Universität Ulm
Abteilung Angewandte Analysis

R. Chill
M. Kunze
SS 2005

Übungen zur Nichtlinearen Funktionalanalysis — Blatt 1

1. Es seien $X_1, \ldots, X_n, Y$ Banachräume und $T : X_1 \times \cdots \times X_n \to Y$ n-linear. Zeige, daß T genau dann stetig ist, falls es eine Konstante $C \geq 0$ gibt, so daß

$$\|Tx\| \leq C \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|_{X_i} \quad , \quad \forall\, x = (x_i) \in X_1 \times \cdots \times X_n$$

(5 P)

2. Zeige, daß der Raum $L^{(2)}(X_1 \times X_2, Y)$ der stetigen bilinearen Abbildungen von $X_1 \times X_2$ ausgestattet mit der Norm

$$\|T\| = \sup \left\{ \|Tx\| \;:\; \|x\| := \sup_i \|x_i\| = 1 \right\}$$

isometrisch isomorph zu $L(X_1, L(X_2, Y)\,)$ ist.

Bemerkung: Dies kann man natürlich auch für n-lineare Abbildungen machen. Insbesondere erhält man z.B. $L^{(n)}(X^n, Y) \simeq L(X, L^{(n-1)}(X^{n-1}, Y)\,)$ so daß man die n-te Ableitung einer Funktion $f : X \to Y$ als n-lineare Abbildung auf X^n betrachten kann.

(5 P)

3. Untersuche folgende Abbildungen auf Differenzierbarkeit und berechne wo möglich die Ableitung:

(a) $\Phi : L^2(0,1) \to L^1(0,1) \;:\; \Phi(f) := f^2$.

(b) $\varphi : C[0,1] \to \mathbb{R} \;:\; \varphi(f) := \int_0^1 \sin(f(t))\, dt$.

(c) $F : U \to C[0,1] \;:\; F(f) := \frac{1}{f}$, wobei $U = \{f \in C[0,1] \;:\; f(t) \neq 0 \,\forall\, t \in [0,1]\}$.

(10 P)

Universität Ulm
Abteilung Angewandte Analysis

R. Chill
M. Kunze
SS 2005

Übungen zur Nichtlinearen Funktionalanalysis

Blatt 2

1. Diskutiere den Zusammenhang zwischen der Differenzierbarkeit einer Abbildung F zwischen zwei komplexen Banachräumen und der Differenzierbarkeit der gleichen Abbildung, wenn sie als Abbildung zwischen reellen Banachräumen aufgefasst wird.
Beachte: Jeder komplexe Banachraum kann in natürlicher Weise als reeller Banachraum aufgefasst werden. (M)

2. Satz über inverse Funktionen
Folgere den Satz über die lokale Inverse aus dem Satz über implizite Funktionen. (6 P)

3. Es sei $X = C[0,1]$. Für $y \in X$ suchen wir eine Lösung $x \in X$ der Integralgleichung

$$x(t) + t\int_0^1 x(s)^2\,ds = y(t)\,.$$

Zeige, daß es eine Umgebung U von $y_0 = 0$ gibt, so daß diese Gleichung für jedes $y \in U$ eine Lösung $x = Ly$ besitzt. Zeige weiter, daß der Lösungsoperator L stetig differenzierbar ist. (6 P)

4. Notwendige Bedingung für lokale Extrema

(a) Es sei X ein reeller Banachraum, $U \subset X$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeige: Besitzt f an der Stelle $x_0 \in U$ ein lokales Extremum, so ist $f'(x_0) = 0$.

(b) Finde alle möglichen lokalen Extrema des Funktionals $\varphi : C[0,1] \to \mathbb{R}$ wobei $\varphi(f) = \int_0^1 (3f^3(t) - e^t f(t)\,)\,dt$. (8 P)

UNIVERSITÄT ULM
Abteilung Angewandte Analysis

R. Chill
M. Kunze
SS 2005

Übungen zur Nichtlinearen Funktionalanalysis — Blatt 3

1. Approximation von Eigenwerten und Eigenvektoren
Es sei H ein reeller Hilbertraum und A ein selbstadjungierter Operator. Wir möchten einen Einheitsvektor x mit $Ax = \lambda x$ finden. Wir gehen wie folgt vor:
Sei $X := H \times \mathbb{R}$ mit der Norm $\|(x,\lambda)\| = \|x\|_H + |\lambda|$ und definiere

$$F_A(x,\lambda) = (Ax - \lambda x, \|x\|^2 - 1)\,.$$

Dann ist λ ein Eigenwert von A mit normiertem Eigenvektor x genau dann, wenn (x,λ) Nullstelle von F_A ist.

