Universität Ulm
Abteilung Angewandte Analysis

R. Chill
M. Kunze
J. Kuebart
WS 04/05

Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 1

1. (a) Es sei M eine Menge und d_1, d_2 zwei Metriken auf M. d_1 und d_2 heißen *äquivalent* falls es für alle $x \in M$ und alle $\varepsilon > 0$ Zahlen $\delta_1, \delta_2 > 0$ gibt so daß

$$B_{d_1}(x, \delta_1) \subset B_{d_2}(x, \varepsilon) \quad \text{und} \quad B_{d_2}(x, \delta_2) \subset B_{d_1}(x, \varepsilon)$$

Zeige: Sind d_1 und d_2 äquivalent, so besitzen (M, d_1) und (M, d_2) die gleichen offenen Mengen.

(b) Sei (M, d) ein metrischer Raum. Zeige, daß durch $\bar{d}(x, y) := \min\{d(x, y), 1\}$ eine zu d äquivalente Metrik definiert ist. (M)

2. Es sei $M = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ (= Raum der Folgen in $\mathbb{C}$). Finde eine Metrik auf M, so daß die Folge $\mathbf{x}_n = (x_k^n)_k$ genau dann gegen $\mathbf{x} = (x_k)_k$ konvergiert, wenn sie punktweise konvergiert, d. h. wenn $\lim_{n\to\infty} x_k^n = x_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. (M)

3. Betrachte $\mathbb{R}$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$. Beweise oder widerlege:
Jede Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$ ist bereits linear. (M)

4. Für $x \in \mathbb{R}^2$ bezeichne $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Definiere

$$d(x,y) = \begin{cases} ||x-y|| & \text{, falls die Familie } (x,y) \text{ l. a. ist} \\ ||x|| + ||y|| & \text{, sonst} \end{cases}$$

(a) Zeige: $(\mathbb{R}^2, d)$ ist ein metrischer Raum.

(b) Skizziere: i) $B(\,(0,0),1)$ ii) $B(\,(1,2),1)$ iii) $B(\,(0,2),3)$

(c) Ist die Menge $K = \{(t, 1-t) \,:\, 0 \le t \le 1\}$ kompakt in $(\mathbb{R}^2, d)$? (10 P)

5. Es sei $M = C(\mathbb{R})$ der Raum aller stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$. Weiter sei

$$d_n(f,g) = \min\{\sup_{t\in[-n,n]} |f(t) - g(t)|, 1\} \quad \text{und} \quad d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(f,g)}{2^n}$$

(a) Zeige daß (M, d) ein metrischer Raum ist. (Beachte jedoch, daß d_n *keine* Metrik auf M ist. Wieso?)

(b) Zeige: $f_n \to f$ bezüglich d genau dann, wenn f_n lokal gleichmäßig gegen f konvergiert, das heißt genau dann, wenn

$$\forall K \subset \mathbb{R} \text{ kompakt } \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \ :\ \forall n \ge n_0,\ t \in K \quad |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$$

(10 P)

Universität Ulm
Abteilung Angewandte Analysis

R. Chill
M. Kunze
J. Kuebart
WS 04/05

Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 2

1. Zeige, daß es auf $C(\mathbb{R})$ keine Norm gibt, die eine zu der Metrik d aus Aufgabe 5/Blatt 1 äquivalente Metrik definiert. (M)

Hinweis: Nimm an, es gäbe eine entsprechende Norm auf $C(\mathbb{R})$. Konstruiere dann mit Hilfe einer stetigen Funktion φ auf $\mathbb{R}$ mit Träger in $(0,1)$ und ihrer Translate $\varphi_n(x) = \varphi(x-n)$ eine Reihe, die zwar bezüglich d, nicht aber bezüglich der gegebenen Norm konvergiert.

2. Es sei $(X, ||\cdot||)$ ein Banachraum und $Y \subset X$ ein Untervektorraum.
Zeige: Y ist genau dann ein Banachraum (bezüglich der von X geerbten Norm), wenn Y abgeschlossen in X ist. (M)

3. (a) Ist durch $\|f\| := \sup_{|x|\leq 1} |f(x)|$ eine Norm auf $C^\infty(\mathbb{R})$ dem Raum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}$ gegeben?

(b) Ist durch $\|f\| := \sup_{|z|\leq 1} |f(z)|$ eine Norm auf $H(\mathbb{C})$ dem Raum der ganzen Funktionen auf $\mathbb{C}$ gegeben? (M)

4. Es l^∞ der Raum der beschränkten Folgen, c_0 der Raum der Nullfolgen in $\mathbb{C}$.
Weiter sei $||x||_\infty = \sup |x_k|$.

(a) Zeige, daß die Räume $(l^\infty, ||\cdot||_\infty)$ und $(c, ||\cdot||_\infty)$ vollständig sind.

(b) Zeige, daß der Raum c_{00} der endlichen Folgen (d.h. der Folgen $(x_n)_n$ für die es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $x_n = 0$ für alle $n \geq n_0$) dicht in c_0 ist. (10 P)

5. Es sei X ein normierter Vektorraum, U ein Unterraum und O, M Teilmengen von X.
Zeige:

(a) Der Abschluß $\overline{U}$ ist wieder ein Unterraum.

(b) Ist O offen, so ist auch $O + M := \{x + y \,:\, x \in O, y \in M\}$ offen.

