Universität Ulm
Abteilung Angewandte Analysis

Dr. R. Chill
M. Duelli
WS 02/03

Übungen zur Analysis III

Übungsblatt 1

Abgabetermin: Montag, 21. Oktober 2002, in der Pause der Vorlesung

(1) Es seien Ω_i, $i = 1, 2$, Mengen und $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ gegeben.
(a) Es sei $\mathcal{A}_2$ eine σ-Algebra auf Ω_2. Zeige, dann ist $\sigma(f) := \{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{A}_2\}$ eine σ-Algebra auf Ω_1.
(b) Es sei $\mathcal{A}_1$ eine σ-Algebra auf Ω_1. Widerlege folgende Aussage durch ein Gegenbeispiel: $\{f(A) : A \in \mathcal{A}_1\}$ ist eine σ-Algebra.
Gilt die Aussage, wenn f zusätzlich surjektiv ist?

(2+2 Punkte)

(2) Es bezeichne $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{A}$ die Menge aller kompakten resp. abgeschlossenen Teilmengen des $\mathbb{R}^N$. Weiter bezeichne $\mathfrak{W}$ die Menge aller offenen Würfel im $\mathbb{R}^N$. Zeige:
(a) Es gilt $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N) = \sigma(\mathfrak{K}) = \sigma(\mathfrak{A})$.
*(b) Es gilt $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N) = \sigma(\mathfrak{W})$.

(2+2 Punkte)

(3) Finde drei σ-Algebren in $\{1, 2, 3\}$. (2 Punkte)

(4) Es sei (A_n) eine Folge von Teilmengen einer Menge Ω. Man bezeichnet mit $\limsup_{n\to\infty} A_n$ die Menge aller Punkte von Ω, welche in unendlich vielen der A_n liegen. Man bezeichnet mit $\liminf_{n\to\infty} A_n$ die Menge aller Punkte von Ω, welche in schließlich allen[1] A_n liegen.
(a) Drücke $\liminf_{n\to\infty} A_n$ und $\limsup_{n\to\infty} A_n$ mit Hilfe der Symbole $\cup$ und $\cap$ aus.
(b) Welche Inklusion gilt?
(c) Es gelte $A_n \in \mathcal{A}$ für eine σ-Algebra $\mathcal{A}$ auf Ω. Dann sind die beiden Mengen $\liminf_{n\to\infty} A_n$ und $\limsup_{n\to\infty} A_n$ auch in $\mathcal{A}$.

(2+1+2 Punkte)

[1] Man sagt, ein Punkt x liege in *schließlich allen* A_n, falls es einen Index n_0 gibt, so daß x in allen A_n mit $n \geq n_0$ liegt.

UNIVERSITÄT ULM
Abteilung Angewandte Analysis

Dr. R. Chill
M. Duelli
WS 02/03

Übungen zur Analysis III

Übungsblatt 2

Abgabetermin: Montag, 28. Oktober 2002, in der Pause der Vorlesung

In diesem, wie in folgenden Übungsblättern betrachten wir - sofern nichts anderes gesagt wird - auf $\mathbb{R}^n$ stets die Borel σ-Algebra.

(5) Es sei $x \in \mathbb{R}^n$. Zeige, daß durch $\mu(A) = 1$, falls $x \in A$, und $\mu(A) = 0$ sonst, ein Maß auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ erklärt wird. Man nennt μ das Diracmaß im Punkt x und schreibt $\delta_x := \mu$. (2 Punkte)

(6) Es seien $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu)$ ein Maßraum und (Ω_2, Σ_2) ein meßbarer Raum. Weiter seien $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ eine Abbildung und $\mathcal{E}$ ein Erzeugendensystem von Σ_2, das heißt $\sigma(\mathcal{E}) = \Sigma_2$.

(a) Zeige: Ist $f^{-1}(A) \in \Sigma_1$ für alle $A \in \mathcal{E}$, dann ist $f^{-1}(A) \in \Sigma_1$ für alle $A \in \Sigma_2$. (Hinweis: Prinzip der guten Mengen.)
Bemerkung: Wir nennen f $\Sigma_1 - \Sigma_2$-meßbar, falls $f^{-1}(A) \in \Sigma_1$ für alle $A \in \Sigma_2$.