(a) Zeige, daß F überall differenzierbar ist mit Lipschitzstetiger Ableitung.

(b) Ist $F_A^{'}(x,\lambda)$ stets invertierbar wenn (x,λ) Nullstelle von F_A ist? Falls nicht, so finde für den Fall daß $\dim H < \infty$ (wobei A durch die darstellende Matrix gegeben ist) eine notwendige Bedingung dafür, daß $F^{'}(x,\lambda)$ für eine Nullstelle (x,λ) invertierbar ist.

(c) Implementiere das Newtonverfahren (z.B. in Maple) um Nullstellen von F_A für

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

zu bestimmen.

2. Eigenschaften des Abbildungsgrades
Nimm an, es gibt einen Abbildungsgrad $d : M \to \mathbb{Z}$.

(a) Zeige, daß d folgende Eigenschaften besitzt:

(d4) $d(f,\emptyset,y) = 0$,

(d5) Ist $f^{-1}(\{y\}) = \emptyset$, so folgt $d(f,\Omega,y) = 0$,

(d5$'$) Ist $d(f,\Omega,y) \neq 0$ so gibt es ein $x \in \Omega$ mit $f(x) = y$.

(b) Es sei $\Omega = (-1,1)\,,\ f(x) = x^2$ und $y \neq 1$. Zeige, daß $d(f,\Omega,y) = 0$.
Hinweis: Betrachte die Homotopie $h(t,x) = (1-t)f(x) + t$.

3. Satz von Perron-Frobenius
Sei $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ eine positive Matrix (d.h. $a_{i,j} \geq 0$). Zeige, daß es ein $\lambda \geq 0$ und ein positives $x \in \mathbb{R}^N$ gibt (d.h. $x_i \geq 0$) mit $Ax = \lambda x$.
Hinweis: Falls $Ax \neq 0$ für alle $x \geq 0$ mit $x \neq 0$, so betrachte $C := \{x \in \mathbb{R}^N \,:\, x \geq 0\,,\ \sum x_i = \|x\|_1 = 1\}$ und $f : C \to C$ definiert durch $f(x) = \|Ax\|_1^{-1} Ax$.

Universität Ulm
Abteilung Angewandte Analysis

R. Chill
M. Kunze
SS 2005

Übungen zur Nichtlinearen Funktionalanalysis

Blatt 4

1. Bestimme $d(f, \Omega, 0)$, wobei $\Omega = (-1, 1)$ und $f(x) = -x$ ist.

2. Zeige, daß das Gleichungssystem

$$\begin{cases} 2x + y + \sin(x + y) & = & 0 \\ x - 2y + \cos(x + y) & = & 0 \end{cases}$$

eine Lösung in $B(0, r)$ besitzt. Versuche r so klein wie möglich zu wählen.

R. Chill
M. Kunze
SS 2005

Übungen zur Nichtlinearen Funktionalanalysis

Blatt 5

1. Lösungen periodischer Probleme nach Poincaré

Es seien $f \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und $T > 0$ mit

- $f(t,x) = f(t+T,x)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und alle $x \in \mathbb{R}^n$
- Es gibt ein $r > 0$, so daß $(f(t,x),x) < 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und alle x mit $\|x\| = r$.

Zeige: Es gibt eine T-periodische Lösung von

$$y' = f(t,y)\,.$$

Hinweis: Zeige zunächst, daß das Anfangswertproblem $y' = f(t,y)$ $y(0) = y_0$ für jedes $y_0 \in \overline{B(0,r)}$ eine globale (d.h. für $t \geq 0$ definierte) Lösung y besitzt, die ganz in $\overline{B(0,r)}$ verläuft (Um das zu zeigen, multipliziere die Differentialgleichung skalar mit $y(t)$). Betrachte dann die *Poincaré*-Abbildung $g : \overline{B(0,r)} \to \overline{B(0,r)}$ definiert durch $g(y_0) = y(T)$, wobei y die Lösung des Anfangswertproblems zum Anfangswert $y(0) = y_0$ ist.

