y) \in X^2 \mid |x| \equiv |y| \mod 2\}$

(d) $X = \mathbb{N}$, $R = \{(x, y) \in X^2 \mid x = y \text{ oder } x \nmid y\}$

Hausaufgabe 71. Wir betrachten die Quadrik

$$Q = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid -2xy - 6y - 1 = 0 \right\}.$$

Zu welcher der in Beispiel 8.12 angegebenen Quadriken ist Q isometrisch? Begründen Sie Ihren Antwort!