(c) Ist $\emptyset \neq O$ offen und $O \subset U$, so ist $U = X$. (10 P)

UNIVERSITÄT ULM
Abteilung Angewandte Analysis

R. Chill
M. Kunze
J. Kuebart
WS 04/05

Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 3

1. Ist $X = \mathbb{C}^n, Y = \mathbb{C}^m$ so ist jede (stetige) lineare Abbildung $T : X \to Y$ eindeutig beschrieben durch ihre darstellende Matrix $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ bezüglich der Standardbasen. Nach Wahl von Normen auf X und Y schreibt man nun $\|A\|$ statt $\|T\|$. Berechne $\|A\|$ falls man

(a) auf X und Y jeweils die ∞-Norm, $\|x\|_\infty := \sup |x_j|$ wählt.

(b) auf X die 1-Norm $\|x\|_1 := \sum |x_j|$ und auf Y die ∞-Norm,

(c) auf X und Y jeweils die 2-Norm $\|x\|_2 := (\sum |x_j|^2)^{\frac{1}{2}}$ wählt. (3 mal M)

2. Es sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum. Die aus Analysis III bekannten $L^p = L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$-Räume sind dann jeweils Banachräume bezüglich der $\|\cdot\|_p$-Norm.

(a) Nimm an, daß $\mu(\Omega) < \infty$, und zeige daß für $1 \le p < q \le \infty$ jeweils $L^q \subset L^p$ und daß es eine Konstante $C_{pq} > 0$ gibt so daß für $f \in L^q$ stets $\|f\|_p \le C_{pq}\|f\|_q$ gilt.

(b) Sei nun $\Omega = \mathbb{N}, \Sigma = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ die Potenzmenge von $\mathbb{N}$ und $\mu = \zeta$ das Zählmaß. Zeige, daß für $1 \le p < q \le \infty$ stets $L^p \subset L^q$ gilt und außerdem $\|f\|_q \le \|f\|_p$ für alle $f \in L^p$ gilt. **Bemerkung** $L^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \zeta) = l^p = \{(x_n) : \sum |x_k|^p < \infty\}$

(2 mal M)

3. Es sei $X := C[0, 1]$ und weiter $\|f\|_\infty := \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$ und $\|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)|\, dt$.

(a) Zeige, daß $(X, \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum ist, $(X, \|\cdot\|_1)$ jedoch nicht.

(b) Sind die Normen $\|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|_1$ äquivalent? (10 P)

4. Es sei (Ω, d) ein nichtleerer metrischer Raum und $0 < \alpha \le 1$. Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ heißt *Hölderstetig der Ordnung* α , falls es ein $L \ge 0$ gibt, so daß

$$|f(x) - f(y)| \le L d(x, y)^\alpha \quad \forall x, y \in \Omega.$$

Mit $C^\alpha(\Omega)$ bezeichnet man dann den Raum der Hölderstetigen Funktionen der Ordung α. (Allerdings verwendet man für $\alpha = 1$ häufiger die Bezeichnung *Lipschitzstetig* und schreibt $\mathsf{Lip}(\Omega)$ statt $C^1(\Omega)$). Man setze

$$\|f\|_\alpha = \sup \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)^\alpha} \ : \ x \neq y \right\}$$

Zeige nun:

(a) Für jedes $\omega \in \Omega$ ist durch $\|f\|_{\omega,\alpha} := |f(\omega)| + \|f\|_\alpha$ eine Norm auf $C^\alpha(\Omega)$ definiert.

(b) Für festes α sind $\|\cdot\|_{\omega,\alpha}$ und $\|\cdot\|_{\tilde\omega,\alpha}$ für jede Wahl von $\omega, \tilde\omega$ äquivalent.

(c) $(C^\alpha(\Omega), \|\cdot\|_{\omega,\alpha})$ ist ein Banachraum. (10 P)

Universität Ulm
Abteilung Angewandte Analysis

R. Chill
M. Kunze
J. Kuebart
WS 04/05

Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 4

1. Diracfunktional
Es sei $t_0 \in [0,1]$. Zeige, daß das Diracfunktional
$\delta_{t_0} : (C[0,1], \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{C}$, $f \mapsto f(t_0)$ beschränkt ist und berechne $\|\delta_{t_0}\|$. (M)

2. Es sei X ein normierter Raum. Zeige, daß es keine beschränkten Operatoren T, S auf X gibt mit $TS - ST = I$. (M)
Hinweis: Zeige zunächst, daß falls es solche Operatoren gibt, für diese $TS^n - S^nT = nS^{n-1}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gelten muß. Leite daraus einen Widerspruch her.

3. Es sei $D : (C^1[0,1], \|\cdot\|) \to (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ der Ableitungsoperator $Df = f'$. Untersuche, ob D beschränkt ist, und berechne gegebenenfalls die Operatornorm von D falls

(a) $\|f\| = \|f\|_\infty$, oder

(b) $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ (M)

4. Multiplikationsoperator
Es sei $\mathbf{m} \in \ell^\infty$ und $1 < p < \infty$. Zeige, daß durch $M\mathbf{x} := (m_k x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ein beschränkter Operator $M : \ell^p \to \ell^p$ definiert ist. Bestimme $\|M\|$. (10 P)

5. Zeige, daß c und c_0 (jeweils mit der ∞-Norm) isomorph sind. (10 P)

Universität Ulm
Abteilung Angewandte Analysis

R. Chill
M. Kunze
J. Kuebart
WS 04/05

Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 5

1. Zeige, daß in einem Hilbertraum H folgende Aussagen äquivalent sind:

1. $x_n \to x$
2. $(x_n, y) \to (x, y)$ für alle $y \in H$ und $\|x_n\| \to \|x\|$. (M)

Bemerkung: Man sagt, daß x_n schwach gegen x konvergiert (und schreibt $x_n \rightharpoonup x$), falls $(x_n, y) \to (x, y)$ für alle $y \in H$ gilt.

