Universität Ulm
Abteilung Angewandte Analysis

R. Chill
M. Kunze
SS 2005

Lösungsvorschlag zu Nichtlinearen Funktionalanalysis Blatt 1

1. Es seien $X_1, \dots, X_n, Y$ Banachräume und $T : X_1 \times \cdots \times X_n \to Y$ n-linear. Zeige, daß T genau dann stetig ist, falls es eine Konstante $C \geq 0$ gibt, so daß

$$\|Tx\| \leq C \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|_{X_i} \quad , \quad \forall\, x = (x_i) \in X_1 \times \cdots \times X_n$$

(5 P)

Lösung: Ist T stetig, so ist die Abbildung $X_n \ni y \mapsto T(x_1, \dots, x_{n-1}, y)$ eine stetige, lineare Abbildung. Folglich gibt es eine Konstante $C_n(x_1, \dots, x_{n-1}) := \|\tilde{T}(x_1, \dots, x_{n-1})\|$ so daß

$$\|T(x_1, \dots, x_{n-1}, y)\| \leq C_n \|y\|$$

für alle $x_1, \dots, x_{n-1}, y$ gilt. Beachte, daß hierbei $\tilde{T}$ eine $n-1$-lineare Abbildung auf $X_1 \times \cdots \times X_{n-1}$ ist. Somit folgt induktiv die Behauptung.
Nimm nun umgekehrt an, daß es eine Konstante C gibt, so daß $\|Tx\| \leq C \prod \|x_i\|$. Ist eine Folge $x_k = (x_k^1, \dots x_k^n) \to x = (x_1, \dots x_n)$ gegeben, so beachte, daß jede Komponentenfolge beschränkt ist (etwa durch K). Somit folgt

$$\begin{aligned}
\|Tx_k - Tx\| &= \|T(x_k^1, \dots, x_k^n) - T(x_k^1, \dots, x_k^{n-1}, x_n) \\
&\quad + T(x_k^1, \dots, x_k^{n-1}, x_n) - T(x_k^1, \dots x_k^{n-2}, x_{n-1}, x_n) + \cdots - Tx\| \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} C \cdot K^{n-1} \|x_k^j - x_j\| \to 0 \quad \text{as } k \to \infty
\end{aligned}$$

Also ist T stetig.

2. Zeige, daß der Raum $L^{(2)}(X_1 \times X_2, Y)$ der stetigen bilinearen Abbildungen von $X_1 \times X_2$ ausgestattet mit der Norm

$$\|T\| = \sup \left\{ \|Tx\| \ : \ \|x\| := \sup_i \|x_i\| = 1 \right\}$$

isometrisch isomorph zu $L(X_1, L(X_2, Y)\,)$ ist.

Bemerkung: Dies kann man natürlich auch für n-lineare Abbildungen machen. Insbesondere erhält man z.B. $L^{(n)}(X^n, Y) \simeq L(X, L^{(n-1)}(X^{n-1}, Y)\,)$ so daß man die n-te Ableitung einer Funktion $f : X \to Y$ als n-lineare Abbildung auf X^n betrachten kann.

(5 P)

Lösung: Definiere $\Phi : L(X_1, L(X_2, Y)) \to L^{(2)}(X_1 \times X_2, Y)$ durch

$$(\Phi T)(x_1, x_2) = (Tx_1)(x_2)$$

Dann ist ΦT bilinear (das ist einfach) und stetig ($\|(\Phi T)(x_1,x_2)\| = \|(Tx_1)(x_2)\| \leq \|Tx_1\|\|x_2\| \leq \|T\|\|x_1\|\|x_2\|$). Durch einfaches Nachrechnen bestätigt man, daß Φ linear ist.
Aus der Rechnung, daß ΦT stetig ist folgt, daß $\|\Phi T\| \leq \|T\|$. Ist umgekehrt $\varepsilon > 0$ gegeben, so gibt es einen Einheitsvektor x_1^0 mit $\|Tx_1^0\| \geq \|T\| - \varepsilon/2$. Nach Definition der Operatornorm heißt das $\sup_{\|x_2\|=1} \|(Tx_1^0)(x_2)\| \geq \|T\| - \varepsilon/2$. Somit gibt es einen Einheitsvektor x_2^0 mit $\|(Tx_1^0)(x_2^0)\| \geq \|T\| - \varepsilon$. Hieraus folgt $\|\Phi T\| \geq \|T\|$, insgesamt also, daß Φ eine Isometrie ist. Die Surjektivität ist mehr oder weniger offensichtlich.

3. Untersuche folgende Abbildungen auf Differenzierbarkeit und berechne wo möglich die Ableitung:

(a) $\Phi : L^2(0,1) \to L^1(0,1) \ : \ \Phi(f) := f^2.$

Lösung: Aufgrund der Hölder Ungleichung ist Φ wohldefiniert. Man hat nun

$$\Phi(f+h) = f^2 + hf + fh + h^2 = \Phi(f) + 2fh + h^2$$

wobei $h^2 = o(\|h\|)$, denn

$$\left\| \frac{h^2}{\|h\|} \right\| \leq \frac{\|h\|^2}{\|h\|} = \|h\|$$

Somit ist Φ differenzierbar mit $\Phi'(f) = M_{2f}$, dem Multiplikationsoperator, der mit $2f$ multipliziert.

Bemerkung: Beachte, daß $\Phi(f) = T(f,f)$ wobei $T(f,g) = fg$ eine stetige bilineare Abbildung von $L^2 \times L^2$ nach L^1 ist. Hier kann man immer wie folgt argumentieren:

$$T(f+h, f+h) = T(f,f) + T(f,h) + T(h,f) + T(h,h)$$

wobei immer (wegen Stetigkeit) $T(h,h) = o(\|h\|)$ ist. Somit ist $DT(f,f)h = T(h,f) + T(f,h)$.

(b) $\varphi : C[0,1] \to \mathbb{R} \ : \ \varphi(f) := \int_0^1 \sin(f(t))\, dt$.

Lösung: Unter Verwendung einer Taylorentwicklung von $\sin(f(t)+h(t))$ um den Punkt $f(t)$ erhält man

$$\varphi(f+h) = \int_0^1 \sin(f(t)+h(t))\, dt = \varphi(f) + \int_0^1 \cos(f(t))h(t)\, dt - \int_0^1 \sin(\xi_t)(h(t))^2\, dt\,,$$

wobei ξ_t zwischen $f(t)$ und $f(t)+h(t)$ liegt. Es ist aber $\int \sin(\xi_t)h^2(t)\, dt = o(\|h\|)$, denn

$$\left\| \int_0^1 \sin(\xi_t)h^2(t)\, dt \right\|_\infty \leq \int_0^1 1 \cdot \|h\|^2\, dt \leq \|h\|^2$$

Also ist φ differenzierbar mit $\varphi'(f)h = \int_0^1 \cos(f(t))h(t)\, dt$.

(c) $F : U \to C[0,1] \ : \ F(f) := \frac{1}{f}$, wobei $U = \{f \in C[0,1] \ : \ f(t) \neq 0 \,\forall\, t \in [0,1]\}$.

Lösung: Dies ist ähnlich zur Bestimmung der Ableitung von $T \mapsto T^{-1}$ auf $L(x)$ in der Vorlesung. Allgemein hat man folgende Situation:
Ist $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra mit Einheit e , so ist die Menge der invertierbaren Elemente offen. Man will nun die Abbildung $x \mapsto x^{-1}$ auf Differenzierbarkeit untersuchen. Unter Verwendung der Neumannreihe erhält man, daß mit x für h mit $\|h\| < \|x^{-1}\|^{-1}$ auch $x+h$ invertierbar ist mit

$$\begin{aligned}
(x+h)^{-1} &= (e + x^{-1}h)^{-1}x^{-1} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-x^{-1}h)^k \right) x^{-1} \\
&= x^{-1} - x^{-1}hx^{-1} + \sum_{k=2}^{\infty} (-x^{-1}h)^k x^{-1}
\end{aligned}$$

wobei

$$\|\textstyle\sum_{k=2}^{\infty}(-x^{-1}h)^k x^{-1}\| \le \displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \|x^{-1}\|^{k+1}\|h\|^k = \frac{\|h\|^2\|x^{-1}\|^3}{1-\|x^{-1}\|\cdot\|h\|}$$

ist, also dieser Term $o(\|h\|)$ ist. Somit ist $Dx^{-1}h = -x^{-1}hx^{-1}$. In unserem Fall sieht man leicht, daß die Menge der Invertiebaren Elemente der Banachalgebra $C[0,1]$ gerade durch U gegeben ist. Da diese Algebra sogar kommutativ ist ist $F'(f) = M_{-f^{-2}}$ der Multiplikationsoperator der mit $-f^{-2}$ multipliziert. (10 P)

Universität Ulm
Abteilung Angewandte Analysis

R. Chill
M. Kunze
SS 2005

Lösungsvorschlag zu Nichtlinearen Funktionalanalysis Blatt 2

1. Diskutiere den Zusammenhang zwischen der Differenzierbarkeit einer Abbildung F zwischen zwei komplexen Banachräumen und der Differenzierbarkeit der gleichen Abbildung, wenn sie als Abbildung zwischen reellen Banachräumen aufgefasst wird.
Beachte: Jeder komplexe Banachraum kann in natürlicher Weise als reeller Banachraum aufgefasst werden. (M)

2. Satz über inverse Funktionen
Folgere den Satz über die lokale Inverse aus dem Satz über implizite Funktionen. (6 P)

Lösung: Es seien also Banachräume X und Y sowie eine Funktion $f \in C^1(U,Y)$ gegeben. Ferner sei $f'(\bar{x})$ ein Isomorphismus. Betrachte nun die Funktion $F : Y \times X \to Y$ gegeben durch $F(y,x) = y - f(x)$. Dann ist F eine C^1-Funktion mit $\frac{\partial F}{\partial x}(\bar{x}) = f'(\bar{x}) \in I(X,Y)$ nach Voraussetzung.
Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es Umgebungen $V \subset Y$ von $f(\bar{x})$ und $W \subset X$ von $\bar{x}$ sowie eine Funktion $g \in C^1(V,X)$ mit $g(V) \subset W$ so daß

$$\{(y,x) \in V \times W \,:\, F(y,x) = F(f(\bar{x}),\bar{x}) = 0\} = \{(y,g(y)) \,:\, y \in V\}$$

Also sind in $g(V)$ die Bedingungnen $f(x) = y$ mit $y \in V$ und $g(y) = x$ äquivalent. D. h. $g : g(V) \to V$ ist eine lokale inverse zu f. (Beachte, daß $g(V) = W \cap f^{-1}(V)$ offen ist.)

