Übungsblatt 12

Die Hausaufgaben sollen schriftlich bearbeitet werden und spätestens am 6. Juli abgegeben werden.

Sei $n \in \mathbb{N}$, sei K ein Körper, seien V und W K-Vektorräume und sei R ein kommutativer Ring mit Einselement.

Vorbereitungsaufgabe 87. Zeigen Sie, dass

(a) ein normale Endomorphismus eines unitären $\mathbb{C}$-Vektorraums, dessen Eigenwerte alle reell sind selbstadjungiert ist.

(b) ein normale Endomorphismus eines unitären $\mathbb{C}$-Vekotrraums, dessen Eigenwerte alle Absolutbetrag 1 haben unitär ist.

Geben Sie ein Beispiel eines normalen Endomorphismus, welche weder unitär noch selbstadjungiert ist.

Übung 88. Zeigen Sie, dass $T = T_1/T_0$ wie im Skript definiert ein Tensorprodukt ist, indem Sie zeigen, dass es die universelle Eigenschaft erfüllt.

Übung 89. Betrachten wir $K[t_1]$ und $K[t_2]$ als K-Vektorräume, so gilt $K[t_1] \otimes_K K[t_2] \cong (K[t_1])[t_2]$.

Übung 90. Beweisen Sie, dass, wenn V und W endlichdimensional sind,

$$\Phi : V^* \otimes_K W \to \mathrm{Hom}_K(V, W), \sum_{i=0}^{n} \phi_i \otimes w_i \mapsto \sum_{i=0}^{n} f_{\phi_i \otimes w_i} \quad \text{mit} \quad f_{\phi_i \otimes w_i} : V \to W, v \mapsto \phi_i(v) w_i$$

ein wohldefinierter Isomorphismus ist.

Übung 91. Seien $f \in \mathrm{End}_K(V)$ bzw. $g \in \mathrm{End}_K(W)$ Endomorphismen von V bzw. W. Zeigen Sie, dass

$$f \otimes g : V \otimes_K W \to V \otimes_K W, \sum_{i=0}^{n} v_i \otimes w_i \mapsto \sum_{i=0}^{n} f(v_i) \otimes g(w_i)$$

einen Endomorphismus von $V \otimes_K W$ definiert. Berechnen Sie im Fall $K = \mathbb{R}$ und $V = W = \mathbb{R}^2$ die Darstellungsmatrix (bezüglich der Basis $\mathcal{C} = (e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2, e_2 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2)$) des Endomorphismus $f \otimes g$ wobei

$$M_{\mathcal{E}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad M_{\mathcal{E}}(g) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

die Darstellungsmatrizen für f bzw. g bezüglich der kanonischen Basis $\mathcal{E}$ sind.

Übung 92. Wir betrachten in dieser Übung $\mathbb{Z}$ als $\mathbb{Z}$-Modul. Beschreiben Sie genau die Teilmengen $S \subseteq \mathbb{Z}$ welche

(a) erzeugend sind;

(b) linear unabhängig sind;

(c) Basen sind.

Hausaufgabe 93. Welche der folgenden Aussagen sind wahr für jeden Ring R und jeder R-Modul M? Welche falsch? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

(a) Jede linear unabhängige Teilmenge $S \subseteq M$ kann zu einen Basis erweitert werden.

(b) Jede erzeugende Teilmenge $S \subseteq M$ enthällt eine Basis.

(c) Ist ein R-Modul M frei, so ist jeder Untermodul $U \subseteq M$ auch frei.

(d) Sind M und N freie R-Moduln, so ist $M \oplus N$ (siehe Skript für die Definition) frei.

Hausaufgabe 94. Beweisen Sie die Aussagen in 6.13. Das heißt, zeigen Sie, dass für ein $\mathbb{R}$-Vektorraum V mit Basis $(v_1, ..., v_n)$

$$\mu : \mathbb{C} \times (\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V) \to \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V, (\lambda, \sum_i c_i \otimes v_i) \mapsto \sum_i (\lambda c_i) \otimes v_i$$

eine wohldefinierte Abbildung ist und dass die Komplexifizierung $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$ mit μ als Skalarmultiplikation ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Basis $1 \otimes v_1, ..., 1 \otimes v_n$ ist.