2. Finde einen Hilbertraum H und eine Folge x_n, die schwach konvergiert, aber nicht konvergiert. (M)

3. Bedingter Erwartungswert Es sei (Ω, Σ, μ) ein endlicher Maßraum und $\mathcal{F} \subset \Sigma$ eine sub σ-Algebra. Zeige, daß es für jedes $f \in L^2(\Omega, \Sigma, \mu)$ genau eine $\mathcal{F}$-meßbare Funktion $g \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ gibt, so daß

$$\int_A f\, d\mu = \int_A g\, d\mu$$

für alle $A \in \mathcal{F}$ gilt. Ist $\mu = P$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß, so schreibt man $g = \mathbb{E}(f|\mathcal{F})$ und nennt g die bedingte Erwartung von f gegeben $\mathcal{F}$. (M)

Hinweis: Identifiziere g mit der orthogonalen Projektion von f auf einen geeigneten Unterraum.

4. Orthogonalraum Es sei H ein Hilbertraum und $M \subset H$ eine Teilmenge von H. Zeige nun:

(a) $M^\perp$ ist ein abgeschlossener Unterraum von H.

(b) $(M^\perp)^\perp = \overline{\mathrm{span} M}$.

(c) $\mathrm{span} M$ ist dicht in H genau dann, wenn $M^\perp = 0$. (10 P)

5. Projektionen Sei X ein Banachraum. Ein linearer Operator $P : X \to X$ heißt *Projektion*, falls $P^2 = P$ ist.

(a) Es sei P eine beschränkte Projektion. Zeige:

(i) $Q = I - P$ ist ebenfalls eine Projektion.

(ii) $\mathrm{Rg} Q = \ker P$.

(iii) $\ker P$ und $\mathrm{Rg} P$ sind abgeschlossene Unterräume von X. Weiter gilt $\ker P \cap \mathrm{Rg} P = \{0\}$ und $\ker P + \mathrm{Rg} P = X$. Schlussfolgere, daß sich jeder Vektor $x \in X$ eindeutig als Summe $x_0 + x_1$ schreiben läßt, wobei $x_0 \in \ker P$ und $x_1 \in \mathrm{Rg} P$.

(b) Sei nun $X = H$ ein Hilbertraum und U ein abgeschlossener Unterraum von H. Laut Vorlesung gibt es für jedes $x \in H$ genau ein $x_0 \in U$, so daß $\|x - x_0\| = \min\{\|x - y\| : y \in U\}$. Zeige, daß $P : x \mapsto x_0$ eine beschränkte Projektion ist und daß weiter $(\ker P)^\perp = \mathrm{Rg} P = U$. (10 P)

Bemerkung: Die Projektion P heißt *orthogonale Projektion auf U.*

Universität Ulm
Abteilung Angewandte Analysis

R. Chill
M. Kunze
J. Kuebart
WS 04/05

Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 6

1. Zeige, daß ℓ^∞ nicht separabel ist. (M)

Hinweis: Betrachte die Menge $M := \{\mathbf{x} \in \ell^\infty : x_k \in \{0,1\} \text{ für alle } k \in \mathbb{N}\}$. Zeige zunächst, daß M überabzählbar ist und daß $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_\infty = 1$ für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M$ mit $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$. Folgere hieraus die Behauptung.

2. Sei $H = L^2(0, 2\pi)$ versehen mit dem Skalarprodukt $(f,g) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\,dt$. Für $k \in \mathbb{Z}$ sei $\hat{f}(k) = (f, e_k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt$ der k-te Fourierkoeffizient von f und $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)e_k$ die zugehörige Fourierreihe. Dabei ist $e_k : t \mapsto e^{ikt}$ Es sei nun $f \in C^1([0, 2\pi])$ mit $f(0) = f(2\pi)$. Finde einen Zusammenhang zwischen den Fourierkoeffizienten von f und f' und zeige, daß die Fourierreihe von f gleichmäßig gegen f konvergiert. (M)

Hinweis: Partielle Integration und Cauchy-Schwarz. Zeige für den zweiten Teil zunächst, daß die Fourierreihe gleichmäßig konvergiert und dann, daß der Grenzwert f ist.

3. Hardyraum

Es sei $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ und $\mathsf{H}^2(\mathbb{D})$ gegeben durch

$$\mathsf{H}^2(\mathbb{D}) := \left\{ f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} \text{ holomorph} : \sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} \left|f(re^{it})\right|^2 \frac{dt}{2\pi} < \infty \right\}.$$

$\mathsf{H}^2(\mathbb{D})$ heißt *Hardyraum.* Im folgenden seien f und g holomorphe Funktionen auf $\mathbb{D}$.

(a) Es sei $f(z) = \sum_{k=0}^\infty a_k(f)z^k$. Zeige, daß für $0 < r < 1$

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 \frac{dt}{2\pi} = \sum_{k=0}^\infty |a_k(f)|^2 r^{2k}.$$

(b) Zeige, daß $f \in \mathsf{H}^2(\mathbb{D})$ genau dann, wenn $a(f) = (a_k(f))_{k\in\mathbb{N}_0} \in \ell^2$ ist.