3. Es sei $X = C[0,1]$. Für $y \in X$ suchen wir eine Lösung $x \in X$ der Integralgleichung

$$x(t) + t\int_0^1 x(s)^2\,ds = y(t)\,.$$

Zeige, daß es eine Umgebung U von $y_0 = 0$ gibt, so daß diese Gleichung für jedes $y \in U$ eine Lösung $x = Ly$ besitzt. Zeige weiter, daß der Lösungsoperator L stetig differenzierbar ist. (6 P)

Lösung: Sei $f : X \to X$ definiert durch

$$(f(x))(t) := x(t) + t\int_0^1 x^2(s)\,ds\,.$$

Dann ist f stetig differenzierbar mit Ableitung

$$(f'(x)h)(t) = h(t) + 2t\int_0^1 x(s)h(s)\,ds\,.$$

Es ist also $f'(0) = id_X$ ein isomorphismus. Nach dem Satz über die lokale Inverse gibt es Umbgebungen V,W von $0 = f(0)$ so daß $f : V \to W$ ein C^1-Diffeomorphismus ist. Insbesondere ist die Umkehrabbildung $L := f^{-1} : W \to V$ stetig differenzierbar. Dieser gibt offensichtlich die Lösung der Gleichung an.

4. Notwendige Bedingung für lokale Extrema

(a) Es sei X ein reeller Banachraum, $U \subset X$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeige: Besitzt f an der Stelle $x_0 \in U$ ein lokales Extremum, so ist $f'(x_0) = 0$.

Lösung: Betrachte die zu $h \in X$ die Funktion $\varphi(t) = f(x_0 + th)$ diese ist zumindest auf einem kleinen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definiert. Hat f in x_0 ein lokales Extremum, so hat φ (unabhängig von h) ein lokales Extremum in $t = 0$. Somit folgt mit der Theorie von AnaI, daß

$$\varphi^{'}(0) = f^{'}(x_0)h = 0$$

Da h beliebig war folgt $f^{'}(x_0) = 0$.

(b) Finde alle möglichen lokalen Extrema des Funktionals $\varphi : C[0,1] \to \mathbb{R}$ wobei $\varphi(f) = \int_0^1 (3f^3(t) - e^t f(t)\,)\,dt$. (8 P)

Lösung: Nach a) sind die Funktionen $f \in C^1[0,1]$ zu finden, für die $\varphi^{'}(f) = 0$ gilt. Es ist aber

$$\varphi^{'}(f)h = \int_0^1 (9f^2(t)h(t) + e^t h(t))\,dt\,.$$

Ist also $\varphi^{'}(f) = 0$ für ein f so gilt notwendigerweise (setze in obiger Gleichung $h = 9f^2 + e^{\cdot}$) daß $9f^2 + e^t = 0$ ist. Löst man diese Gleichung punktweise auf, so erhält man $f(t) = \pm\frac{1}{3}e^{\frac{t}{2}}$. Da die Funktion f aber stetig sein muß, gibt es nur die zwei Möglichkeiten

$$f_1(t) = \frac{1}{3}e^{\frac{t}{2}} \qquad \text{und} \qquad f_2(t) = -\frac{1}{3}e^{\frac{t}{2}}\,.$$

UNIVERSITÄT ULM
Abteilung Angewandte Analysis

R. Chill
M. Kunze
SS 2005

Lösungsvorschlag zu Nichtlinearen Funktionalanalysis Blatt 3

1. Approximation von Eigenwerten und Eigenvektoren
Es sei H ein reeller Hilbertraum und A ein selbstadjungierter Operator. Wir möchten einen Einheitsvektor x mit $Ax = \lambda x$ finden. Wir gehen wie folgt vor:
Sei $X := H \times \mathbb{R}$ mit der Norm $\|(x, \lambda)\| = \|x\|_H + |\lambda|$ und definiere

$$F_A(x, \lambda) = (Ax - \lambda x, \|x\|^2 - 1)\,.$$

Dann ist λ ein Eigenwert von A mit normiertem Eigenvektor x genau dann, wenn (x, λ) Nullstelle von F_A ist.

(a) Zeige, daß F überall differenzierbar ist mit Lipschitzstetiger Ableitung.

Lösung: Die erste Komponente von F_A ist linear, die zweite quadratisch. Mit den bekannten Ableitungsregeln folgt dann leicht, daß

$$F_A'(x) = \begin{pmatrix} A - \lambda & -x \\ 2x' & 0 \end{pmatrix}$$

wobei x' die lineare Abbildung $y \mapsto (y, x)$ bezeichnet. Daß die Ableitung Lipschitzstetig ist, folgt, da die zweite Ableitung konstant ist aus Accroixement finis. Man kann es aber auch direkt nachrechnen.

(b) Ist $F_A^{'}(x, \lambda)$ stets invertierbar wenn (x, λ) Nullstelle von F_A ist? Falls nicht, so finde für den Fall daß $\dim H < \infty$ (wobei A durch die darstellende Matrix gegeben ist) eine notwendige Bedingung dafür, daß $F^{'}(x, \lambda)$ für eine Nullstelle (x, λ) invertierbar ist.

Lösung: Ist $A = 0$ die Nullmatrix im $\mathbb{R}^n$, so ist jeder Vektor x mit $\|x\| = 1$ ein Eigenvektor. Insbesondere ist ist z.B. $(1, 0, \ldots, 0, 0)$ eine Nullstelle von F_0. Allerdings ist

$$F_0'(1, 0, \ldots, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 2 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

nicht invertierbar. Notwendig für die Invertierbarkeit der Matrix, ist daß λ ein Eigenwert mit geometrischer Vielfachheit 1 ist. Ist nämlich $\mathrm{Rg}(A - \lambda) \leq n - 2$, so ist $\mathrm{Rg}(A - \lambda | x) \leq n - 1$ und somit $\mathrm{Rg} F_A'(x) \leq n < n + 1$ und somit ist die letzte Matrix nicht invertierbar.

(c) Implementiere das Newtonverfahren (z.B. in Maple) um Nullstellen von F_A für

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

zu bestimmen.

Lösung: Siehe Maple Work Sheet!

2. Eigenschaften des Abbildungsgrades

Nimm an, es gibt einen Abbildungsgrad $d : M \to \mathbb{Z}$.

(a) Zeige, daß d folgende Eigenschaften besitzt:

(d4) $d(f, \emptyset, y) = 0$,

(d5) Ist $f^{-1}(\{y\}) = \emptyset$, so folgt $d(f, \Omega, y) = 0$,

(d5$'$) Ist $d(f, \Omega, y) \neq 0$ so gibt es ein $x \in \Omega$ mit $f(x) = y$.

Lösung: (d4) Wir verwenden (d2) mit $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega = \emptyset$. Beachte, daß Ω_1 und Ω_2 disjunkt sind und $y \notin f(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)$. Also liefert (d2)

$$d(f, \emptyset, y) = 2d(f, \emptyset, y)\,,$$

woraus die Behauptung folgt.

(d5) Wir verwenden nochmals (d2) mit $\Omega_1 = \Omega_2 = \emptyset$. Diese sind disjunkt und außerdem ist $y \notin f(\overline{\Omega})$ nach Voraussetzung. Somit ist

$$d(f, \Omega, y) = 2d(f, \emptyset, y) = 0$$

nach (d4).

(d5$'$) Ist die Kontraposition zu (d5).

(b) Es sei $\Omega = (-1, 1)\,,\ f(x) = x^2$ und $y \neq 1$. Zeige, daß $d(f, \Omega, y) = 0$.

Hinweis: Betrachte die Homotopie $h(t, x) = (1 - t)f(x) + t$.

Lösung: Wir betrachten die Funktion $h(t, x) = (1 - t)f(x) + t$. Diese ist offensichtlich stetig, also eine Homotopie. Es ist $h(t, 1) = h(t, -1) = 1$ für alle $t \in [0, 1]$. Ist also $y(t) = y \neq 1$, so liefert (d3), daß $d(h(t, \cdot), \Omega, y)$ konstant ist. Insbesondere ist $d(f, \Omega, y) = d(h(0, \cdot), \Omega, y) = d(h(1, \cdot), \Omega, y) = d(\mathbb{1}, \Omega, y)$. Wobei $\mathbb{1}$ die konstante 1-Funktion bezeichnet. Ist aber $y \neq 1$, so folgt mit (d5), daß $d(\mathbb{1}, \Omega, y) = 0$.