(b) Es sei f eine $\Sigma_1 - \Sigma_2$-meßbare Abbildung. Dann definiere ν auf Σ_2 durch $\nu(A) = \mu(f^{-1}(A))$. Zeige: $(\Omega_2, \Sigma_2, \nu)$ ist ein Maßraum.
Bemerkung: Man bezeichnet ν als *Bildmaß* und schreibt $\mu_f = f(\mu) := \nu$.

(c) Zeige oder widerlege durch ein Gegenbeispiel: Ist μ endlich (σ-endlich), so auch $f(\mu)$.

(d) Für $a \in \mathbb{R}^n$ bezeichne T_a die Translationsabbildung $x \to a + x$. Zeige, daß T_a meßbar ist und bestimme $T_a(\delta_x)$ und $T_a(\lambda)$. Hier bezeichnet (wie immer) δ_x das Diracmaß im Punkt x und λ das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^n$.

(2+2+2+4 Punkte)

(7) Im folgenden einige Beispiele meßbarer Funktionen. Zeige:

(a) Es sei (Ω, Σ) ein Meßraum. Die charakteristische Funktion einer Menge $A \subset \Omega$ ist meßbar genau dann, wenn $A \in \Sigma$ gilt.

(b) Jede stetige Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist meßbar[1].

(c) Jede monotone Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist meßbar.

(2+2+2 Punkte)

[1] im Sinne von Aufgabe (6)

UNIVERSITÄT ULM
Abteilung Angewandte Analysis

Dr. R. Chill
M. Duelli
WS 02/03

Übungen zur Analysis III

Übungsblatt 3

Abgabetermin: Montag, 4. November 2002, in der Pause der Vorlesung

(8) (a) Es sei (Ω, Σ) ein Meßraum. Beschreibe die Menge der meßbaren Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ für $\Sigma = \mathcal{P}(\Omega)$ und $\Sigma = \{\emptyset, \Omega\}$.

(b) Es seien (Ω_i, Σ_i), $i = 1, 2, 3$, Meßräume. Ferner seien $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ und $g : \Omega_2 \to \Omega_3$ $\Sigma_1 - \Sigma_2$-meßbar resp. $\Sigma_2 - \Sigma_3$-meßbar. Zeige: Die Komposition $g \circ f : \Omega_1 \to \Omega_3$ ist $\Sigma_1 - \Sigma_3$ meßbar.

(2+2 Punkte)

(9) (a) Es sei f eine auf $\mathbb{R}^n$ definierte meßbare Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Berechne das Integral $\int_{\mathbb{R}^n} f d\delta_{x_0}$; dabei bezeichne δ_{x_0} das Diracmaß im Punkt x_0.

(b) Es bezeichne μ das Zählmaß auf $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Es sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ beliebig. Zeige: f ist meßbar und charakterisiere die Integrierbarkeit von f.

(2+2 Punkte)

(10) Es sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und f eine Σ-meßbare nichtnegative Funktion auf Ω. Definiere $\nu(A) = \int f 1_A d\mu$ für $A \in \Sigma$.

(a) Zeige: ν ist ein Maß.
Man nennt ν das Maß mit Dichte f bezüglich μ und schreibt auch $f\mu := \nu$.

(b) Es sei $(a_n) \subset [0, \infty]$. Zeige: $\nu(A) = \sum_{n \in A} a_n$ ist ein Maß auf $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Man nennt ν das gewichtete Zählmaß.

(3+2 Punkte)

(11) Let (Ω, Σ, μ) be a measure space and $f : \Omega \to [0, \infty]$ a measurable function. Recall that f is said to be equal to 0 almost everywhere (in short $f = 0$ a.e.) if there exists a measurable set N of measure zero such that $\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\} \subset N$. Show that $\int_\Omega f d\mu = 0$ if and only if $f = 0$ a.e. (3 points)

UNIVERSITÄT ULM
Abteilung Angewandte Analysis

Dr. R. Chill
M. Duelli
WS 02/03

Übungen zur Analysis III

Übungsblatt 4

Abgabetermin: Montag, 11. November 2002, in der Pause der Vorlesung

(12) (Transformationssatz) Es seien $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu)$ ein Maßraum, (Ω_2, Σ_2) ein Meßraum und eine $\Sigma_1 - \Sigma_2$-meßbare Abbildung $T : \Omega_1 \to \Omega_2$ gegeben. Dann bezeichne $T(\mu)$ das Bildmaß von μ unter T, d.h. $T(\mu)(A) = \mu(T^{-1}(A))$ für $A \in \Sigma_2$.