(c) Es seien $f, g \in \mathsf{H}^2(\mathbb{D})$. Zeige, daß

$$(f,g)_{\mathsf{H}^2} := \lim_{r\to 1} \int_0^{2\pi} f(re^{it})\overline{g(re^{it})}\,\frac{dt}{2\pi}$$

existiert und daß $(f,g)_{\mathsf{H}^2} = (a(f), a(g))_{\ell^2}$ ist.

(d) Wegen (c) ist $\mathsf{H}^2(\mathbb{D})$ ein Prähilbertraum und $a : \mathsf{H}^2(\mathbb{D}) \to \ell^2$ eine Isometrie. Zeige, daß a surjektiv ist. (Damit ist $\mathsf{H}^2(\mathbb{D})$ ein Hilbertraum!)

(e) Finde eine Orthonormalbasis von $\mathsf{H}^2(\mathbb{D})$. (20 P)

UNIVERSITÄT ULM
Abteilung Angewandte Analysis

R. Chill
M. Kunze
J. Kuebart
WS 04/05

Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 7

1. Hahn-Banach im Hilbertraum
Es sei H ein Hilbertraum, $U \subset H$ ein abgeschlossener Unterraum. Zeige:

(a) Ist $0 \neq x \in H$, so gibt es ein $\varphi \in H'$ mit $\varphi(x) = \|x\|$.

(b) Ist $x \in H \setminus U$ so gibt es ein $\varphi \in H'$ mit $\varphi(x) \neq 0$ und $\varphi(U) = 0$.

(c) Ist $\varphi \in U'$, so gibt es ein $\psi \in H'$ mit $\psi_{|U} = \varphi$ und $\|\varphi\| = \|\psi\|$. (M)

2. Diracfunktional auf $\mathsf{H}^2(\mathbb{D})$
Es sei $\mathsf{H}^2(\mathbb{D})$ der Hardyraum aus Aufgabe 3/Blatt 6.

(a) Zeige, daß für alle $z_0 \in \mathbb{D}$ das Diracfunktional

$$\delta_{z_0} : \mathsf{H}^2(\mathbb{D}) \to \mathbb{C} \quad , \quad f \mapsto f(z_0)$$

beschränkt ist.
Hinweis: Verwende die Cauchysche Integralformel

(b) Nach dem Satz von Riesz-Fréchet gibt es genau ein $g_{z_0} \in \mathsf{H}^2(\mathbb{D})$ so daß $(f, g_{z_0}) = \delta_{z_0}(f)$ für alle $f \in \mathsf{H}^2(\mathbb{D})$ gilt. Bestimme g_{z_0}. (2 mal M)

3. Zeige, daß

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

(8 P)

Hinweis: Berechne die Fourierreihe der Funktion $t \mapsto \frac{1}{4}(\pi - t)^2$.

4. Äquivalente Skalarprodukte
Es sei $(H, (\,\cdot\,,\,\cdot\,))$ ein Hilbertraum und $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_0$ ein zu $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ äquivalentes Skalarprodukt (d.h. die von $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ und $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_0$ induzierten Normen sind äquivalent). Zeige, daß es einen Isomorphismus $Q \in \mathcal{L}(H, (\,\cdot\,,\,\cdot\,))$ gibt, so daß

$$(x, y)_0 = (x, Qy) \qquad \forall\, x, y \in H\,.$$

Zeige weiter, daß $(Qx, y) = (x, Qy)$ für alle $x, y \in H$ gilt (d.h. Q ist *selbstadjungiert*), und daß es eine Konstante $c > 0$ gibt so daß $(Qx, x) \geq c\|x\|^2$ für alle $x \in H \setminus \{0\}$ (d.h. Q ist *positiv definit*). Zeige umgekehrt:
Ist Q ein beschränkter, selbstadjungierter, positiv definiter Operator, so definiert $(x, y)_0 := (Qx, y)$ ein äquivalentes Skalarprodukt auf H. (12P)
Hinweis: Verwende den Satz von Riesz-Fréchet.

Universität Ulm
Abteilung Angewandte Analysis

R. Chill
M. Kunze
J. Kuebart
WS 04/05

Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 8

1. Es sei $1 \leq p \leq \infty$. Entscheide, ob die Funktion $u : x \mapsto |x|$ in $W^{1,p}(-1,1)$ liegt. Berechne gegebenenfalls die Ableitung. (M)

2. Satz von Schwarz
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen. Zeige, daß für $u \in W^{2,p}(\Omega)$ stets

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} u$$

für $1 \leq i \neq j \leq N$ gilt. (M)

3. Es sei $1 \leq p \leq \infty$, $-\infty < a < b < \infty$, $t_0 \in [a,b]$ und $g \in L^p(a,b)$.
Zeige, daß die Funktion

$$u(t) = \int_{t_0}^{t} g(s)\, ds$$

in $W^{1,p}(a,b)$ liegt und daß $u' = g$. (M)
Hinweis: Verwende die Hölderungleichung und den Satz von Fubini.

4. Es sei $k \geq 1$ und $H^k_{2\pi}(0,2\pi) = \{u \in H^k(0,2\pi) \,:\, u^{(\nu)}(0) = u^{(\nu)}(2\pi)\ \forall\, 0 \leq \nu < k\}$.

(a) Zeige, daß für alle $u \in H^k_{2\pi}(0,2\pi)$ und alle $n \in \mathbb{Z}$ stets

$$\widehat{u^{(k)}}(n) = (in)^k \hat{u}(n)\,.$$

Hinweis: Vergleiche mit Aufgabe 2/ Blatt 6.