2. Satz vom Schinken-Käse Sandwich

Wir betrachten ein leckeres Schinken-Käse Sandwich $\mathcal{SK}$, bestehend aus zwei Scheiben Brot Ω_1, einer (relativ dicken) Scheibe Schinken Ω_2 und etwas Schweizer Käse Ω_3, wobei $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ jeweils die Lage der entsprechenden Zutat im Raum wiedergibt. Zeige nun, daß es möglich ist, dieses Sandwich mit einem einzigen (gerade ausgeführten) Schnitt zu halbieren.

Für besonders Hungrige betrachten wir gleich n-dimensionale Sandwichs (was einem natürlich ermöglicht auch noch Salami und andere Zutaten daraufzutun!):

Es seien n beschränkte, meßbare Mengen $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$ in $\mathbb{R}^n$ gegeben. Zeige, daß es eine Hyperebene in $\mathbb{R}^n$ gibt, die alle n Mengen in zwei Teile gleichen Volumens teilt. Gehe dabei wie folgt vor:

(a) Für $x \in S^n = \partial B(0,1)$ (hier ist $B(0,1) \subset \mathbb{R}^{n+1}$) sei $H_x := \{y \in \mathbb{R}^{n+1} : (y,x) = x_{n+1}\}$. Dies ist die zu x senkrechte, affine Hyperebene des $\mathbb{R}^{n+1}$ durch den Nordpol von S^n (Der Nordpol ist der Punkt $\mathcal{N} = (0,\ldots,0,1)$. Skizze!). Sei weiter $H_x^+ := \{y \in \mathbb{R}^{n+1} : (y,x) \geq x_{n+1}\}$.
Sei nun $A \subset \mathbb{R}^n$ meßbar und beschränkt und $f_A(x) := \lambda_n(A \cap H_x^+)$, wobei λ_n das n-dimensionale Lebesguemaß ist und wir Teilmengen B des $\mathbb{R}^n$ mit $B \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ identifizieren. Es ist also $A \cap H_x^+ = \{y \in A : ((y,0),x) \geq x_{n+1}\}$. Zeige, daß f stetig von $x \in S^n$ abhängt.

(b) Zeige, daß die Menge $H_x \cap \mathbb{R}^n$ für $x \neq \mathcal{N}$ eine Hyperebene im $\mathbb{R}^n$ ist. Betrachte nun die Funktion $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ gegeben durch $f = (f_{\Omega_1}, \ldots, f_{\Omega_n})$. Zeige, daß $H_x \cap \mathbb{R}^n$ genau dann alle Mengen Ω_i halbiert, wenn $f(x) = f(-x)$ gilt.

(c) Zeige mit dem Satz von Borsuk-Ulam, daß eine solche Hyperebene $H_x \cap \mathbb{R}^n$ existiert.

(d) (Zusatzaufgabe für besonders Interessierte) Bringe ein Schinken-Käse Sandwich und eine dazu passende Hyperebene, die das Sandwich halbiert, mit in die Übung. Extrapunkte gibt es für Salat, Tomaten und Zwiebeln und etwas Senf.

UNIVERSITÄT ULM
Abteilung Angewandte Analysis

R. Chill
M. Kunze
SS 2005

Übungen zur Nichtlinearen Funktionalanalysis Blatt 6

1. Schaeferscher Fixpunktsatz

(a) Sei X ein Banachraum und $F : X \to X$ kompakt und stetig. Betrachte die Schaefermenge $\mathcal{S} := \{x \in X : \exists\, \alpha \in (0,1) \text{ mit } x = \alpha T(x)\}$.
Zeige: Ist $\mathcal{S}$ beschränkt, so besitzt T einen Fixpunkt.
Hinweis: Ist $\mathcal{S} \subset B(0,R)$, so zeige, daß $d(I - F, B(0,R), 0) = 1$ (falls der Abbildungsgrad exisitert). Betrachte dazu die Homotopie $H(t,x) = tF(x)$. Was ist, wenn $d(I - F, B(0,R), 0)$ nicht existiert?