3. Satz von Perron-Frobenius

Sei $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ eine positive Matrix (d.h. $a_{i,j} \geq 0$). Zeige, daß es ein $\lambda \geq 0$ und ein positives $x \in \mathbb{R}^N$ gibt (d.h. $x_i \geq 0$) mit $Ax = \lambda x$.

Hinweis: Falls $Ax \neq 0$ für alle $x \geq 0$ mit $x \neq 0$, so betrachte $C := \{x \in \mathbb{R}^N\ :\ x \geq 0\,,\ \sum x_i = \|x\|_1 = 1\}$ und $f : C \to C$ definiert durch $f(x) = \|Ax\|_1^{-1} Ax$.

Lösung: Sei oBdA $Ax \neq 0$ für alle $x \geq 0$ mit $x \neq 0$ (sonst ist man fertig). Definiere $C := \{x \in \mathbb{R}^N\ :\ x \geq 0\,,\ \sum x_i = \|x\|_1 = 1\}$. Dann ist C konvex (!) und abgeschlossen. Sei nun f definiert durch $f(x) = \|Ax\|_1^{-1} Ax$. Dann ist f stetig und $f(C) \subset C$ (für $x \in C$ ist $f(x) \geq 0$ da sowohl A als auch x nur positive Einträge haben, die Summe ist offensichtlich 1).

Nach dem Brouwerschen Fixpunktsatz besitzt f einen Fixpunkt x_0 in C. Insbesondere ist $x_0 \geq 0$ normiert und $Ax_0 = \|Ax_0\|_1 x_0$. Also ist x_0 ein Eigenvektor zum Eigenwert $\|Ax_0\|$ von A.

UNIVERSITÄT ULM
Abteilung Angewandte Analysis

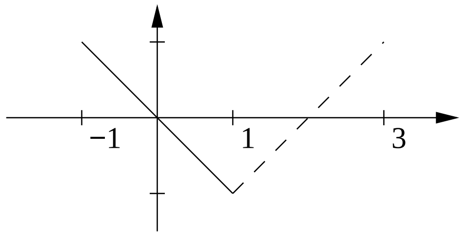
R. Chill
M. Kunze
SS 2005

Lösungsvorschlag zu Nichtlinearen Funktionalanalysis Blatt 4

1. Bestimme $d(f, \Omega, 0)$, wobei $\Omega = (-1, 1)$ und $f(x) = -x$ ist.

Lösung: Wir setzen die Funktion f wie folgt zu $\tilde{f} : \tilde{\Omega} := (-1, 3) \to \mathbb{R}$ fort:

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & , \quad x \in \Omega \\ x - 2 & , \quad x \in \Omega_1 := (1, 3) \ \text{ oder } \ x = 0 \end{cases}$$



Nun sind Ω, Ω_1 offene, disjunkte Teilmengen von $\tilde{\Omega}$ mit $0 \notin \tilde{f}[\tilde{\Omega} \setminus (\Omega \cup \Omega_1)]$. Also gilt nach (d2), daß $d(f, \Omega, 0) = d(\tilde{f}, \tilde{\Omega}, 0) - d(f_1, \Omega_1, 0)$. Nach (d6) ist aber $d(\tilde{f}, \tilde{\Omega}, 0) = d(\mathbb{1}, \tilde{\Omega}, 0)$, wobei $\mathbb{1}$ die konstante Einsfunktion bezeichnet, was nach (d5) gleich 0 ist.
Jetzt schiebt man noch mit der Homotopie $h(t, x) = f_1(x) + 2t$ und $y(t) = 2t$ die Funktion f_1 nach oben und erhält $d(f_1, \Omega_1, 0) = d(id, \Omega_1, 2) = 1$ nach (d1).
Somit erhalten wir insgesamt $d(f, \Omega, 0) = -1$.

2. Zeige, daß das Gleichungssystem

$$\begin{cases} 2x + y + \sin(x + y) &= 0 \\ x - 2y + \cos(x + y) &= 0 \end{cases}$$

eine Lösung in $B(0, r)$ besitzt. Versuche r so klein wie möglich zu wählen.

Lösung: Wir betrachten Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x + y + \sin(x + y) \\ x - 2y + \cos(x + y) \end{pmatrix}.$$

Es ist zu zeigen, daß f eine Nullstelle in $B(0, r)$ hat. Betrachte die Homotopie

$$h(t, x, y) = \begin{pmatrix} 2x + y + (1 - t)\sin(x + y) \\ x - 2y + (1 - t)\cos(x + y) \end{pmatrix}.$$

Besitzt $h(t, \cdot, \cdot)$ eine Nullstelle (x, y) mit $x^2 + y^2 = r^2$ so folgt

$$\begin{aligned} 2x + y &= -(1 - t)\sin(x + y) \\ x - 2y &= -(1 - t)\cos(x + y). \end{aligned}$$

Daraus folgt durch Quadrieren

$$\begin{aligned} 4x^2 + 4xy + y^2 &= (1-t)^2 \sin^2(x+y) \\ x^2 - 4xy + 4y^2 &= (1-t)^2 \cos^2(x+y) \end{aligned}$$

und daraus durch Summieren $5r^2 = (1-t)^2$.

Somit ist $0 \notin h(t, \partial B(0,r))$ für alle $r > 1/\sqrt{5}$. Ausserdem folgt $(t=0)$, daß die Gleichung $f(x,y) = 0$ nur Lösungen auf der Sphäre $\partial B(0, 5^{-\frac{1}{2}})$ haben kann.
Nach (d3) gilt aber $d(f, B(0,r), 0) = d(g, B(0,r), 0)$ wobei

$$g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x + y \\ x - 2y \end{pmatrix}$$

ist. Nach der Formel für den Abbildungsgrad ist aber $d(g, B(0,r), 0) = -1$. Somit besitzt f nach (d5) Nullstellen in jeder Kugel $B(0,r)$ für jedes $r > 1/\sqrt{5}$.

Bemerkung: Es gilt sogar Eindeutigkeit der Lösung:
Subtrahiert man nämlich vom 3-fachen der ersten Gleichung die 2-te Gleichung, so erält man daß für $z = x + y$ stets $5z + 3\sin z - \cos z = 0$ gelten muß. Man sieht aber leicht, daß diese Funktion monoton wachsend ist, also höchstens eine Nullstelle hat. Also gilt $x + y = z = const$ für alle Lösungen (x,y). Addiert man nun das 2-fache der ersten Gleichung zur zweiten, so erhält man $5x + 2\sin z + \cos z = 0$ womit x und damit auch $y = z - x$ eindeutig bestimmt sind.
Nutzt man Maple zum Lösen (der Gleichung für z!) , so erhält man:
`z = 0.1241573229` und daraus `x = -0.2479959099` und `y = 0.3721532328`.

UNIVERSITÄT ULM
Abteilung Angewandte Analysis

R. Chill
M. Kunze
SS 2005

Lösungsvorschlag zu Nichtlinearen Funktionalanalysis Blatt 5

1. Lösungen periodischer Probleme nach Poincaré
Es seien $f \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und $T > 0$ mit

- $f(t, x) = f(t + T, x)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und alle $x \in \mathbb{R}^n$
- Es gibt ein $r > 0$, so daß $(f(t, x), x) < 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und alle x mit $\|x\| = r$.

Zeige: Es gibt eine T-periodische Lösung von

$$y' = f(t, y)\,.$$

Hinweis: Zeige zunächst, daß das Anfangswertproblem $y' = f(t, y)$ $y(0) = y_0$ für jedes $y_0 \in \overline{B(0, r)}$ eine globale (d.h. für $t \geq 0$ definierte) Lösung y besitzt, die ganz in $\overline{B(0, r)}$ verläuft (Um das zu zeigen, multipliziere die Differentialgleichung skalar mit $y(t)$). Betrachte dann die *Poincaré*-Abbildung $g : \overline{B(0, r)} \to \overline{B(0, r)}$ definiert durch $g(y_0) = y(T)$, wobei y die Lösung des Anfangswertproblems zum Anfangswert $y(0) = y_0$ ist.

Lösung: Da $f \in C^1$ ist erhalten wir mit dem Satz von Picard-Lindelöf stets eindeutige (lokale) Lösungen von

$$(AWP) \begin{cases} y' &= f(t, y) \\ y(0) &= y_0 \end{cases}.$$

Diese können wir aber sogar zu maximalen Lösungen $y : I_{\max} \to \mathbb{R}^n$ fortsetzen.
Ist aber $\|y_0\| \leq r$, so verläuft eine solche Lösung ganz in $\overline{B(0, r)}$. Ist nämlich $\|y(t_0)\| = r$ für ein $t_0 \in I_{\max}$ so gilt

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \|y(t)\|^2 \Big|_{t=t_0} = (y'(t_0), y(t_0)) = (f(t_0, y(t_0)), y(t_0)) < 0$$

nach Voraussetzung. Somit ist $\|y(t)\|^2$ monoton fallend auf einem kleinen Intervall $[t_0, t_0 + \varepsilon)$ und daher insbesondere $y(t)$ in $\overline{B(0, r)}$ für solche t.
Daraus folgt weiterhin, daß $[0, \infty) \subset I_{\max}$, denn das maximale Lösungsintervall kann nur kleiner sein, wenn die Lösung am Rand unbeschränkt ist (weil f überall definiert ist!).
Betrachte nun die Poincaré Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_f : \overline{B(0, r)} &\to \overline{B(0, r)} \\ y_0 &\mapsto y(T) \end{aligned}$$

wobei y die Maximale Lösung des AWP mit $y(0) = y_0$ ist.
Es ist y eine periodische Lösung von $y' = f(t, y(t))$ genau dann, wenn $y(0)$ ein Fixpunkt von g ist:
Ist nämlich $y(0)$ ein Fixpunkt von $\mathcal{P}_f$, so sind $t \mapsto y(t)$ und $t \mapsto y(t + T)$ Lösungen von (AWP) (hier geht die Periodizität von f ein!). Wegen der Eindeutigkeit müssen diese Funktionen dann aber übereinstimmen, also muß y periodisch sein. Die umgekehrte Richtung ist trivial.
Es bleibt also die Existenz eines Fixpunktes von $\mathcal{P}_f$ zu zeigen. Diese folgt aber sofort aus dem Brouwerschen Fixpunktsatz, wenn $\mathcal{P}_f$ stetig ist (beachte, $\overline{B(0, r)}$ ist konvex und abgeschlossen).