(a) Es sei $f : \Omega_2 \to [0, \infty]$ einfach. Zeige die Identität

$$\int_{\Omega_2} f \, dT(\mu) = \int_{\Omega_1} f \circ T \, d\mu.$$

(b) Zeige die obige Identität für $f : \Omega_2 \to [0, \infty]$ meßbar.
(Hinweis: Benutze, daß es für jede nichtnegative meßbare Funktion f eine monoton wachsende Folge nichtnegativer einfacher Funktionen (f_n) gibt, so daß $f = \sup_n f_n$.)

(c) Es sei $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ meßbar und $h \in \mathbb{R}$. Zeige:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x+h) \, d\lambda(x).$$

(2+3+2 Punkte)

(13) Es sei $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ uneigentlich Riemannintegrierbar und Lebesgueintegrierbar. Zeige, daß

$$\int_0^\infty f(t) \, dt = \int_{\mathbb{R}_+} f \, d\lambda.$$

(2 Punkte)

(14) Déterminer la limite de la suite d'intégrales

$$\int_0^1 \frac{1+nx}{(1+x)^n} \, dx.$$

(3 points)

(15) Berechne die Laplacetransformation von $f(t) = \sin(t)/t, \ t \in \mathbb{R}_+$.
(Hinweis: Berechne zuerst $\frac{d}{d\lambda}\hat{f}(\lambda)$ für $\lambda > 0$. Begründe alle Schritte. Benutze dann die Identität $\hat{f}(\lambda) = -\int_\lambda^\infty (\frac{d}{dt}\hat{f}(t)) dt$.) (4 Punkte)

Universität Ulm
Abteilung Angewandte Analysis

Dr. R. Chill
M. Duelli
WS 02/03

Übungen zur Analysis III

Übungsblatt 5

Abgabetermin: Montag, 18. November 2002, in der Pause der Vorlesung

(16) Es seien (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $f, g : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ meßbar. Es gelte $f = g$ fast überall. Zeige: Ist f integrierbar, so auch g und es gilt $\int_\Omega f \, d\mu = \int_\Omega g \, d\mu$.
(2 Punkte)

(17) Sia (Ω, Σ, μ) uno spazio di misura finita, cioè $\mu(\Omega) < \infty$. Mostrare che per $1 \leq p \leq q \leq \infty$ abbiamo $L^q(\Omega, \Sigma, \mu) \subset L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$. (3 punti)

(18) Ist der Maßraum nicht endlich, so ist die Situation etwas komplexer.
  (a) Es sei I ein unbeschränktes Intervall in $\mathbb{R}$. Zeige: Für $1 \leq p \neq q \leq \infty$ gilt weder $L^p(I) \subset L^q(I)$ noch $L^q(I) \subset L^p(I)$.
  (b) Für $1 \leq p \leq \infty$ bezeichnet ℓ^p den Raum $L^p(\mathbb{N}, \mathfrak{P}(\mathbb{N}), \mu)$, wo μ das Zählmaß auf $\mathbb{N}$ ist. Zeige die Inklusion $\ell^p \subset \ell^q$ für $1 \leq p \leq q \leq \infty$.
(3+3 Punkte)

(19) (Lyapunov) Es seien (Ω, Σ, μ) ein Maßraum, $1 \leq p, q \leq \infty$ und $0 \leq \theta \leq 1$. Definiere r durch $\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{q}$. Zeige: Ist $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, so ist $f \in L^r(\Omega)$ und es gilt folgende Interpolationsungleichung: $\|f\|_r \leq \|f\|_p^{1-\theta} \, \|f\|_q^\theta$. (3 Punkte)

(20) Zeige, die Abbildung $T : C[a, b] \to L^p([a, b]), \ f \mapsto [f]$ ist injektiv. (2 Punkte)