(b) Betrachte die Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $F(x) = \sqrt{1 + x^2}$. Zeige, daß die zu T gehörende Schäfermenge unbeschränkt ist und daß T keinen Fixpunkt besitzt.

2. Eigenwerte kompakter Funktionen

(a) Es sei X ein Banachraum und $\Omega \subset X$ beschränkt und offen. Seien T, S kompakte Störungen der Identität auf Ω , d.h. es gibt kompakte stetige Funktionen F, G , so daß $T(x) = x - F(x)$ und $S(x) = x - G(x)$. Sei weiter $T(x) \neq 0$ und $S(x) \neq 0$ auf $\partial\Omega$. Zeige: Ist $d(I - F, \Omega, 0) \neq d(I - G, \Omega, 0)$, so gibt es ein $x \in \partial\Omega$ und ein $\lambda < 0$ mit $T(x) = \lambda S(x)$.

(b) Sei nun $\Omega \subset X$ eine Teilmenge, die Null enthält und $T : \overline{\Omega} \to X$ stetig mit $0 \notin T(\partial\Omega)$.

(i) Zeige: Ist $X = \mathbb{R}^n$ wobei n ungerade ist, so gibt es $x \in \partial\Omega$ und $\lambda \neq 0$ mit $T(x) = \lambda x$.

(ii) Zeige: Ist $\dim X = \infty$ und T zusätzlich kompakt mit $\inf_{x \in \partial\Omega} \|T(x)\| > 0$, so gibt es ein reelles $\lambda \neq 0$ und ein $x \in \partial\Omega$ mit $T(x) = \lambda x$.
Hinweis: Approximiere T durch Funktionen T_n, die Werte in einem endlichdimensionalen Unterraum *ungerader* Dimension annehmen und verwende (i)

UNIVERSITÄT ULM
Abteilung Angewandte Analysis

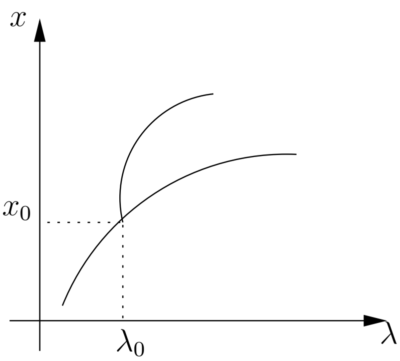
R. Chill
M. Kunze
SS 2005

Übungen zur Nichtlinearen Funktionalanalysis

Blatt 7

1. Bifurkation von Lösungen

Wir betrachten ein parameterabhängiges Problem $F(\lambda, x) = 0$. Hierbei ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Parameter und x wird in einem Banachraum X gesucht. Wir nennen nun (λ_0, x_0) einen Bifurkationspunkt dieses Problems, wenn (1) (λ_0, x_0) eine Lösung ist, also $F(\lambda_0, x_0) = 0$ und (2) es zwei Folgen (λ_n, x_n) und (λ_n, y_n) von Lösungen mit $x_n \neq y_n$ für alle n gibt, die gegen (λ_0, x_0) konvergieren.



Sei nun F von der speziellen Form $F(\lambda, x) = x - H(\lambda, x)$ wobei H eine stetige, kompakte Abbildung ist. Weiter sei $F(\lambda, 0) \equiv 0$ (wir "erwarten" stets die Lösung 0) und F sei auf einer Umgebung $I \times \Omega$ von $(\lambda_0, 0)$ definiert. Wir verwenden einen *lokalen Abbildungsgrad*: Ist x_0 eine Isolierte Lösung von $x = H(\lambda, x)$ so setzen wir $d(id - H(\lambda, \cdot), x_0) = d(id - H(\lambda, \cdot), U(x_0), 0)$, wobei $U(x_0)$ eine offene Umgebung von x_0 ist so daß x_0 die eindeutige Lösung von $x = H(\lambda, x)$ in $\overline{U(x_0)}$ ist. (Dies ist unabhängig von $U(x_0)$. Zeige nun:
Ist $(\lambda_0, 0)$ kein Bifurkationspunkt, so ist $d(I - H(\lambda, \cdot), x_0)$ in einer Umgebung von λ_0 definiert und konstant.
Ist umgekehrt $d(I - H(\lambda_1, \cdot), 0) \neq d(I - H(\lambda_2, \cdot), 0)$ so gibt es ein λ zwischen λ_1 und λ_2 so daß $(\lambda, 0)$ ein Bifurkationspunkt ist.
Hinweis: Verwende die Homotopieinvarianz von d für allgemeine Homotopien.