Sind aber $y(t)$ und $z(t)$ die maximalen Lösungen von (AWP) zu den Anfangswerten y_0 resp. z_0 so gilt für $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \|y(t) - z(t)\| &= \|y_0 - z_0 + \int_0^t y'(s) - z'(s)\, ds\| \\ &\leq \|y_0 - z_0\| + \int_0^t \|f(s, y(s)) - f(s, z(s))\|\, ds \\ &\leq \|y_0 - z_0\| + \int_0^t L\|y(s) - z(s)\|\, ds \end{aligned}$$

wobei $L = \sup_{(0,t)\times\overline{B(0,r)}} \|\frac{\partial}{\partial y} f(t,y)\|$. Aus dem Lemma von Gronwall folgt nun

$$\|y(t) - z(t)\| \leq \|y_0 - z_0\| e^{Lt}$$

Setzt man $t = T$ so folgt, daß $\mathcal{P}_f$ stetig ist.

2. Satz vom Schinken-Käse Sandwich

Wir betrachten ein leckeres Schinken-Käse Sandwich $\mathcal{SK}$, bestehend aus zwei Scheiben Brot Ω_1, einer (relativ dicken) Scheibe Schinken Ω_2 und etwas Schweizer Käse Ω_3, wobei $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ jeweils die Lage der entsprechenden Zutat im Raum wiedergibt. Zeige nun, daß es möglich ist, dieses Sandwich mit einem einzigen (gerade ausgeführten) Schnitt zu halbieren.

Für besonders Hungrige betrachten wir gleich n-dimensionale Sandwichs (was einem natürlich ermöglicht auch noch Salami und andere Zutaten daraufzutun!):

Es seien n beschränkte, meßbare Mengen $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$ in $\mathbb{R}^n$ gegeben. Zeige, daß es eine Hyperebene in $\mathbb{R}^n$ gibt, die alle n Mengen in zwei Teile gleichen Volumens teilt. Gehe dabei wie folgt vor:

(a) Für $x \in S^n = \partial B(0,1)$ (hier ist $B(0,1) \subset \mathbb{R}^{n+1}$) sei $H_x := \{y \in \mathbb{R}^{n+1} : (y,x) = x_{n+1}\}$. Dies ist die zu x senkrechte, affine Hyperebene des $\mathbb{R}^{n+1}$ durch den Nordpol von S^n (Der Nordpol ist der Punkt $\mathcal{N} = (0, \ldots, 0, 1)$. Skizze!). Sei weiter $H_x^+ := \{y \in \mathbb{R}^{n+1} : (y,x) \geq x_{n+1}\}$.
Sei nun $A \subset \mathbb{R}^n$ meßbar und beschränkt und $f_A(x) := \lambda_n(A \cap H_x^+)$, wobei λ_n das n-dimensionale Lebesguemaß ist und wir Teilmengen B des $\mathbb{R}^n$ mit $B \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ identifizieren. Es ist also $A \cap H_x^+ = \{y \in A : ((y,0),x) \geq x_{n+1}\}$. Zeige, daß f stetig von $x \in S^n$ abhängt.

Lösung: Es sei $x_k \subset S^n$ mit $x_k \to x$ gegeben. Wir schreiben x_k^0 (x^0) für die ersten n Komponenten von $x_k\,(x)$. Definiere $B_k := A \cap H_{x_k}^+$ und $B := A \cap H_x$. Weil $\mathbb{1}_{B_k} \leq \mathbb{1}_A$ und A beschränkt (und somit $\mathbb{1}_A$ integrierbar) ist genügt es nach dem Satz von Lebesgue zu zeigen, daß $\mathbb{1}_{B_k} \to \mathbb{1}_B$ fast überall.
Sei $y \in B \setminus H_x$ gegeben. Es gilt also $\left(y, x^0\right) > x_{n+1}$. Dann gilt $\left(y, x_k^0\right) \geq x_{n+1}^k$ für alle k ab einem gewissen Index N, denn sonst gäbe es eine Teilfolge, für die $<$ gilt, was nach Grenzübergang den Widerspruch $\left(y, x^0\right) \leq x_{n+1}$ liefern würde. Somit ist für solche y stets $\lim \mathbb{1}_{B_k}(y) = \mathbb{1}_B(y)$.
Ist andererseits $y \in B^c$, d.h. gilt $\left(y, x^0\right) < x_{n+1}$, so gilt $y \notin B_k$ ab einem gewissen Index N. (Sonst erhält man wiederum eine Teilfolge....) Folglich gilt auch für diese y die obige Konvergenz. Lediglich für $y \in PH_x$ haben wir keine konvergenz gezeigt, dies ist aber eine Nullmenge. Somit folgt die Behauptung.

(b) Zeige, daß die Menge $H_x \cap \mathbb{R}^n$ für $x \neq \mathcal{N}$ eine Hyperebene im $\mathbb{R}^n$ ist. Betrachte nun die Funktion $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ gegeben durch $f = (f_{\Omega_1}, \ldots, f_{\Omega_n})$. Zeige, daß $H_x \cap \mathbb{R}^n$ genau dann alle Mengen Ω_i halbiert, wenn $f(x) = f(-x)$ gilt.

Lösung: Es ist $H_x \cap \mathbb{R}^n$ die Lösungsgesamtheit des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} (y,x) &= x_{n+1} \\ (y,\mathcal{N}) &= 0 \end{aligned}$$

Diese ist leer, wenn $(\mathcal{N},x)$ linear abhängig ist (also $x=\mathcal{N}$ wegen der Normierung von x), denn dann gibt es keine partikuläre Lösung des inhomogenen Problems. Ist jedoch $(\mathcal{N},x)$ linear unabhängig, so ist $x_j \neq 0$ für ein $j \neq n+1$ und dann ist $x_j^{-1}x_{n+1} \cdot e_j$ eine Partikuläre Lösung des Gleichungssystems und die Lösungsgesamtheit ist nach der allgemeinen Theorie gegeben durch $x_p + \ker\binom{x^T}{\mathcal{N}^T}$ was eine $n-1$-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$ ist.
Die Äquivalenz folgt nun, indem man beachtet, daß $f_A(-x) = \lambda_n(\{y \in A : \left(y, x^0\right) \leq x_{n+1}\})$ also das Maß der auf der anderen Seite von $H_x \cap \mathbb{R}^n$ gelegenen Teil von A. Beachte weiter, daß $f_A(\mathcal{N}) = \lambda_n(\emptyset) = 0$ während $f_A(-\mathcal{N}) = \lambda_n(A)$.

(c) Zeige mit dem Satz von Borsuk-Ulam, daß eine solche Hyperebene $H_x \cap \mathbb{R}^n$ existiert.

Lösung: Aus dem Satz von Borsuk-Ulam folgt sofort die Existenz eines Punktes x mit $f(x) = f(-x)$, denn $B(0,1)$ ist eine offene, beschränkte, symmetrische Menge, die 0 enthält.

(d) (Zusatzaufgabe für besonders Interessierte) Bringe ein Schinken-Käse Sandwich und eine dazu passende Hyperebene, die das Sandwich halbiert, mit in die Übung. Extrapunkte gibt es für Salat, Tomaten und Zwiebeln und etwas Senf.

UNIVERSITÄT ULM
Abteilung Angewandte Analysis

R. Chill
M. Kunze
SS 2005

Lösungsvorschlag zu Nichtlinearen Funktionalanalysis Blatt 6

1. Schaeferscher Fixpunktsatz

(a) Sei X ein Banachraum und $F : X \to X$ kompakt und stetig. Betrachte die Schaefermenge $\mathcal{S} := \{x \in X : \exists\, \alpha \in (0,1) \text{ mit } x = \alpha T(x)\}$.
Zeige: Ist $\mathcal{S}$ beschränkt, so besitzt T einen Fixpunkt.
Hinweis: Ist $\mathcal{S} \subset B(0,R)$, so zeige, daß $d(I-F, B(0,R), 0) = 1$ (falls der Abbildungsgrad exisitert). Betrachte dazu die Homotopie $H(t,x) = tF(x)$. Was ist, wenn $d(I-F, B(0,R), 0)$ nicht existiert?

Lösung: Sei $\mathcal{S} \subset B(0,R)$. Besitzt die Gleichung $x - F(x) = 0$ eine Lösung $x \in \partial B(0,R)$, so ist man fertig. Ansonsten betrachtet man die Homotopie $H(t,x) = tF(x)$. Dann besitzt die Gleichung $x - H(t,x) = 0$ keine Lösung $x \in \partial B(0,R)$, denn für $t \in (0,1)$ liegen diese Lösungen in $\mathcal{S}$, für $t = 0$ kommt nur die Lösung $x = 0$ in Frage und für $t = 1$ war eine Lösung auf dem Rand ausgeschlossen. Mit der Homotopieinvarianz folgt nun $d(I-F, B(0,R), 0) = d(I, B(0,R), 0) = 1$ nach ($\tilde{\text{d1}}$), woraus nun mit ($\tilde{\text{d5}}$) die Existenz einer Lösung von $x = F(x)$ folgt.

