Übungsblatt 14

Die Hausaufgaben sollen schriftlich bearbeitet werden und spätestens am 20. Juli abgegeben werden.

Vorbereitungsaufgabe 103. Sei K ein Körper und $P \in K[t]$ vom Grad $d = \deg(f) > 0$. Wir fassen den $K[t]$-Modul $K[t]/(P)$ als K-Vektorraum auf und schreiben $\overline{t} = \pi_{(P)}(t) = t + (P) \in K[t]/(P)$. Zeigen Sie, dass $(1, \overline{t}, \ldots, \overline{t^{d-1}})$ eine Basis dieses Vektorraums ist.

Übung 104. Zeigen Sie: Ist R ein Hauptidealring und ist $p \in R$ prim, so ist $R/(p)$ ein Körper.

Übung 105. Zeigen Sie: Ist $\varphi : R \to R'$ ein Homomorphismus kommutativer Ringe mit Einselement, so ist $R/\operatorname{Ker}(\varphi) \cong \operatorname{Im}(\varphi)$. Folgern Sie, dass für Primzahlen $p \neq q$ die Ringe $\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ (siehe LAAG1 H28) isomorph sind. Betrachten Sie dazu die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, \quad n \mapsto (n + p\mathbb{Z}, n + q\mathbb{Z}).$$

Übung 106. Wir betrachten

$$R = \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k t^k : n \in \mathbb{N}, a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}, a_1 = 0 \right\} \subseteq \mathbb{Q}[t].$$

Zeigen Sie, dass R ein Unterring von $\mathbb{Q}[t]$ ist, in dem t^2 und t^3 irreduzibel sind, und folgern Sie, dass R nullteilerfrei aber nicht faktoriell ist.

Übung 107. Berechnen Sie die Elementarteiler von

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -9 \\ 2 & 21 & 4 \end{bmatrix} \in \operatorname{Mat}_3(\mathbb{Z}).$$

Hausaufgabe 108. Wir betrachten

$$R = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \text{ ungerade} \right\} \subseteq \mathbb{Q}.$$

Zeigen Sie:

(a) R ist ein Teilring von $\mathbb{Q}$.

(b) Die Einheiten von R sind genau die $\frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ ungerade.

(c) Die Primelemente von R sind genau die $\frac{2a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ ungerade.

(d) R ist faktoriell.

Hausaufgabe 109. Berechnen Sie die Elementarteiler von

$$A = \begin{bmatrix} t-1 & 0 & t \\ 0 & t^2-1 & 0 \\ t & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \operatorname{Mat}_3(\mathbb{R}[t]).$$