(b) Zeige, daß

$$H^k_{2\pi}(0,2\pi) = \left\{ u \in L^2(0,2\pi) \,:\, \left(n^k \hat{u}(n) \right)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2 \right\}\,.$$

Hinweis: Verwende den Satz von Plancherel.

(c) Zeige, daß es zu jedem $f \in L^2(0,2\pi)$ genau ein $u \in H^2_{2\pi}(0,2\pi)$ gibt, mit

$$u - u'' = f\,.$$

(12 P)

Hinweis: Verwende die ersten Teile der Aufgabe und den Satz von Plancherel.

5. Zeige mit Hilfe des Satzes von Riesz-Fréchet, daß es zu jedem $f \in L^2(0,2\pi)$ genau ein $u \in H^2_{2\pi}(0,2\pi)$ gibt, mit

$$u - u'' = f\,.$$

(8 P)

Hinweis: Verwende **nicht** Aufgabe 4, sondern orientiere dich an dem Beispiel aus der Vorlesung.

UNIVERSITÄT ULM
Abteilung Angewandte Analysis

R. Chill
M. Kunze
J. Kuebart
WS 04/05

Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 9

1. Es seien X, Y Banachräume und U ein dichter Unterraum von X. Zeige, daß jeder beschränkte Operator $T : U \to Y$ eindeutig zu einem beschränkten Operator auf X fortgesetzt werden kann. Das heißt, ist $T \in \mathcal{L}(U, Y)$, so gibt es genau ein $\tilde{T} \in \mathcal{L}(X, Y)$, so daß $\tilde{T}_{|U} = T$. (M)

2. Es sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $1 \leq p, q \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Zeige, daß die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} T : L^p(\Omega) & \to & (L^q(\Omega))' \\ f & \mapsto & (g \mapsto \int_\Omega f g \, d\mu) \end{array}$$

wohldefiniert und isometrisch ist. (M)

Bemerkung: Ist $q \neq \infty$ (also $p \neq 1$), so ist T ein Isomorphismus. In dieser Aufgabe ist es *nicht* verlangt, die Isomorphie von T zu zeigen.

3. (a) Zeige, daß $(c_0)'$ isometrisch istomorph zu ℓ^1 ist.
Hinweis: Betrachte die Abbildung $T : \ell^1 \to (c_0)'$, die jedem $\mathbf{a} \in \ell^1$ das Funktional $\varphi_{\mathbf{a}} : c_0 \ni \mathbf{x} \mapsto \sum a_k x_k$ zuordnet.

(b) Zeige, daß $(\ell^1)'$ isometrisch isomorph zu ℓ^∞ ist. (10 P)

4. Annihilator
Es sei X ein normierter Raum, $U \subset X$ eine Teilmenge. Wir definieren den *Annihilator* von U als

$$\mathrm{Ann}(U) := \{x' \in X' : x'(x) = 0 \, \forall \, x \in U\}$$

(a) Zeige, daß $\mathrm{Ann}(U)$ ein abgeschlossener Unterraum von X' ist.

(b) Zeige, daß ein Unterraum U genau dann dicht in X ist, wenn $\mathrm{Ann}(U) = \{0\}$.

(c) Sei nun U ein abgeschlossener Unterraum. Zeige, daß durch

$$\begin{array}{lllllll} \varphi & : & (X/U)' & \to & \mathrm{Ann}(U) & , & x' & \mapsto & x' \circ \pi \\ \psi & : & X'/\mathrm{Ann}(U) & \to & U' & , & x' + \mathrm{Ann}(U) & \mapsto & x'_{|U} \end{array}$$

isometrische Isomorphismen gegeben sind. Hierbei bezeichnet $\pi : x \mapsto x + U$ die kanonische Projektion von X auf X/U. (10 P)

R. Chill
M. Kunze
J. Kuebart
WS 04/05

Übungen zur Funktionalanalysis

Alle Aufgaben auf diesem Blatt sind zusätzlich!

1. Beweise oder widerlege folgende Aussagen:

(a) Ist H ein Hilbertraum und $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ein Orthonormalsystem, so ist die Menge $K(x) := \{\lambda : (x, e_\lambda) \neq 0\}$ für jedes $x \in H$ höchstens abzählbar.

(b) Sind X und Y normierte Räume und ist $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ bijektiv, so ist $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.

(c) Ist $f \in \mathsf{H}^2(\mathbb{D})$, so ist auch $f' \in \mathsf{H}^2(\mathbb{D})$.

(d) Es sei X ein Banachraum und $f : (a, b) \to X$ differenzierbar. Falls $f' \equiv 0$, so ist f konstant.

(e) Ist X ein separabeler Banachraum, so ist auch $\mathcal{L}(X)$ separabel.

(f) Ist $-\infty \leq a < b \leq \infty$, so ist jede Funktion $f \in W^{1,\infty}(a, b)$ Lipschitzstetig.