(b) Betrachte die Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $F(x) = \sqrt{1+x^2}$. Zeige, daß die zu T gehörende Schäfermenge unbeschränkt ist und daß T keinen Fixpunkt besitzt.

Lösung: Für $\alpha \in (0,1)$ sei $x_\alpha = \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}$. Dann ist $x_\alpha \in \mathcal{S}$. Weil $\lim_{\alpha \to 1} x_\alpha = \infty$, ist $\mathcal{S}$ unbeschränkt. Hätte F einen Fixpunkt x so müsste $x^2 = 1 + x^2$ also $0 = 1$ sein, was natürlich nicht sein kann.

2. Eigenwerte kompakter Funktionen

(a) Es sei X ein Banachraum und $\Omega \subset X$ beschränkt und offen. Seien T, S kompakte Störungen der Identität auf Ω , d.h. es gibt kompakte stetige Funktionen F, G , so daß $T(x) = x - F(x)$ und $S(x) = x - G(x)$. Sei weiter $T(x) \neq 0$ und $S(x) \neq 0$ auf $\partial\Omega$. Zeige: Ist $d(I-F, \Omega, 0) \neq d(I-G, \Omega, 0)$, so gibt es ein $x \in \partial\Omega$ und ein $\lambda < 0$ mit $T(x) = \lambda S(x)$.

Lösung: Betrachte die Homotopie $H(t,x) = (1-t)F(x) + tG(x)$. Es muß ein Paar $(t,x) \in [0,1] \times \partial\Omega$ geben mit $H(t,x) = x$. Ansonsten würde die Homotopieinvarianz $d(I-F, \dots) = d(I-G, \dots)$ liefern, ein Widerspruch. Weil aber T, S auf dem Rand Nullstellenfrei sind muß $t \in (0,1)$ sein. Es ist also

$$0 = x + (1-t)F(x) + tG(x) = (1-t)T(x) + tS(x)$$

woraus durch Auflösen nach T die Behauptung folgt.

(b) Sei nun $\Omega \subset X$ eine Teilmenge, die Null enthält und $T : \overline{\Omega} \to X$ stetig mit $0 \notin T(\partial\Omega)$.

(i) Zeige: Ist $X = \mathbb{R}^n$ wobei n ungerade ist, so gibt es $x \in \partial\Omega$ und $\lambda \neq 0$ mit $T(x) = \lambda x$.

Lösung: Weil n ungerade ist, ist $d(\pm I, \Omega, 0) = \pm 1$. Man kann also Teil (a) mit $T = T$ (beachte, daß in endlicher Dimension jede stetige Funktion kompakt ist) und für S je nach Abbildungsgrad von F I oder $-I$ wählen.

(ii) Zeige: Ist $\dim X = \infty$ und T zusätzlich kompakt mit $\inf_{x\in\partial\Omega} \|T(x)\| > 0$, so gibt es ein reelles $\lambda \neq 0$ und ein $x \in \partial\Omega$ mit $T(x) = \lambda x$.

Hinweis: Approximiere T durch Funktionen T_n, die Werte in einem endlichdimensionalen Unterraum *ungerader* Dimension annehmen und verwende (i)

Lösung: Wir betrachten X als reellen Banachraum. Laut Vorlesung gibt es eine Folge von Funktionen T_n mit endlichdimensionalem Bild So daß

$$\sup_{x\in\overline{\Omega}} \|T(x) - T_n(x)\| < \frac{1}{n}\,.$$

Wir können voraussetzen, daß $T_n(\Omega) \subset X_n$ wobei $\dim X_n$ ungerade ist. (Man fügt im Beweis der Existenz solcher approximierender Funktionen einfach zu den zunächst konstruierten $y_1, \dots y_m$ falls nötig - also wenn m gerade ist - noch ein y_{m+1} hinzu, welches von den anderen linear unabhängig ist und $B(y_{m+1}, 1/n) \cap \overline{T(\Omega)} \neq \emptyset$ erfüllt.)
Sei nun $\Omega_n = \Omega \cap X_n$. Weil $\inf_{x\in\partial\Omega} \|T(x)\| > 0$ ist für genügend großes n stets $T_n(x) \neq 0$ für $x \in \partial\Omega_n$. Nach Teil (i) gibt es also $\lambda_n \neq 0$ und $x_n \in \partial\Omega_n$ mit $T_n(x_n) = \lambda x_n$.

Wir zeigen nun, daß (λ_n, x_n) (nach Wahl einer geeigneten Teilfolge) gegen eine Lösung der Gleichung $T(x) = \lambda x$ konvergiert. Weil T kompakt ist, gilt (nach Teilfolge) $T(x_n) \to \tilde{x}$. Beachte, daß $|\lambda_n| = \|x_n\|^{-1} \cdot \|\lambda_n x_n\| = \|x_n\|^{-1} \|T_n x_n\| \in [a, b]$ für zwei positive Konstanten $0 < a < b$ ist (denn einerseits ist $\varepsilon < \|x_n\| < c$, weil $x_n \in \partial\Omega_n \subset \partial\Omega$ und dieser Rand Beschränkt ist und positiven Abstand zur 0 hat, und andererseits $e \geq \|T_n(x_n)\| \geq d > 0$ wegen der Infimumsbedingung und der Beschränktheit des Randes ist). Somit konvergiert auch $\lambda_n \to \lambda \neq 0$ nach Übergang zu einer Teilfolge.
Nun ist

$$T(x_n) - \lambda x_n = T(x_n) - T_n(x_n) + \lambda_n x_n - \lambda x_n \to 0$$

Also gilt $x_n \to \lambda^{-1} \lim T(x_n) = \lambda^{-1}\tilde{x} =: x$. Natürlich ist $x \in \partial\Omega$. Schliesslich erhalten wir wegen der Stetigkeit von T

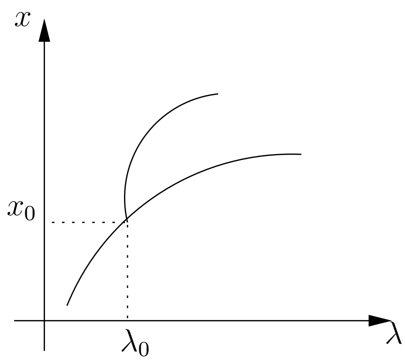
$$Tx = \lim Tx_n = \lim \lambda x_n = \lambda x\,.$$

Universität Ulm
Abteilung Angewandte Analysis

R. Chill
M. Kunze
SS 2005

Lösungsvorschlag zu Nichtlinearen Funktionalanalysis Blatt 7

1. **Bifurkation von Lösungen**
   Wir betrachten ein parameterabhängiges Problem $F(\lambda, x) = 0$. Hierbei ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Parameter und x wird in einem Banachraum X gesucht. Wir nennen nun (λ_0, x_0) einen Bifurkationspunkt dieses Problems, wenn (1) (λ_0, x_0) eine Lösung ist, also $F(\lambda_0, x_0) = 0$ und (2) es zwei Folgen (λ_n, x_n) und (λ_n, y_n) von Lösungen mit $x_n \neq y_n$ für alle n gibt, die gegen (λ_0, x_0) konvergieren.



Sei nun F von der speziellen Form $F(\lambda, x) = x - H(\lambda, x)$ wobei H eine stetige, kompakte Abbildung ist. Weiter sei $F(\lambda, 0) \equiv 0$ (wir "erwarten" stets die Lösung 0) und F sei auf einer Umgebung $I \times \Omega$ von $(\lambda_0, 0)$ definiert. Wir verwenden einen *lokalen Abbildungsgrad*: Ist x_0 eine Isolierte Lösung von $x = H(\lambda, x)$ so setzen wir $d(id - H(\lambda, \cdot), x_0) = d(id - H(\lambda, \cdot), U(x_0), 0)$, wobei $U(x_0)$ eine offene Umgebung von x_0 ist so daß x_0 die eindeutige Lösung von $x = H(\lambda, x)$ in $\overline{U(x_0)}$ ist. (Dies ist unabhängig von $U(x_0)$. Zeige nun:
Ist $(\lambda_0, 0)$ kein Bifurkationspunkt, so ist $d(I - H(\lambda, \cdot), x_0)$ in einer Umgebung von λ_0 definiert und konstant.
Ist umgekehrt $d(I - H(\lambda_1, \cdot), 0) \neq d(I - H(\lambda_2, \cdot), 0)$ so gibt es ein λ zwischen λ_1 und λ_2 so daß $(\lambda, 0)$ ein Bifurkationspunkt ist.
Hinweis: Verwende die Homotopieinvarianz von d für allgemeine Homotopien.

Lösung: Ist $(\lambda_0, 0)$ kein Bifurkationspunkt, so gibt es eine Umgebung $I \times U(0)$ von $(\lambda_0, 0)$, so daß $(\lambda, 0)$ die einzigen Lösungen von $F(\lambda, 0) = 0$ in $\overline{I \times U(0)}$ sind. Insbesondere gilt für die Homotopie $t \mapsto H(\lambda_0 + t(\lambda - \lambda_0), x) =: \tilde{H}(t, x)$, daß $0 \notin (id - \tilde{H}(t, \cdot))(\partial U(0))$ für $t \in [0, 1]$ und λ in I. Aus der Homotopieinvarianz folgt die Konstanz des Abbildungsgrades.
Gibt es keinen Bifurkationspunkt zwischen λ_1 und λ_2, so folgt mit dem ersten Teil, daß $d(id - H(\lambda, \cdot), 0)$ lokal konstant ist. Da der Abbildungsgrad jedoch ganzzahlige Werte annimmt, muss er auf dem ganzen Intervall $[\lambda_1, \lambda_2]$ konstant sein, ein Widerspruch.