Universität Ulm
Abteilung Angewandte Analysis

Dr. R. Chill
M. Duelli
WS 02/03

Übungen zur Analysis III

Übungsblatt 6

Abgabetermin: Montag, 25. November 2002, in der Pause der Vorlesung

(21) Es sei (Ω, Σ, μ) ein σ-endlicher Maßraum und $f : \Omega \to [0, \infty]$ meßbar. Zeige die Identität

$$\int_\Omega f \, d\mu = \int_{[0,\infty)} \mu(\{f \geq t\}) \, dt.$$

(Hinweis: Beachte die Identität $f(x) = \int_0^{f(x)} 1 \, dt$ und benutze Fubini.) (3 Punkte)

(22) (Partiële Integratie) Wees $f,\, g \in L^1[a, b]$. Definiëer voor alle $x \in [a, b]$

$$F(x) := \int_{[a,x]} f \, d\lambda \quad \text{en} \quad G(x) := \int_{[a,x]} g \, d\lambda.$$

Toon de juistheid von de volgende stellingen aan:
(a) $F,\, G \in C[a, b]$.
(b)

$$\int_{[a,b]} f(x) \int_{[a,x]} g(y) \, d\lambda(y) \, d\lambda(x) = \int_{[a,b]} g(y) \int_{[y,b]} f(x) \, d\lambda(x) \, d\lambda(y).$$

(c)

$$\int_{[a,b]} f \cdot G \, d\lambda = F(b)G(b) - \int_{[a,b]} F \cdot g \, d\lambda.$$

(Opmerking bij (b): Fubini.) (2+3+1 punten)

(23) (Faltung) Es sei $f \in C_c^1(\mathbb{R})$, das heißt f ist stetig differenzierbar und verschwindet außerhalb einer kompakten Menge. Zeige:
(a) $f \in L^q(\mathbb{R})$ für alle $q \in [1, \infty]$.
(b) Es sei $g \in L^p(\mathbb{R})$ und $p \in [1, \infty]$. Definiere $(f \star g)(x) = \int_\mathbb{R} f(x - y)g(y) \, d\lambda(y)$. Zeige: Die Faltung $f \star g$ definiert eine reellwertige Funktion, diese ist differenzierbar und es gilt $(f \star g)' = f' \star g$.

(1+3 Punkte)

(24) Betrachte auf $[0, 1]$ die Folge (f_n), definiert durch $f_n(x) = x^n - 2x^{2n+1}$.
(a) Zeige: $\sum_{n=0}^\infty (\int_{[0,1]} f_n \, d\lambda) \neq \int_{[0,1]} (\sum_{n=0}^\infty f_n) \, d\lambda$.
*(b) Warum widerspricht Teil (a) nicht dem Satz von Fubini?

(3+2 Punkte)

UNIVERSITÄT ULM
Abteilung Angewandte Analysis

Dr. R. Chill
M. Duelli
WS 02/03

Übungen zur Analysis III

Übungsblatt 7

Abgabetermin: Montag, 2. Dezember 2002, in der Pause der Vorlesung

(25) Es sei $f \in C_c(\mathbb{R})$ und $k_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ eine approximative Eins, das heiße k_n ist integrierbar mit $\int_{\mathbb{R}} k_n \, d\lambda = 1$ und $\{k_n \neq 0\} \subset B_1(1/n)$, $n \in \mathbb{N}$.
Zeige: $f \star k_n$ konvergiert gleichmäßig gegen f $(n \to \infty)$.
(Hinweis: Benutze die gleichmäßige Stetigkeit von f.) (3 Punkte)

(26) (Integración parcial) Considerando $u, v \in C^1(\overline{B_n(R)})$, $R > 0$, prueba la identidad:

$$\int_{B_n(R)} D_i u \cdot v \, d\lambda = \int_{S_{n-1}(R)} u \cdot v \frac{x_i}{R} \, d\sigma - \int_{B_n(R)} u \cdot D_i v \, d\lambda.$$

(3 puntos)