(6 mal M*)

Banachalgebren

Eine *Banachalgebra* ist ein Paar $(\mathcal{A}, \cdot)$, bestehend aus einem Banachraum $\mathcal{A}$ und einer Multiplikation $\cdot$, die folgende Eigenschaften erfüllt:

1. Es gilt $\|x \cdot y\| \leq \|x\|\|y\|$ für alle $x, y \in \mathcal{A}$.
2. Für alle $x, y, z \in \mathcal{A}$ gelten die Distributivgesetze
$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \text{und} \quad (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z\,.$$
3. Für alle $x, y, z \in \mathcal{A}$ und alle $\lambda \in \mathbb{K}$ gelten die Assoziativgesetze
$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \quad \text{und} \quad \lambda(x \cdot y) = (\lambda x) \cdot y = x \cdot (\lambda y)\,.$$

Eine Banachalgebra $\mathcal{A}$ heißt *kommutativ*, falls $x \cdot y = y \cdot x$ für alle $x, y \in \mathcal{A}$ gilt. Ein Element $e \in \mathcal{A}$ heißt *Einheit*, falls $e \cdot x = x \cdot e = x$ für alle $x \in \mathcal{A}$ gilt. Man sieht leicht, daß eine Banachalgebra höchstens eine Einheit besitzen kann.

Beispiele:

- $\mathbb{C}$ ist mit der gewöhnlichen Multiplikation eine kommutative Banachalgebra mit Einheit 1.
- Ist X ein Banachraum, so ist $\mathcal{L}(X)$ zusammen mit der Komposition von Abbildungen eine Banachalgebra mit Einheit $e = I$. Ist $\dim X > 1$, so ist $\mathcal{L}(X)$ nicht kommutativ.
- Ist K ein kompakter, metrischer Raum, so ist $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ mit der punktweisen Multiplikation eine kommutative Banachalgebra mit Einheit $\mathbb{1} : x \mapsto 1$.

2. Zeige, daß $\ell^1(\mathbb{Z})$ zusammen mit der *Faltung* $\mathbf{x}*\mathbf{y} := (\sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k y_{n-k})_{n\in\mathbb{Z}}$ eine kommutative Banachalgebra mit Einheit $\mathbf{e} = (\delta_{0n})_{n\in\mathbb{Z}}$ ist. (8* P)

Ist $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra mit Einheit e, so heißt ein Element $x \in \mathcal{A}$ *invertierbar*, falls es ein $y \in \mathcal{A}$ gibt, so daß $xy = yx = e$ gilt. In diesem Fall ist y eindeutig, man schreibt $y = x^{-1}$. Man bezeichnet mit $\mathcal{A}^\times$ die Menge der invertierbaren Elemente.

3. Es sei $(\mathcal{A}, \cdot)$ eine Banachalgebra mit Einheit e. Zeige:

(a) $\mathcal{A}^\times$ bildet bezüglich der Multiplikation $\cdot$ eine Gruppe.

(b) Ist $x \in \mathcal{A}$ mit $\|x\| < 1$, so ist $e - x$ invertierbar und $\|(e-x)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|x\|}$.

(c) $\mathcal{A}^\times$ ist offen in $\mathcal{A}$ und die Abbildung $x \mapsto x^{-1}$ ist stetig. (12* P)

Hinweis: Nutze für (b) und (c) die Neumann Reihe.

Es sei $(\mathcal{A}, \cdot)$ eine Banachalgebra. Eine *Involution* auf $\mathcal{A}$ ist eine Abbildung $x \mapsto x^*$, die die Identitäten

$$(x+y)^* = x^* + y^*\ ,\ (\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*\ ,\ (x \cdot y)^* = y^* \cdot x^* \text{ und } x^{**} = x$$

für alle $x, y \in \mathcal{A}$ und alle $\lambda \in \mathbb{K}$ erfüllt.
Eine Banachalgebra mit Involution heißt C^*-*Algebra*, falls $\|x^* \cdot x\| = \|x\|^2$ für alle $x \in \mathcal{A}$ gilt.

Beispielsweise ist $C(K)$ mit der Involution $f^*(t) := \overline{f(t)}$ eine kommutative C^*-Algebra.

4. Ist auf $\mathcal{A}$ eine Involution gegeben, so ist $x \in \mathcal{A}^\times$ genau dann, wenn $x^* \in \mathcal{A}^\times$. Ferner gilt in diesem Fall $(x^*)^{-1} = (x^{-1})^*$. (4* P)

5. Zeige, daß auf der Faltungsalgebra $\ell^1(\mathbb{Z})$ durch $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}^* = (\overline{x_{-n}})_{n\in\mathbb{Z}}$ eine Involution gegeben ist. Macht sie $\ell^1(\mathbb{Z})$ zu einer C^*-Algebra? (6* P)

6. Es sei H ein Hilbertraum.

(a) Zeige, daß es zu jedem $T \in \mathcal{L}(H)$ genau ein $T^* \in \mathcal{L}(H)$ gibt, so daß $(Tx, y) = (x, T^*y)$ für alle $x, y \in H$ gilt. T^* heißt *Adjungierte* von T.

(b) Zeige, daß durch $T \mapsto T^*$ eine Involution auf $\mathcal{L}(H)$ gegeben ist, die $\mathcal{L}(H)$ zu einer C^*-Algebra macht. (10* P)

Das Funktionalanalysis-Team wünscht Euch Frohe Weihnachten und einen erfolgreichen Start ins Jahr 2005

Universität Ulm
Abteilung Angewandte Analysis

R. Chill
M. Kunze
J. Kuebart
WS 04/05

Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 11

1. Sei X reflexiv , $K \subset X$ abgeschlossen und konvex und $x \in X$. Zeige, daß es ein $x_0 \in K$ gibt mit

$$\|x - x_0\| = \inf\{\|x - y\| \,:\, y \in K\}$$

(M)

2. Banachlimes
Es sei $X = \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ der Raum der beschränkten reellwertigen Folgen. Ein lineares Funktional l auf X heißt *Banachlimes*, falls

i) l ist positiv, d.h. $\mathbf{x} \geq 0$ impliziert $l\mathbf{x} \geq 0$ (komponentenweise),

ii) $l \circ L = l$, wobei L der Linksshift ist,

iii) $l(\,(1, 1, 1, \dots)\,) = 1$.