R. Chill
M. Kunze
SS 2005

Lösungsvorschlag zu Nichtlinearen Funktionalanalysis Blatt 8

1. Zeige, daß die Einbettung von $H_0^1(\mathbb{R}^n)$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ nicht kompakt ist.
Hinweis: Betrachte eine feste Funktion zusammen mit geeigneten Translaten!

Lösung: Sei φ eine Testfunktion mit $\varphi(0) = 1$ und Träger in $B(0, 1)$ mit H^1-Norm 1. Betrachte sodann die Translate $\varphi_n := \varphi(\,\cdot + 2n)$. Dann ist $\|\varphi_n\| \equiv 1$. Da diese Funktionen jedoch paarweise disjunkten Träger haben, bilden sie ein Orthogonalsystem in L^2, insbesondere konvergieren sie schwach gegen 0. Somit kann diese Folge keine in L^2 konvergente Teilfolge haben, denn der Grenzwert einer solchen Teilfolge müsste Norm 1 haben, was aber der Tatsache $\varphi_n \rightharpoonup 0$ widerspricht.

2. Es sei H ein Hilbertraum, $u_n, u \in H$. Zeige, daß $u_n \to u$ genau dann, wenn $u_n \rightharpoonup u$ und $\|u_n\| \to \|u\|$.

Lösung: Angenommen $u_n \rightharpoonup u$ und $\|u_n\| \to \|u\|$. Dann ist

$$\|u_n - u\|^2 = \|u_n\|^2 - (u_n, u) - (u, u_n) + \|u\|^2 \to 0$$

Die umgekehrte Richtung ist klar.

3. Es sei $L > 0$. Finde alle $\lambda \in \mathbb{C}$ für die es ein nichttriviales $u \in H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L)$ gibt mit

$$\begin{cases} \lambda u - u'' &= 0 \\ u(0) = u(L) &= 0 \end{cases}$$

Lösung: Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung. Ein Fundamentalsystem ist gegeben durch $\{e^{\sqrt{\lambda}t}, e^{-\sqrt{\lambda}t}\}$. Eine allgemeine Lösung hat daher die Form $u(t) = \alpha e^{\sqrt{\lambda}t} + \beta e^{-\sqrt{\lambda}t}$. Die Bedingung $u(0) = 0$ liefert $\beta = -\alpha$, was wiederum auf die Gleichung $e^{\sqrt{\lambda}L} - e^{-\sqrt{\lambda}L} = 0$ führt. Weil die Exponentialfunktion $2\pi i$-periodisch ist folgt $2\sqrt{\lambda}L = 2k\pi i$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Beziehungsweise $\lambda = -\frac{k^2\pi^2}{L^2}$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Somit kommen nur diese λ in Frage. Für solche λ rechnet man aber leicht nach, daß $u(t) = \sin(\frac{k\pi}{L}t)$ eine Lösung ist.

4. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt.

(a) Zeige, daß $\lambda_1 := \inf\{\|\nabla u\|^2 : u \in H_0^1(\Omega), \|u\|_{L^2(\Omega)} = 1\}$ ein Minimum ist.
Hinweis: Beginne mit einer minimisierenden Folge. Wegen der Kompaktheit der Einbettung $H_0^1 \subset L^2$ konvergiert eine Teilfolge in L^2. Zeige sodann, daß der Grenzwert sogar in H_0^1 liegen muss und daß eine Teilfolge schwach in H_0^1 dagegen konvergiert. Folgere daraus die Behauptung. Man kann sogar (z.B. mit Aufgabe 2) zeigen, daß jede minimisierende Folge eine in H_0^1 konvergente Teilfolge besitzt.

Lösung: Sei u_n eine minimierende Folge. Dann ist u_n beschränkt in H_0^1. Somit gibt es eine Teilfolge (oBdA wieder u_n) die schwach in H_0^1 konvergiert, etwa gegen e (denn H_0^1 ist

als Hilbertraum reflexiv!). Da aber weiterhin die Einbettung von H_0^1 in L^2 kompakt ist, konvergiert diese Folge (nach Auswahl einer Teilfolge) in L^2. Beachte, daß der Grenzwert wiederum e sein muß (denn konvergiert u_n stark gegen v in L^2, so konvergiert u_n schwach gegen v in L^2. Da aber $H_0^1 \subset L^2$ ist folgt $L^{2'} \subset H_0^{1'}$ und daher konvergiert u_n schwach gegen e in L^2. Aus der Eindeutigkeit des schwachen Grenzwertes folgt nun $v = e$.) Insbesondere ist also $\|e\|_2 = 1$.
Weiterhin ist aber wegen der schwachen Konvergenz $\|\nabla e\| \leq \liminf \|\nabla u_n\| = \lambda_1$ (wobei man als Norm nach Poincaré-ungleichung die L^2-norm des Gradienten wählen kann). Daraus folgt, daß e ein Minimisierer ist.

(b) $(\star)$ Zeige, daß $\lambda_1 \in \sigma(-\Delta_\Omega^D)$.

Lösung: Folgt aus (c).

(c) $(\star)$ Zeige, daß jeder Minimierer e aus (a) in $D(\Delta_\Omega^D)$ liegt mit $-\Delta_\Omega^D e = \lambda_1 e$.

Hinweis: (b) und (c) sind Zusatzaufgaben, dementsprechend gibts auch keine Hinweise :-)

Lösung: Nach definition ist e ein Minimum des Funktionals $J(u) := \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_2^2}$ auf dem Raum $H_0^1(\Omega)$. Ist also $x \in H_0^1(\Omega)$, so besitzt die Funktion $f : t \mapsto J(e + tx)$ ein Minimum in $t = 0$. Folglich ist

$$\begin{aligned}
0 = f'(0) &= \left.\frac{\|e+tv\|^2 \Big(2(\nabla e, \nabla v) + 2t\|\nabla v\|^2\Big) - \Big(2(e,v) + 2t\|v\|^2\Big) \|\nabla e + t\nabla v\|^2}{\|e+tv\|^4}\right|_{t=0} \\
&= \frac{2\|e\|^2 \cdot (\nabla e, \nabla v) - 2\|\nabla e\| \cdot (e,v)}{\|e^4\|} \\
&= 2\|e\|^{-2} \left((\nabla e, \nabla v) - \lambda_1(e,v)\right)
\end{aligned}$$

Hieraus folgt, daß $(\nabla e, \nabla v) - \lambda_1(e,v)$ ist. Nach partieller Integration folgt daraus $(\lambda_1 e + \Delta e, v) = 0$. Da v beliebig war folgt die Behauptung!

Universität Ulm
Abteilung Angewandte Analysis

R. Chill
M. Kunze
SS 2005

Lösungsvorschlag zu Nichtlinearen Funktionalanalysis Blatt 9

1. Zeige, daß der negative p-Laplaceoperator $-\Delta_p : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$ monoton ist.

Lösung: Seien $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Dann ist

$$\begin{aligned} \langle -\Delta_p u + \Delta_p v, u - v\rangle &= \int_\Omega (|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v)(\nabla u - \nabla v) \\ &\geq \int_\Omega |\nabla u|^p - |\nabla u|^{p-1}|\nabla v| - |\nabla v|^{p-1}|\nabla u| + |\nabla v|^p \\ &= \int_\Omega (|\nabla u|^{p-1} - |\nabla v|^{p-1}) \cdot (|\nabla u| - |\nabla v|) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

da die Funktion $t \mapsto t^{p-1}$ monoton wachsend auf $\mathbb{R}$ ist.

2. Monotone mehrwertige Operatoren auf $\mathbb{R}$

Man kann den Begriff des Monotonen Operators aus der Vorlesung auf *mehrwertige* Operatoren verallgemeinern:
Sei V ein Banachraum. Ein *monotoner Operator* auf V ist eine Abbildung $A : V \to 2^{V'} = \mathcal{P}(V')$, so daß für alle $u, v \in V$ und alle $\hat{u} \in Au$ und alle $\hat{v} \in Av$ stets $\langle \hat{u} - \hat{v}, u - v\rangle \geq 0$ gilt.
Sei nun $V = \mathbb{R}$.

(a) Zeige, daß der Operator $A : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ definiert durch

$$A(x) = \begin{cases} \{-1\} & \text{, falls } x < 0 \\ [-1, 1] & \text{, falls } x = 0 \\ \{1\} & \text{, falls } x > 0 \end{cases}$$

monoton ist.

(b) Charakterisiere alle monotonen Operatoren auf $\mathbb{R}$.

Lösung: Ein Operator $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist genau dann monoton, wenn für alle $u, v \in \mathbb{R}$ und alle $\hat{u} \in Au, \hat{v} \in Av$ aus $u \leq v$ stets $\hat{u} \leq \hat{v}$ folgt.
Dies folgt aus der Gleichheit

$$\langle \hat{u} - \hat{v}, u - v\rangle = (\hat{u} - \hat{v}) \cdot (u - v)$$

3. Gradienten
Sei X ein Banachraum, $\varphi : X \to \mathbb{R}$ konvex und stetig differenzierbar. Zeige, daß die Ableitung $\partial\varphi = \varphi' : X \to X'$ monoton ist.
Hinweis: Betrachte für $u, v \in X$ die Funktion $t \mapsto \varphi(u + t(v - u))$.