(27) Es sei $u \in C^2((0,\infty) \times B_n(R))$, $R > 0$, und es gelte $\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) - \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} u(t,x) = 0$ für alle $(t,x) \in (0,\infty) \times B_n(R)$. Man nehme an, daß die Ableitungen $\frac{\partial}{\partial t} u$, $\frac{\partial}{\partial x_k} u$ und $\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} u$ eine stetige Fortsetzung auf $\mathbb{R}_+ \times \overline{B_n(R)}$ haben und daß $\langle \nabla u(t,x), \nu(x) \rangle = 0$ $\forall (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times S_{n-1}(R)$. Hier ist $\nu(x) = x/R$ die äußere Normale im Punkt $x \in S_{n-1}(R)$. Zeige:

$$\frac{d}{dt} \int_{B_n(R)} u \, d\lambda = 0.$$

(Hinweis: Rechtfertige, daß man Ableitung und Integral vertauschen darf.)
(4 Punkte)

(28) Es sei $f \in L^1(B_n)$. Zeige die folgende Identität:

$$\int_{B_n} f \, d\lambda = \int_{B_{n-1}} \int_{-\sqrt{1-|y|^2}}^{\sqrt{1-|y|^2}} f(t,y) \, dt \, dy.$$

(3 Punkte)

UNIVERSITÄT ULM
Abteilung Angewandte Analysis

Dr. R. Chill
M. Duelli
WS 02/03

Übungen zur Analysis III

Übungsblatt 8

Abgabetermin: Montag, 9. Dezember 2002, in der Pause der Vorlesung

*(29) Es sei Ω eine Menge, A, $B \subset \Omega$, und $\mathcal{E} = \{A, B\}$.

(a) Bestimme das von $\mathcal{E}$ erzeugte Dynkinsystem $\mathcal{D}(\mathcal{E})$.

(b) Zeige, daß $\mathcal{D}(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E})$ genau dann gilt, wenn eine der Mengen $A \cap B$, $A^c \cap B$, $A \cap B^c$ oder $A^c \cap B^c$ leer ist.

(2+2 Punkte)

*(30) Legyen adva két függvény $f \in L^p(\Omega)$ és $g \in L^q(\Omega)$, ahol $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \leq 1$.
Mutassuk meg, hogy $f \cdot g \in L^r(\Omega)$ és $\|f \cdot g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$. (3 pont)

*(31) (a) Finde eine Folge $f_n \in L^1(\mathbb{R})$, so daß $\|f_n\|_1 \to 0$ $(n \to \infty)$, aber f_n konvergiert nicht fast überall.

(b) Finde eine Folge $f_n \in L^1(\mathbb{R})$, so daß $f_n \to 0$ $(n \to \infty)$ punktweise (fast überall), aber $\inf_n \|f_n\|_1 > 0$.

(3+1 Punkte)

*(32) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand Γ, $u \in C^2(\mathbb{R}^+ \times \bar{\Omega})$ sei eine Lösung der Wellengleichung $(u_{tt} - \Delta u = 0)$ mit Neumannrandbedingung, das heiße $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_k} = 0$ für alle $(t, x) \in (0, \infty) \times \Omega$ und $\langle \nabla u(t, x), \nu(x) \rangle = 0$ $\forall (t, x) \in [0, \infty) \times \Gamma$. Hier bezeichnet $\nu(x)$ die äußere Normale im Punkt $x \in \Gamma$. Zeige:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + |\nabla u|^2 \, d\lambda \right) = 0.$$

(3 Punkte)

UNIVERSITÄT ULM
Abteilung Angewandte Analysis

Dr. R. Chill
M. Duelli
WS 02/03

Übungen zur Analysis III

Übungsblatt 9

Abgabetermin: Montag, 16. Dezember 2002, in der Pause der Vorlesung.

(33) In einem Tank befinden sich 1000 Liter Salzlösung, in der insgesamt 50 kg eines Salzes gelöst sind.

(a) Pro Minute mögen 2 Liter der Salzlösung aus dem Tank abgelassen und die gleiche Menge klaren Wassers nachgefüllt werden. Ein Rührgerät sorge für eine gleichmäßige Konzentration im Tank. Wieviel Kilogramm Salz befinden sich nach t Minuten noch im Tank?

(b) Anstelle klaren Wassers mögen 2 Liter Wasser, in denen 50 g Salz gelöst sind, pro Minute in den Tank eingelassen werden. Wieviel Salz befindet sich in ferner Zukunft (d.h. $t \to \infty$) im Tank?