(a) Zeige, daß ein Banachlimes l folgende Eigenschaften besitzt:
   (i) l ist *monoton*, d.h. aus $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ folgt $l\mathbf{x} \leq l\mathbf{y}$.
   (ii) $|l\mathbf{x}| \leq l|\mathbf{x}|$, wobei $|\mathbf{x}| = (|x_k|)$ ist.
   (iii) l ist beschränkt mit Norm 1.
   (iv) Es ist stets $\liminf x_k \leq l\mathbf{x} \leq \limsup x_k$ für alle $\mathbf{x} \in X$.

(b) Zeige, daß es keinen multiplikativen Banachlimes gibt, d. h. für jeden Banachlimes l gibt es $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ so daß $l(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \neq l(\mathbf{x})l(\mathbf{y})$ gilt, wobei $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (x_k y_k)$ ist.

(c) Zeige mittels des Satzes von Hahn-Banach, daß ein Banachlimes existiert.
Hinweis: Zeige, daß die Abbildung $p : \mathbf{x} \mapsto \limsup \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k$ sublinear ist und setze das Funktional $\lim : c \to \mathbb{R}\ \ \mathbf{x} \mapsto \lim x_n$ mit dem Satz von Hahn-Banach fort.

(10 + M + 10)

R. Chill
M. Kunze
J. Kuebart
WS 04/05

Übungen zur Funktionalanalysis

1. Strikte Konvexität

Es sei X ein Banachraum und $K \subset X$ eine konvexe Teilmenge. Eine Funktion $f : K \to \mathbb{R}$ heißt *strikt konvex*, falls

$$f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y)$$

für alle $x, y \in K$ mit $x \neq y$ und alle $t \in (0,1)$ gilt. X selbst heißt strikt konvex, falls $\|\cdot\|$ strikt konvex ist.

Sei X reflexiv, $\emptyset \neq K \subset X$ abgeschlossen und konvex und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig und strikt konvex. Zeige, daß es genau ein $x_0 \in K$ gibt, so daß $f(x_0) = \inf_{x \in K} f(x)$. (M)

2. Optimale Kontrolle

(a) Es sei $K := \{u \in L^\infty(0,1) : \|u\|_\infty \leq 1\}$ aufgefaßt als Teilmenge von $L^p(0,1)$ (wobei $1 < p < \infty$). Zeige, daß K konvex und abgeschlossen ist.

(b) Es seien $x_0 \in \mathbb{R}$ und $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig und konvex gegeben, K wie in (a). Zeige, daß das Problem

$$J(u) = \int_0^1 L(x(t), u(t))\, dt \to \min \quad , \quad u \in K$$

eine Lösung besitzt, wobei hier

$$\begin{cases} x'(t) &= x(t) + u(t) \\ x(0) &= x_0 \end{cases}$$

(10 P)

3. Es ist bekannt (und folgt aus dem Lemma von Zorn), daß jeder Vektorraum eine Vektorraumbasis (oder *Hamelbasis*) besitzt.

Zeige mit Hilfe des Lemmas von Baire, daß in einem unendlichdimensionalen Banachraum jede Vektorraumbasis überabzählbar ist. (10 P)

Bemerkung: Man kann sogar zeigen, daß eine Hamelbasis eines unendlichdimensionalen Banachraumes mindestens die Mächtigkeit von $\mathbb{R}$ besitzt. Wieso ist das eine stärkere Aussage?

Universität Ulm
Abteilung Angewandte Analysis

R. Chill
M. Kunze
J. Kuebart
WS 04/05

Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 13

1. Ein normierter Raum X heißt *strikt konvex*, falls für alle $x \neq y$ mit $\|x\| = \|y\| = 1$ und alle $t \in (0,1)$ stets $\|tx + (1-t)y\| < 1$ gilt.

(a) Es sei X ein strikt konvexer, reflexiver Banachraum, $\emptyset \neq K \subset X$ eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge und $x \notin K$. Zeige, daß es genau ein $x_0 \in K$ gibt mit $\|x - x_0\| = \inf_{y \in K} \|x - y\|$.

(b) Zeige, daß jeder Hilbertraum strikt konvex ist.

(c) Es sei nun ein normierter Raum X gegeben, so daß X' strikt konvex ist. Zeige, daß im (Fortsetzungs-) Satz von Hahn-Banach Eindeutigkeit gilt, d.h. falls $U \neq \{0\}$ ein Unterraum von X ist, so gibt es für jedes $u' \in U'$ genau ein $x' \in X'$ mir $\|x'\| = \|u'\|$ und $x'_{|U} = u'$. (3 mal M)

2. Es seien X, Y Banachräume, $D(T) \subset X$ ein Unterraum und $T : D(T) \to Y$ ein linearer, abgeschlossener, injektiver Operator.

(a) Sei $D(T^{-1}) := \mathrm{Rg}T$ und $T^{-1}y = x$ genau dann, wenn $Tx = y$. Zeige, daß T^{-1} abgeschlossen ist.

(b) Sei T zusätzlich surjektiv. Zeige, daß T^{-1} beschränkt ist. (2 mal M)

3. Es sei (Ω, d) ein metrischer Raum und X ein Banachraum. Eine Funktion $F : \Omega \to X$ heißt *schwach (Lipschitz-) stetig*, falls $x' \circ F$ (Lipschitz-) stetig ist für alle $x' \in X'$.