Lösung: Ist φ konvex, so ist insbesondere für feste $u, v \in X$ die Funktion $f : t \mapsto \varphi(u+t(v-u))$ konvex auf $\mathbb{R}$. Daraus folgt, daß die Ableitung dieser Funktion monoton wachsend ist. Also gilt:

$$f'(1) = \langle \partial\varphi(v), v-u \rangle \geq f'(0) = \langle \partial\varphi(u), v-u \rangle \,.$$

Daraus folgt die Behauptung.

Universität Ulm
Abteilung Angewandte Analysis

R. Chill
M. Kunze
SS 2005

Lösungsvorschlag zu Nichtlinearen Funktionalanalysis Blatt 10

1. Galerkin-Methode zum Lösen partieller Differentialgleichungen
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen. Wir möchten gerne die partielle Differentialgleichung

$$\begin{cases} -\Delta u &= f \\ u\big|_{\partial\Omega} &= 0 \end{cases}$$

lösen. Dabei gehen wir wie im Beweis des Satzes über die Surjektivität monotoner Operatoren vor: Wir betrachten Δ als Dirichlet Laplace Operator auf $H^{-1}(\Omega)$, d.h. $\Delta = \operatorname{div}(\nabla\cdot)$ und $f \in H^{-1}(\Omega)$.

(a) Zeige, daß das Auffinden der Funktionen u_m im Beweis des Satzes äquivalent dazu ist, ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ zu lösen. (Dabei stehen in x die Koordinaten von u_m bezüglich der Basis $w_1, \dots w_m$ von V_m.) Wie sehen A und b aus?

Lösung: Die Funktion $u_m \in V_m = \operatorname{span}\{w_1, \dots, w_m\}$ ist durch die Gleichungen

$$\langle -\Delta u_m, w_k \rangle = \langle f, w_k \rangle \quad \text{für} \quad 1 \le k \le m$$

bestimmt. Beachte, daß diese Gleichung nach Vereinbarund zu lesen ist als

$$(-\Delta u_m, w_k) = \langle f, w_k \rangle \quad \text{für} \quad 1 \le k \le m$$

wobei $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ das L^2-skalarprodukt bezeichnet. Macht man nun den Ansatz $u_m = \sum x_k w_k$ so ergibt sich aus der linearität des Skalarproduktes und mit partieller Integration

$$\sum (\nabla w_j, \nabla w_k) x_j = (f, w_k) \quad \text{für} \quad 1 \le k \le m$$

Dies ist ein Lineares Gleichungssystem $Ax = b$ wobei $A = (a_{jk}) = ((w_j, w_k))$ und $b = (\langle f, w_k \rangle)$ ist.

(b) Nach dem Beweis in der Vorlesung gibt es eine Teilfolge u_{m_k} von u_m so daß $u_{m_k} \rightharpoonup u$, $-\Delta u_{m_k} \rightharpoonup f$ und $-\Delta u = f$. Zeige, daß sogar schon die ganze Folge $u_m \to u$ und daß die Abschätzung $\lambda_1 \|u_m - u\| \le \| - \Delta u_m - f\|$ gilt.
Hinweis: Verwende zunächst ein Standardargument, um die schwache Konvergenz für die ganze Folge zu zeigen. Verwende sodann die Poincaré-Ungleichung.

Lösung: Nach Poincaré-Ungleichung (bzw. einer Variante von ihr in $L^2(\Omega)$) ist

$$\lambda_1 \|u\|_2^2 \le \|\nabla u\|_2^2 = \int_\Omega -\Delta u \cdot u = \langle -\Delta u, u \rangle$$

und daher ist der Laplaceoperator streng monoton und somit injektiv. Wie in der Vorlesung gilt daher:
Jede Teilfolge von u_m besitzt eine Teilfolge so daß die in der Aufgabe genannten schwachen Konvergenzen gelten. Wegen der Injektivität müssen aber die Grenzwerte übereinstimmen und daher konvergiert die gesamte Folge schwach gegen die eindeutige Lösung.

Nun beachte:

$$\begin{array}{rcl}\lambda_1\|u_m-u\|^2 & \leq & \|\nabla u_m-\nabla u\|^2\\ & = & (-\Delta u_m-(-\Delta)u, u_m-u)\\ & = & (-\Delta u_m, u_m)-(-\Delta u_m, u)-(-\Delta u, u_m-u)\\ & = & \langle f, u_m\rangle-\langle-\Delta u_m, u\rangle-(-\Delta u, u_m-u)\\ & \to & \langle f, u\rangle-\langle f, u\rangle-0\end{array}$$

wegen der schwachen Konvergenzen und der Tatsache, daß $(-\Delta u_m, u_m)=\langle b, u_m\rangle$ was wegen der Definition von u_m gilt. Hieraus folgt die Normkonvergenz. Die Abschätzung folgt aus

$$\lambda_1\|u_m-u\|^2\leq(-\Delta u_m-f, u_m-u)\leq\|-\Delta u_m-f\|\cdot\|u_m-u\|$$

2. Nemytskii-Operatoren

Es sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ offen. Es sei eine Funktion $f:\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gegeben, die die folgenden *Carathéodory-Bedingungen* erfüllt:

1. Die Abbildung $x\mapsto f(x,r)$ ist für jedes $r\in\mathbb{R}$ meßbar
2. Die Abbildung $r\mapsto f(x,r)$ ist für jedes $x\in\Omega$ stetig

(a) Nun sei weiter vorausgesetzt, daß für zwei Indices $p,q\in(1,\infty)$ und eine Funktion $k\in L^q(\Omega)$ die Abschätzung

$$|f(x,r)|\leq c\cdot|r|^{\frac{p}{q}}+k(x)\quad\text{für fast alle } x\in\Omega\quad\text{und alle } r\in\mathbb{R}$$

gilt. Zeige, daß der *Nemytskii*-Operator

$$\begin{array}{rcl}F:L^p(\Omega) & \to & L^q(\Omega)\\ u & \mapsto & [x\mapsto f(x,u(x))]\end{array}$$

wohldefiniert, beschränkt und stetig ist.

Lösung: Zunäst zeigen wir, daß $F(u)$ meßbar ist:
Ist nämlich u der punktweise Grenzwert einfacher Funktionen u_n, so ist $F(u)=f(x,u(x))=\lim f(x,u_n(x))$ wegen der Stetigkeit von f in der zweiten Koordinate. Wenn aber mit u_n einfach ist, so ist $f(x,u_n(x))$ meßbar (Es ist nämlich $f(x,\sum a_k\mathbb{1}_{A_k})=\sum f(x,a_k)\mathbb{1}_{A_k}$ und das ist eine Summe von meßbaren Funktionen.) Somit ist $F(u)$ als punktweiser Grenzwert meßbarer Funktionen meßbar.
Nun beachte, daß

$$F(u)(x)=|f(x,u(x))|\leq c|u(x)|^{\frac{p}{q}}+k(x)\quad\text{f.ü.}$$

so daß $F(u)$ q-integrierbar ist (weil u p-integrierbar ist!). Integration liefert $\|F(u)\|_q^q\leq c^q\cdot\|u\|_p^p+\|k\|_q^q$ und daher ist F beschränkt. Sei nun eine Folge $u_n\to u$ in L^p gegeben. Dann gilt $u_n(x)\to u(x)$ fast überall nach Auswahl einer Teilfolge und weiterhin kann $|u_n|$ durch eine Funktion $g\in L^p$ majorisiert werden. Wegen der Stetigkeit von f folgt, daß $F(u_n)\to F(u)$ fast überall. Außerdem gilt nach obiger Ungleichung $|F(u_n)|\leq c^q\cdot|g|^{\frac{p}{q}}+k$ so daß die Folge $f(u_n)$ durch eine q-integrierbare Funktion majorisiert ist. Aus dem Satz über die majorisierte Konvergenz folgt nun $F(u_n)\to F(u)$ in L^q und daher ist F stetig.

(b) Sei nun $q=p'$ vorausgesetzt, so daß F wie oben definiert einen Operator von L^p nach $(L^p)'$ darstellt.

(i) Zeige daß F (strikt) monoton ist, falls f (strikt) monoton in der zweiten Komponente ist , d.h. $f(x,r) \leq f(x,s)$ (bzw. $<$) für alle $r < s$ und fast alle $x \in \Omega$.

Lösung: Es ist

$$\langle F(u) - F(v), u - v \rangle = \int_\Omega (f(x,u(x)) - f(x,v(x)) \cdot (u(x) - v(x))\, dx\,.$$

Aus der Voraussetzung folgt, daß der Integrand fast sicher positiv ist, also ist also ist F monoton. Ist f sogar strikt monoton in der zweiten Komponente, so ist der Integrand strikt positiv, wenn $u(x) \neq v(x)$. Da nach dem ersten Teil der Integrand fast überall nichtnegativ ist, kann also $\langle F(u) - F(v), u - v \rangle = 0$ nur vorkommen, wenn der Integrand fast überall 0 ist woraus mit der strikten Monotonie von f folgt, daß $u = v$ fast überall. Somit ist F strikt monoton.

(ii) Zeige, daß F koerziv ist, falls $rf(x,r) \geq d|r|^p + g(x)$ für alle $(x,r) \in \Omega \times \mathbb{R}$, eine Konstante $d > 0$ und eine Funktion $g \in L^1(\Omega)$.

Lösung: Es ist

$$\langle F(u), u \rangle = \int_\Omega f(x,u(x)) \cdot u(x)\, dx \geq \int_\Omega d|u(x)|^p + g(x)\, dx = d\|u\|_p^p + \|g\|_1\,.$$

und daher gilt

$$\frac{\langle F(u), u \rangle}{\|u\|} \geq d\|u\|^{p-1} + \frac{\|g\|_1}{\|u\|} \to \infty \quad \text{für } \|u\| \to \infty\,.$$

Somit ist F koerziv.

