Lösungen zu Übungsblatt 13

Die Hausaufgaben sollen schriftlich bearbeitet werden und spätestens am 13. Juli abgegeben werden.

Sei $n \in \mathbb{N}$, sei K ein Körper, sei R ein kommutativer Ring mit Einselement und sei I ein Ideal von R.

Vorbereitungsaufgabe 95. Sei K ein Körper, sei V ein K-Vektorraum und sei $f \in \mathrm{End}_K(V)$. Zeigen Sie, dass V mit Multiplikation

$$\cdot : R \times V \to V, (P(t), v) \mapsto P(t) \cdot v = P(f)(v)$$

ein Modul über $R = K[t]$ ist.

Übung 96. Welche der folgenden Aussagen sind wahr für beliebige Ideale I und J eines beliebigen Rings R? Welche falsch? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

(a) $I \cup J$ ist ein Ideal von R.

(b) $I \cap J$ ist ein Ideal von R.

(c) $\{ij \mid i \in I, j \in J\}$ ist ein Ideal von R.

(d) $\{i + j \mid i \in I, j \in J\}$ ist ein Ideal von R.

Übung 97. Beweisen Sie, dass, wenn R nullteilerfrei ist und M ein endlich erzeugter R-Modul aus Torsionelementen ist, ein Element $0 \neq r \in R$ existiert mit $rm = 0$ für jedes $m \in M$. Zeigen Sie mit ein Beispiel, dass dies im Allgemeinen nicht gilt wenn M nicht endlich erzeugt ist.

Übung 98. (Satz von Krull) Man nennt ein Ideal $M \subsetneqq R$ *maximal*, wenn es maximal bezüglich Inklusion in der Menge der echten Ideale $I \subsetneqq R$ ist. Zeigen Sie, dass jedes echte Ideal I von R in einen maximalen Ideal von R enthalten ist.

Übung 99. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ ein Teilring von $\mathbb{C}$ ist. Zeigen Sie weiter, dass

$$\delta : \mathbb{Z}[i] \setminus \{0\} \to \mathbb{N}_0, a + bi \mapsto a^2 + b^2$$

eine euklidische Gradfunktion auf $\mathbb{Z}[i]$ ist.

Übung 100. Zeigen Sie: Genau dann ist R ein Körper, wenn R genau zwei Ideale hat.

Hausaufgabe 101. Die *Länge* $l(M)$ eines R-Moduls M ist das größte $n \in \mathbb{N}_0$, für das eine Kette

$$\{0\} = M_0 \subsetneqq M_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq M_n = M$$

von Untermoduln $M_0, \ldots, M_n$ von M existiert. Wenn ein solches Maximum nicht existiert, so sagt man, dass $l(M) = \infty$. Berechnen Sie die Länge der folgenden Moduln:

(a) $R = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}$.

(b) $R = K$, $M = K^n$.

(c) $R = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ mit p prim.

Hausaufgabe 102. Sei R nullteilerfrei und seien $a, b, c, d \in R$. Zeigen Sie: Ist $c = \mathrm{ggT}(a, b)$ und $d = \mathrm{kgV}(a, b)$, so ist $ab \sim cd$.