(a) Zeige, daß eine Funktion $F : \Omega \to X$ genau dann Lipschitzstetig ist, wenn sie schwach Lipschitzstetig ist.

(b) Sei nun $\Omega = Y$ ein normierter Raum (mit der von der Norm induzierten Metrik). Zeige, daß eine lineare Abbildung $F : Y \to X$ genau dann stetig ist, wenn sie schwach stetig ist. (10 P)

Bemerkung: Dies ist allerdings nicht richtig für beliebige stetige Funktionen

4. Es seien X, Y Banachräume.

(a) Es sei $T : X \mapsto Y$ ein beschränkter Operator. Zeige, daß folgende Aussagen äquivalent sind:

1. T ist injektiv und hat abgeschlossenes Bild
2. Es gibt ein $C > 0$, so daß $\|x\| \leq C\|Tx\|$ für alle $x \in X$.

(b) Zeige, daß die Menge

$$\mathcal{M} := \{T \in \mathcal{L}(X,Y) \,:\, T \quad \text{ist injektiv und hat abgeschlossenes Bild}\}$$

offen in $\mathcal{L}(X,Y)$ ist. (10 P)

Universität Ulm
Abteilung Angewandte Analysis

R. Chill
M. Kunze
J. Kuebart
WS 04/05

Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 14

1. Resolventengleichung
Es sei T ein beschränkter Operator und $\lambda, \mu \in \rho(T)$. Zeige, daß dann

$$R(\lambda, T) - R(\mu, T) = (\mu - \lambda)R(\lambda, T)R(\mu, T)$$

gilt. (M)

2. Dunford-Pettis Operatoren
Es seien X, Y zwei Banachräume. Ein beschränkter Operator $T : X \to Y$ heißt *Dunford-Pettis Operator*, falls für alle Folgen $(x_n) \subset X$ aus $x_n \rightharpoonup x$ folgt, daß $Tx_n \to Tx$. Zeige, daß jeder kompakte Operator ein Dunford-Pettis Operator ist. Zeige umgekehrt, daß falls X reflexiv ist, *jeder* Dunford-Pettis Operator kompakt ist. (M)

3. Kernoperatoren
Es sei $k \in C([0, 1]^2)$. Sei der Operator $K : C([0, 1]) \to C([0, 1])$ definiert durch

$$(Kf)(t) = \int_0^1 k(t, s)f(s)\, ds\ .$$

(a) Zeige, daß K kompakt ist.
Hinweis: Verwende den Satz von Arzela-Ascoli.

(b) Zeige, daß K als Operator $L^2(0, 1) \to L^2(0, 1)$ beschränkt ist. Ist K auch kompakt auf L^2 ?.

(8 P)

4. Multiplikationsoperatoren
Es sei $1 < p < \infty$, $\mathbf{a} \in \ell^\infty$ und M der zu $\mathbf{a}$ gehörende Multiplikationsoperator auf ℓ^p (vergleiche Blatt 4, Aufgabe 4).

(a) Zeige: $\sigma(M) = \overline{\{a_n\ : n \in \mathbb{N}\}}$.

(b) Zeige, daß M genau dann kompakt ist, wenn $\mathbf{a} \in c_0$.

(c) Sei K eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{C}$. Zeige, daß es einen beschränkten Operator $T \in \mathcal{L}(X)$ auf einem Banachraum X gibt mit $\sigma(T) = K$.

(12 P)

Universität Ulm
Abteilung Angewandte Analysis

R. Chill
M. Kunze
J. Kuebart
WS 04/05

Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 15

1. Volterraoperator
Sei $X = C([0,1])$. Der *Volterraoperator* V ist definiert durch $(Vf)(t) = \int_0^t f(s)\,ds$.

(a) Zeige, daß V kompakt ist.

(b) Zeige, daß $\sigma(V) = \{0\}$.

(c) Zeige, daß 0 kein Eigenwert von V ist.

(3 mal M*)

2. Satz von Hellinger-Toeplitz
Es sei H ein Hilbertraum und $T : H \to H$ eine lineare, symmetrische (d.h. für alle $x, y \in H$ gilt $(Tx, y) = (x, Ty)$!) Abbildung. Zeige, daß T dann schon beschränkt ist.
Hinweis: Verwende den Satz vom abgeschlossenen Graphen. (M*)

3. Approximatives Punktspektrum
Zeige, daß für einen beschränkten Operator T auf einem Banachraum X das approximative Punktsprektrum $\sigma_{ap}(T)$ stets abgeschlossen ist.

(M*)

4. Spektrale Abbildungssätze
Es sei X ein Banachraum und $T \in \mathcal{L}(X)$. Zeige:

(a) Ist T invertierbar, so ist $\sigma(T^{-1}) = \sigma(T)^{-1} := \{\mu^{-1} : \mu \in \sigma(T)\}$.

(b) Ist $p \in \mathbb{C}[t]$ ein Polynom, so ist $\sigma(p(T)) = p(\sigma(T)) := \{p(\mu) : \mu \in \sigma(T)\}$.
Hinweis: Zeige zunächst mittels des Fundamentalsatzes der Algebra, daß es für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ ein $c \neq 0$ gibt, so daß $p(t) = c \prod_{\mu \in \mathbb{C}, p(\mu)=\lambda} (t - \mu)$.

(2 mal M*)