(2+3 Punkte)

(34) Solve the following initial value problems:

(a) $y'(t) = 2ty(t) + 1, \;\; y(0) = 1.$

(b) $y'(t)\, y(t) = \frac{2t}{1+t^2}, \;\; y(0) = 1.$

(2+3 points)

(35) Sei $m \neq 0$ eine feste ganze Zahl. Betrachte im rechten oberen Quadranten $Q := \{(x, y) : x, y > 0\}$ die Kurvenschar $y(x) = cx^m$, wobei c die positiven, reellen Zahlen durchläuft.

Bestimme eine Differentialgleichung $y'(x) = f(x, y(x))$, welche diese Kurvenschar als Lösungen besitzt. (2 Punkte)

(36) Sei $y : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(t) = -a(t)y(t) + f(t),$$

wobei a, $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ stetig sind. Es gelte $\inf_{t \in \mathbb{R}_+} a(t) > 0$ und $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$.
Zeige: $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$.
Bemerkung: Es wird nicht verlangt, die Lösung explizit anzugeben. (4 Punkte)

Joyeux Noël
Happy X-mas
Frohe Weihnachten

UNIVERSITÄT ULM
Abteilung Angewandte Analysis

Dr. R. Chill
M. Duelli
WS 02/03

Übungen zur Analysis III

Übungsblatt 10

Abgabetermin: Dienstag, 7. Januar 2003, in der Pause der Vorlesung.

(37) Betrachte das Anfangswertproblem $y' = \sqrt{|y|}$, $y(t_0) = y_0$. Zeige:
(a) Das AWP besitzt für $t_0 = 0$ und $y_0 = 0$ unendlich viele Lösungen.
(b) Das AWP besitzt für $t_0 = 2$ und $y_0 = 1$ ebenfalls unendlich viele Lösungen. Warum widerspricht dies nicht dem Satz über die DGL mit getrennten Veränderlichen aus der Vorlesung?

(3+3 Punkte)

(38) Es sei $a \in L^1([0,\infty))$. Definiere $y : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ durch $y(t) = y_0 \exp\left(\int_0^t a(s)\, ds\right)$. Zeige: y ist stetig und es gilt $y(t) - y(0) = \int_0^t a(s)y(s)\, ds$.
(Hinweis: Es sei bekannt, daß $\int_0^t a(s) \exp(\int_0^s a(r)\, dr)\, ds = \exp(\int_0^t a(s)\, ds) - 1$ für alle $t \geq 0$.)

(3 Punkte)

(39) Var $\alpha, \beta > 0$ och $y_0 \in \mathbb{R}$. Lös den här logistiska differentialekvationen:

$$y'(t) = \alpha y(t)(\beta - y(t)),\ y(0) = y_0.$$

(3 poäng)

(40) Zeichne für $-0.1 \leq x \leq 0.8$ und $-0.1 \leq y \leq 0.6$ das Richtungsfeld für das folgende System von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{1}{2}x(t) - \frac{1}{2}x(t)y(t) - x(t)^2, \\ y'(t) &= -\frac{1}{2}y(t) + x(t)y(t) - y(t)^2. \end{aligned}$$

Bestimme außerdem die Gleichgewichtspunkte für dieses System. (4 Punkte)

Dr. R. Chill
M. Duelli
WS 02/03

Übungen zur Analysis III

Übungsblatt 11

Abgabetermin: Montag, 13. Januar 2003, in der Pause der Vorlesung.

(41) Confice solutionem problemati valoris initialis sequenti

$$y'(t) = (t + y(t) + 1)^2, \quad y(0) = 0$$

(4 puncta)

(42) (a) Zeige, daß $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ ein vollständiger normierter Raum[1] ist. Dabei ist $\|f\|_\infty = \sup_{[a,b]}|f|$ die Supremumsnorm.

(b) Es seien $\alpha, \beta > 0$, definiere $\mathcal{C} = \{f \in C^1[a,b] : \|f\|_\infty \leq \alpha, \|f'\|_\infty \leq \beta\}$. Zeige, daß jedes f in $\mathcal{C}$ Lipschitzstetig mit Konstante β ist.