R. Chill
M. Kunze
SS 2005

Übungen zur Nichtlinearen Funktionalanalysis

Blatt 8

1. Zeige, daß die Einbettung von $H_0^1(\mathbb{R}^n)$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ nicht kompakt ist.
Hinweis: Betrachte eine feste Funktion zusammen mit geeigneten Translaten!

2. Es sei H ein Hilbertraum, $u_n, u \in H$. Zeige, daß $u_n \to u$ genau dann, wenn $u_n \rightharpoonup u$ und $\|u_n\| \to \|u\|$.

3. Es sei $L > 0$. Finde alle $\lambda \in \mathbb{C}$ für die es ein nichttriviales $u \in H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L)$ gibt mit

$$\begin{cases} \lambda u - u'' &= 0 \\ u(0) = u(L) &= 0 \end{cases}$$

4. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt.

(a) Zeige, daß $\lambda_1 := \inf\{\|\nabla u\|^2 : u \in H_0^1(\Omega), \|u\|_{L^2(\Omega)} = 1\}$ ein Minimum ist.
Hinweis: Beginne mit einer minimisierenden Folge. Wegen der Kompaktheit der Einbettung $H_0^1 \subset L^2$ konvergiert eine Teilfolge in L^2. Zeige sodann, daß der Grenzwert sogar in H_0^1 liegen muss und daß eine Teilfolge schwach in H_0^1 dagegen konvergiert. Folgere daraus die Behauptung. Man kann sogar (z.B. mit Aufgabe 2) zeigen, daß jede minimisierende Folge eine in H_0^1 konvergente Teilfolge besitzt.

(b) ($\star$) Zeige, daß $\lambda_1 \in \sigma(-\Delta_\Omega^D)$.

(c) ($\star$) Zeige, daß jeder Minimierer e aus (a) in $D(\Delta_\Omega^D)$ liegt mit $-\Delta_\Omega^D e = \lambda_1 e$.

Hinweis: (b) und (c) sind Zusatzaufgaben, dementsprechend gibts auch keine Hinweise :-)

R. Chill
M. Kunze
SS 2005

Übungen zur Nichtlinearen Funktionalanalysis

Blatt 9

1. Zeige, daß der negative p-Laplaceoperator $-\Delta_p : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$ monoton ist.

2. Monotone mehrwertige Operatoren auf $\mathbb{R}$

Man kann den Begriff des Monotonen Operators aus der Vorlesung auf *mehrwertige* Operatoren verallgemeinern:
Sei V ein Banachraum. Ein *monotoner Operator* auf V ist eine Abbildung $A : V \to 2^{V'} = \mathcal{P}(V')$, so daß für alle $u, v \in V$ und alle $\hat{u} \in Au$ und alle $\hat{v} \in Av$ stets $\langle \hat{u} - \hat{v}, u - v \rangle \geq 0$ gilt.
Sei nun $V = \mathbb{R}$.

(a) Zeige, daß der Operator $A : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ definiert durch

$$A(x) = \begin{cases} \{-1\} & \text{, falls } x < 0 \\ [-1, 1] & \text{, falls } x = 0 \\ \{1\} & \text{, falls } x > 0 \end{cases}$$

monoton ist.

(b) Charakterisiere alle monotonen Operatoren auf $\mathbb{R}$.

3. Gradienten
Sei X ein Banachraum, $\varphi : X \to \mathbb{R}$ konvex und stetig differenzierbar. Zeige, daß die Ableitung $\partial\varphi = \varphi' : X \to X'$ monoton ist.
Hinweis: Betrachte für $u, v \in X$ die Funktion $t \mapsto \varphi(u + t(u - v))$.