Universität Ulm
Abteilung Angewandte Analysis

R. Chill
M. Kunze
SS 2005

Lösungsvorschlag zu Nichtlinearen Funktionalanalysis Blatt 11

1. Wir betrachten den Banachraum c_0 aller Nullfolgen (Beachte: $c_0' = \ell^1$). Definiere $f : [0,1] \to c_0$ durch $f(t) = (n\mathbb{1}_{(0,\frac{1}{n})}(t))_{n\in\mathbb{N}}$.

(a) Zeige, daß f meßbar ist.

Lösung: Sei $x' = (x_n) \in \ell^1$. Dann ist $\langle x', f(t)\rangle = \sum_n nx_n\mathbb{1}_{(0,\frac{1}{n})}(t)$ und das ist eine meßbare Funktion. Da c_0 separabel ist, folgt die Meßbarkeit von f aus Petti's Theorem.

(b) Zeige, daß $\langle x', f\rangle$ für jedes $x' \in \ell^1$ integrierbar ist, f aber nicht Bochner-integrierbar ist.

Lösung: Es ist

$$\int_0^1 |\langle x', f(t)\rangle|\, dt \le \sum_n n \cdot \frac{1}{n} x_n = \|x'\| < \infty\,.$$

Aber es ist $\|f(t)\| = \sum_n n\mathbb{1}_{(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n})}$ und das ist nicht integrierbar auf $[0,1]$. Somit ist f nicht integrierbar.

2. Zeige, daß die Funktion $f : [0,1] \to L^\infty(0,1), f(t) = \mathbb{1}_[0,t]$ nicht meßbar ist.

Lösung: Es ist $\|f(t) - f(s)\| \equiv 1$ für $t \neq s$. Daher ist f nicht (fast) separabelwertig und somit nach Petti's Theorem nicht meßbar.

3. Dominierte Konvergenz

Es sei (f_n) eine Folge von integrierbaren Funktionen. Es gebe eine integrierbare Funktion $g : \Omega \to \mathbb{R}$ und eine messbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ so, daß $\|f_n\| \le g$ und $f_n \to f$ fast überall. Zeige, daß

$$\int_\Omega f\, d\mu = \lim \int_\Omega f_n\, d\mu$$

Lösung: Definiere $h_n(t) := \|f(t) - f_n(t)\|$. Dann ist $h_n \le 2g$ und $h_n \to 0$ fast überall. Der skalare Satz über die dominierte Konvergenz liefert nun $\int h_n\, d\mu \to 0$. Beachte nun, daß f integrierbar ist (denn $\|f(t)\| = \lim \|h_n(t)\| \le g$ fast überall.) Nun ist

$$\| \textstyle\int f\, d\mu - \int f_n\, d\mu\| \le \displaystyle\int h_n\, d\mu \to 0$$

4. Hölderungleichung

Sei X ein Banachraum mit Dual X'. Sei $f \in L^p(\Omega, X)$ und $g \in L^{p'}(\Omega, X')$, wobei $p^{-1} + p'^{-1} = 1$. Zeige, daß die Funktion $t \mapsto \langle f(t), g(t)\rangle$ integrierbar ist mit

$$\int_\Omega |\langle f(t), g(t)\rangle|\, d\mu(t) \le \|f\|_p \|g\|_{p'}$$

Lösung: Weil f und g meßbar sind, gibt es einfache Funktionen f_n, g_n die gegen f, g fast überall konvergieren. Nun ist aber $\langle f_n, g_n \rangle$ eine einfache Funktion, die fast überall gegen $\langle f, g \rangle$ konvergiert. somit ist $\langle f, g \rangle$ meßbar.
Weiter ist $|\langle f(t), g(t) \rangle| \leq \|f(t)\|_p \cdot \|g(t)\|_{p'}$ für jedes t. Mittels integration und der klassischen Hölderungleichung (angewandt auf die L^p-Funktion $\|f(t)\|_p$ und die $L^{p'}$-Funktion $\|g(t)\|_{p'}$) folgt die Behauptung.

R. Chill
M. Kunze
SS 2005

Lösungsvorschlag zu Nichtlinearen Funktionalanalysis Blatt 12

1. Es sei $V \hookrightarrow H \simeq H' \hookrightarrow V'$ ein "Evolutionstripel". Weiter sei $A : V \to V'$ gegeben mit

(i) $\|Au\|_{V'} \leq C\|u\|_V^{p-1}$

(ii) $\langle Au, u\rangle \geq \alpha\|u\|^p$.

Ausserdem sei eine Lipschitz-stetige Funktion $F : H \to H$ mit $F(0) = 0$ gegeben. Wir betrachten das Problem

$$(P)\begin{cases} \dot u + Au + F(u) &= f \\ u(0) &= u_0 \\ u &\in W^{1,p'}(0,\tau,V') \cap L^p(0,\tau,V) \end{cases},$$

wobei $f \in L^{p'}(0,\tau,V')$ und $u_0 \in H$.

(a) Zeige, daß (P) höchstens eine Lösung besitzt.

Lösung: Sind u, v zwei Lösungen von (P) so ist $u(0) - v(0) = 0$ und ausserdem ist

$$\dot u(t) - \dot v(t) + Au(t) - Av(t) + F(u(t)) - F(v(t)) = 0$$

für alle t. Multipliziert man dies mit $u(t) - v(t)$ so erhält man

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\|u(t) - v(t)\|_H^2 + \langle Au(t) - Av(t), u(t) - v(t)\rangle + \langle F(u(t)) - F(v(t)), u(t) - v(t)\rangle = 0$$

beziehungsweise mit der Monotonie von A und unter der Verwendung der Lipschitz-stetigkeit von F:

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\|u(t) - v(t)\|_H^2 \leq L\|u(t) - v(t)\|_H^2$$

oder nach Integration:

$$\frac{1}{2}\|u(t) - v(t)\|_H^2 \leq \frac{1}{2}\|u(0) - v(0)\|_H^2 + L\int_0^t \|u(s) - v(s)\|_H^2\, ds\,.$$

Hieraus folgt mit dem Gronwall-Lemma $\|u(t) - v(t)\|_H^2 \leq \|u(0) - v(0)\|_H^2 e^{Lt} \equiv 0$ und somit die Eindeutigkeit.

(b) Zeige, daß falls eine Lösung u von (P) existiert, eine Energieabschätzung der Form

$$\|u\|_{L^\infty(0,\tau,H)} + \|u\|_{L^p(0,\tau,V)} \leq C$$

gilt, wobei die Konstante C nur von $\|f\|_{p'}, \|u_0\|_H, \tau, \alpha$ und der Lipschitzkonstante L von F abhängt.

Lösung: Sei u eine Lösung von (P). Multipliziert man die obige Gleichung mit u, so erhält man:

$$\begin{aligned}
\langle \dot{u}(t), u(t)\rangle + \langle Au(t), u(t)\rangle + \langle F(u(t), u(t)\rangle &= \langle f(t), u(t)\rangle \\
\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\|u(t)\|_H^2 + \alpha\|u(t)\|_V^p &\leq \langle f(t), u(t)\rangle + L\|u(t)\|_H^2 \\
\Rightarrow \frac{1}{2}\|u(t)\| + \alpha\int_0^t \|u(s)\|_V^p\, ds &\leq \frac{1}{2}\|u_0\|_H^2 + c_\varepsilon\|f\|_{p'}^{p'} + \varepsilon\|u\|_p^p + L\int_0^T \|u(s)\|_H^2\, ds \\
\Rightarrow \frac{1}{2}\|u(t)\|_H^2 + \frac{\alpha}{2}\int_0^t \|u(s)\|_V^p\, ds &\leq \|u_0\|_H^2 + c_\varepsilon\|f\|_{p'}^{p'} + L\int_0^t \|u(s)\|_H^2\, ds \\
&=: C_1 + L\int_0^t \|u(s)\|_H^2\, ds
\end{aligned}$$

Wobei die Konstante C_1 nur von $\alpha, \|f\|, \|u_0\|$ und τ abhängt. Aus dem Gronwall-Lemma folgt $\|u\|_\infty^2 \leq C_1 e^{L\tau} =: C_2$. Setzt man dies nun wieder in obige Gleichung ein, so erhält man:

$$\|u\|_p \leq \frac{2}{\alpha}(C_1 + L\tau C_2) =: C_3$$

und somit ist insgesamt gezeigt, daß

$$\|u\|_{L^\infty(0,\tau,H)} + \|u\|_{L^p(0,\tau,V)} \leq C$$

wobei $C := C_2 + C_3$ und diese Konstante hängt nur von den Größen wie in der Aufgabe behauptet ab. **Hinweis:** Inspiziere den Beweis in der Vorlesung und verwende das Lemma von Gronwall:
$\varphi(t) \leq c_1 + c_2\int_0^t \varphi(s)\, ds \;\; \forall t \in [0, \tau] \;\; \Rightarrow \;\; \varphi(t) \leq c_1 e^{c_2 t}$.

2. Untersuche folgende Anfangswertprobleme auf $V = H = V' = \mathbb{R}$ auf eindeutige Lösbarkeit:

(a)

$$\begin{cases} \dot{u} &= \operatorname{sgn}(u)\sqrt{|u|} \\ u(0) &= 0 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} \dot{u} &= -\operatorname{sgn}(u)\sqrt{|u|} \\ u(0) &= 0 \end{cases}$$