(2+2 Punkte)

(43) Es sei $\omega \in \mathbb{R}$. Löse das Anfangswertproblem

$$u' = Au, \quad u(0) = u_0, \quad A := \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$$

durch Berechnen der Picarditerationen. Setze $y_0(t) \equiv u_0$ und definiere rekursiv $y_k(t) = u_0 + \int_0^t Ay_{k-1}(s)\,ds$, $k \in \mathbb{N}$.

(a) Zeige mittels Induktion die Identität $y_k(t) = \sum_{l=0}^k \frac{(tA)^l}{l!} u_0$.

(b) Berechne den Grenzwert $\lim_{k\to\infty} y_k(t)$.

(2+3 Punkte)

[1] Man bezeichnet einen vollständigen normierten Raum kurz als Banachraum.

UNIVERSITÄT ULM
Abteilung Angewandte Analysis

Dr. R. Chill
M. Duelli
WS 02/03

Übungen zur Analysis III

Übungsblatt 12

Abgabetermin: Montag, 20. Januar 2003, in der Pause der Vorlesung.

(44) Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und bzgl. der zweiten Koordinate lokal Lipschitzstetig. Weiter gelte $f(-t, y) = -f(t, y)$ für alle t, $y \in \mathbb{R}$.

Zeige: Jede Lösung der Differentialgleichung $y'(t) = f(t, y(t))$ auf einem Intervall $[-a, a]$ mit $a > 0$ geht durch Spiegelung an der y-Achse in sich selbst über.

Gilt diese Aussage auch, wenn man die Lipschitzbedingung an f fallen läßt?

(4 Punkte)

(45) Untersuche die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen des Anfangswertproblems

$$y'(t) = e^y \cos t, \quad y(t_0) = y_0.$$

Gibt es eine maximale Lösung, und wie sieht diese gegebenenfalls aus? (Begründe die Antwort.) (4 Punkte)

(46) Löse die Differentialgleichung

$$y''(t) = -\omega^2 y(t), \quad y(0) = y_0,\ y'(0) = y_1,$$

für $\omega \in \mathbb{R}$. Gehe dabei folgendermaßen vor: Schreibe die Differentialgleichung als ein Problem erster Ordnung; führe dazu die Variablen $u_1 := -\omega y$ und $u_2 = y'$ ein. Verwende Aufgabe 43. (4 Punkte)

(47) Fie $\alpha, \beta > 0$ şi mulţimea $\mathcal{C}$ ca în tema 42 (b) definită. Arătăţi că mulţimea $\mathcal{C}$ este relativ compact în $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$.
(Inditie: Arzela-Ascoli.) (3 Puncte)

UNIVERSITÄT ULM
Abteilung Angewandte Analysis

Dr. R. Chill
M. Duelli
WS 02/03

Übungen zur Analysis III

Übungsblatt 13

Abgabetermin: Montag, 27. Januar 2003, in der Pause der Vorlesung.

(48) Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definiere $\|A\| = \sup\{\|Ax\|_2 : \|x\|_2 \le 1\}$. Zeige:
- (a) Der Ausdruck $\|\cdot\|$ definiert eine Norm auf $\mathbb{R}^{n\times n}$.
- (b) Es gilt weiterhin $\|AB\| \le \|A\| \, \|B\|$ für $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
- (c) Berechne $\|D\|$ für $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

(2+2+1 Punkte)

(49) Gegeben sei eine Tasse heißen Tees (180 g), in den (zum Zeitpunkt $t = 0$) ein wenig Zucker (20 g) gegeben wird. Die Geschwindigkeit, mit der sich der Zucker im Tee auflöst, ist proportional zu der noch unaufgelösten Menge Zuckers und der Differenz zwischen Sättigungskonzentration (hier 1/4) und der momentanen Zuckerkonzentration.
- (a) Finde die Differentialgleichung, die die Veränderung der Menge gelösten Zuckers $u(t)$ zur Zeit t beschreibt.
- (b) Bestimme die Menge $u(t)$ zur Zeit $t > 0$.
- (c) In der Lösung u tritt eine Proportionalitätskonstante auf. Welchen Wert hat diese, wenn nach 5 Minuten eine Zuckerkonzentration von 1/20 vorliegt?
- (d) Nach welcher Zeit sind 75% des Zuckers aufgelöst?