UNIVERSITÄT ULM
Abteilung Angewandte Analysis

R. Chill
M. Kunze
SS 2005

Übungen zur Nichtlinearen Funktionalanalysis

Blatt 10

1. Galerkin-Methode zum Lösen partieller Differentialgleichungen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen. Wir möchten gerne die partielle Differentialgleichung

$$\begin{cases} -\Delta u &= f \\ u\big|_{\partial\Omega} &= 0 \end{cases}$$

lösen. Dabei gehen wir wie im Beweis des Satzes über die Surjektivität monotoner Operatoren vor: Wir betrachten Δ als Dirichlet Laplace Operator auf $H^{-1}(\Omega)$, d.h. $\Delta = \operatorname{div}(\nabla\cdot)$ und $f \in H^{-1}(\Omega)$.

(a) Zeige, daß das Auffinden der Funktionen u_m im Beweis des Satzes äquivalent dazu ist, ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ zu lösen. (Dabei stehen in x die Koordinaten von u_m bezüglich der Basis $w_1, \dots w_m$ von V_m.) Wie sehen A und b aus?

(b) Nach dem Beweis in der Vorlesung gibt es eine Teilfolge u_{m_k} von u_m so daß $u_{m_k} \rightharpoonup u$, $-\Delta u_{m_k} \rightharpoonup f$ und $-\Delta u = f$. Zeige, daß sogar schon die ganze Folge $u_m \to u$ und daß die Abschätzung $\lambda_1 \|u_m - u\| \leq \| - \Delta u_m - f\|$ gilt.

Hinweis: Verwende zunächst ein Standardargument, um die schwache Konvergenz für die ganze Folge zu zeigen. Verwende sodann die Poincaré-Ungleichung.

2. Nemytskii-Operatoren

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Es sei eine Funktion $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben, die die folgenden *Carathéodory-Bedingungen* erfüllt:

1. Die Abbildung $x \mapsto f(x,r)$ ist für jedes $r \in \mathbb{R}$ meßbar
2. Die Abbildung $r \mapsto f(x,r)$ ist für jedes $x \in \Omega$ stetig

(a) Nun sei weiter vorausgesetzt, daß für zwei Indices $p, q \in (1,\infty)$ und eine Funktion $k \in L^q(\Omega)$ die Abschätzung

$$|f(x,r)| \leq c \cdot |r|^{\frac{p}{q}} + k(x) \quad \text{für fast alle } x \in \Omega \quad \text{und alle } r \in \mathbb{R}$$

gilt. Zeige, daß der *Nemytskii*-Operator

$$\begin{aligned} F : L^p(\Omega) &\to L^q(\Omega) \\ u &\mapsto [x \mapsto f(x,u(x))] \end{aligned}$$

wohldefiniert, beschränkt und stetig ist.

(b) Sei nun $q = p'$ vorausgesetzt, so daß F wie oben definiert einen Operator von L^p nach $(L^p)'$ darstellt.

(i) Zeige daß F (strikt) monoton ist, falls f (strikt) monoton in der zweiten Komponente ist , d.h. $f(x,r) \leq f(x,s)$ (bzw. $<$) für alle $r < s$ und fast alle $x \in \Omega$.

(ii) Zeige, daß F koerziv ist, falls $rf(x,r) \geq d|r|^p + g(x)$ für alle $(x,r) \in \Omega \times \mathbb{R}$, eine Konstante $d > 0$ und eine Funktion $g \in L^1(\Omega)$.

R. Chill
M. Kunze
SS 2005

Übungen zur Nichtlinearen Funktionalanalysis

Blatt 11

1. Wir betrachten den Banachraum c_0 aller Nullfolgen (Beachte: $c_0' = \ell^1$). Definiere $f : [0,1] \to c_0$ durch $f(t) = (n\mathbb{1}_{(0,\frac{1}{n})}(t))_{n\in\mathbb{N}}$.

(a) Zeige, daß f meßbar ist.

(b) Zeige, daß $\langle x', f\rangle$ für jedes $x' \in \ell^1$ integrierbar ist, f aber nicht Bochner-integrierbar ist.