(2+2+1+1 Punkte)

(50) Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Zeige:
- (a) Die Matrix A ist diagonalisierbar.
- (b) Finde eine reguläre Matrix S, so daß $S^{-1}AS = D$ Diagonalgestalt hat.
- (c) Berechne $e^{tA} := \sum_{n\ge 0} \frac{(tA)^n}{n!}$.
- (d) Zeichne das zu $f(x) = Ax$ gehörige Richtungsfeld für $x \in [-2, 2]^2$.

(1+2+2+2 Punkte)

UNIVERSITÄT ULM
Abteilung Angewandte Analysis

Dr. R. Chill
M. Duelli
WS 02/03

Übungen zur Analysis III

Übungsblatt 14

Abgabetermin: Montag, 3. Februar 2003, in der Pause der Vorlesung.

(51) (Lemma von Gronwall) Es seien ϕ, $\lambda : [a,b] \mapsto \mathbb{R}_+$ stetig und $C \geq 0$. Es gelte $\phi(t) \leq C + \int_a^t \lambda(s)\phi(s)\, ds$ für $t \in [a,b]$. Dann ist $\phi(t) \leq Ce^{\int_a^t \lambda(s)\, ds}$ für $t \in [a,b]$. (3 Punkte)

(52) (Eulerova rovnice) Řešte následující rovnici s počáteční podmínkou
$t^2 y''(t) - ty'(t) + y(t) = 0$ $(t > 0)$, $y(1) = 1$ a $y'(1) = 1$.
(Návod: Uvažte $u(s) = y(e^s)$ pro $s \in \mathbb{R}$.) (5 bodů)

(53) (Die schwingende Saite) Betrachte das Randwertproblem $-u'' + \lambda u = 0$ auf $(0,\pi)$, $u(0) = u(\pi) = 0$. Bestimme die Menge Λ aller $\lambda \in \mathbb{R}$, für welche eine Lösung $u_\lambda \neq 0$ existiert und bestimme u_λ. Berechne $\int_0^\pi u_\lambda u_\mu$ für $\lambda, \mu \in \Lambda$, $\lambda \neq \mu$. Was fällt auf?
(Hinweis: Betrachte das Anfangswertproblem $-u'' + \lambda u = 0$, $u(0) = 0$ und $u'(0) = 1$ und variiere λ.) (5 Punkte)

(54) Für welche Parameter a, $b \in \mathbb{R}$ gilt für alle Lösungen u der Differentialgleichung $u'' + au' + bu = 0$ die Eigenschaft $\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$? (3 Punkte)

UNIVERSITÄT ULM
Abteilung Angewandte Analysis

Dr. R. Chill
M. Duelli
WS 02/03

Übungen zur Analysis III

Übungsblatt 15

Abgabetermin: Montag, 10. Februar 2003, in der Pause der Vorlesung.

(55) Wie lautet die homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten minimaler Ordnung, welche die Funktionen

$$te^{2t},\ t^2 \sin t,\ t^3,\ -t^2,\ e^{2t}\cos 3t$$

als Lösungen besitzt? (3 Punkte)

(56) Löse die Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) = u_{xx}(t,x), & (t,x) \in \mathbb{R} \times (0,\pi), \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0. \end{cases}$$

Mache dazu den Ansatz

$$u(t,x) = \alpha(t)\beta(x).$$

(a) Zeige, daß $\frac{\alpha''}{\alpha} = \frac{\beta''}{\beta} =: \lambda$ eine Konstante sein muß.
(b) Bestimme die Menge Λ aller $\lambda \in \mathbb{R}$, für die es ein $\beta_\lambda \neq 0$ gibt.
(c) Bestimme die allgemeine Lösung α_λ für $\lambda \in \Lambda$.
(Hinweis: Verwende Aufgabe 53.)
Bemerkung: Die allgemeine Lösung ist von der Form

$$u(t,x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \alpha_\lambda(t)\beta_\lambda(x).$$

(2+2+2 Punkte)

(57) Encontre os pontos de equilíbrio da seguinte equação diferencial

$$\begin{aligned} x' &= 16x^2 + 9y^2 - 25 \\ y' &= 16x^2 - 16y^2. \end{aligned}$$

Quais pontos de equilíbrio são estáveis? (3 pontos)