2. Zeige, daß die Funktion $f : [0,1] \to L^\infty(0,1), f(t) = \mathbb{1}_{[0,t]}$ nicht meßbar ist.

3. Dominierte Konvergenz
Es sei (f_n) eine Folge von integrierbaren Funktionen. Es gebe eine integrierbare Funktion $g : \Omega \to \mathbb{R}$ und eine messbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ so, daß $\|f_n\| \leq g$ und $f_n \to f$ fast überall. Zeige, daß

$$\int_\Omega f\,d\mu = \lim \int_\Omega f_n\,d\mu$$

4. Hölderungleichung
Sei X ein Banachraum mit Dual X'. Sei $f \in L^p(\Omega, X)$ und $g \in L^{p'}(\Omega, X')$, wobei $p^{-1} + p'^{-1} = 1$. Zeige, daß die Funktion $t \mapsto \langle f(t), g(t)\rangle$ integrierbar ist mit

$$\int_\Omega |\langle f(t), g(t)\rangle|\,d\mu(t) \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$$

Universität Ulm
Abteilung Angewandte Analysis

R. Chill
M. Kunze
SS 2005

Übungen zur Nichtlinearen Funktionalanalysis Blatt 12

1. Es sei $V \hookrightarrow H \simeq H' \hookrightarrow V'$ ein "Evolutionstripel". Weiter sei $A : V \to V'$ gegeben mit

(i) $\|Au\|_{V'} \leq C\|u\|_V^{p-1}$

(ii) $\langle Au, u\rangle \geq \alpha\|u\|^p$.

Ausserdem sei eine Lipschitz-stetige Funktion $F : H \to H$ mit $F(0) = 0$ gegeben. Wir betrachten das Problem

$$(P)\begin{cases} \dot{u} + Au + F(u) &= f \\ u(0) &= u_0 \\ u &\in W^{1,p'}(0,\tau,V') \cap L^p(0,\tau,V) \end{cases},$$

wobei $f \in L^{p'}(0,\tau,V')$ und $u_0 \in H$.

(a) Zeige, daß (P) höchstens eine Lösung besitzt.

(b) Zeige, daß falls eine Lösung u von (P) existiert, eine Energieabschätzung der Form

$$\|u\|_{L^\infty(0,\tau,H)} + \|u\|_{L^p(0,\tau,V)} \leq C$$

gilt, wobei die Konstante C nur von $\|f\|_{p'}, \|u_0\|_H, \tau, \alpha$ und der Lipschitzkonstante L von F abhängt.

Hinweis: Inspiziere den Beweis in der Vorlesung und verwende das Lemma von Gronwall:
$\varphi(t) \leq c_1 + c_2\int_0^t \varphi(s)\,ds\ \ \forall t \in [0,\tau] \ \Rightarrow\ \varphi(t) \leq c_1 e^{c_2 t}$.

2. Untersuche folgende Anfangswertprobleme auf $V = H = V' = \mathbb{R}$ auf eindeutige Lösbarkeit:

(a)

$$\begin{cases} \dot{u} &= \operatorname{sgn}(u)\sqrt{|u|} \\ u(0) &= 0 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} \dot{u} &= -\operatorname{sgn}(u)\sqrt{|u|} \\ u(0) &= 0 \end{cases}$$

Universität Ulm
Abteilung Angewandte Analysis

R. Chill
M. Kunze
SS 2005

Übungen zur Nichtlinearen Funktionalanalysis — Blatt 13

1. Es sei $(X, \leq)$ ein Vektorverband wobei X ein Banachraum ist. Zeige, daß durch $x' \leq y' :\Leftrightarrow \langle y' - x', x\rangle \geq 0 \; \forall\, x \geq 0$ eine Ordnung auf X' definiert wird, die X' zu einem geordneten Vektorraum macht.

Hinweis: Es genügt zu zeigen, daß $K := \{x' \in X' : \langle x', x\rangle \geq 0 \forall x \geq 0\}$ ein Kegel in X' ist, der $K \cap (-K) = \{0\}$ erfüllt.

2. Zeige, daß in einem Banachverband die Verbandsoperationen

$$\begin{aligned}(x,y) &\mapsto x \vee y\\ (x,y) &\mapsto x \wedge y\\ x &\mapsto x^+\\ x &\mapsto x^-\\ x &\mapsto |x|\end{aligned}$$

gleichmäßig stetig sind.

Hinweis: Zeige zunächst $|x \vee y - x_1 \vee y_1| \leq |x - x_1| + |y - y_1|$ und eine ähnliche Abschätzung für das Infimum.