Laboratoire de Mathématiques et
Applications de Metz

R. Chill
Année 2007/08

Logique et théorie des ensembles

Feuille TD 1

(1) Expliquer pourquoi les énoncés suivants ne sont pas des propositions:
  (a) Quelle heure est-il?
  (b) Fermez la porte!
  (c) Il est malade.
  (d) La Chine est loin.
  (e) Les frites sont bonnes.
  (f) Cet énoncé est faux.
  (g) La phrase suivante est vraie. La phrase précédente est fausse.

(2) On considère les deux propositions suivantes:
- *Si Jupin ne vient pas à moins que Simon vienne, et si Simon ne vient pas à moins que Robert vienne, alors Robert viendra si Jupin vient.*
- *Si Brice envie Antoine ou l'inverse, mais s'ils ne s'envient pas l'un l'autre, alors Brice envie Antoine si et seulement si Antoine n'envie pas Brice.*

On désignera:

Jupin vient	par	J
Simon vient	par	S
Robert vient	par	R
Brice envie Antoine	par	B
Antoine envie Brice	par	A

  (a) Traduire (en procédant par étapes) les deux propositions dans le langage de la logique des propositions.
  (b) Chacune des deux propositions, est-elle tautologique, contradictoire ou neutre? Justifier, par la méthode de votre choix, votre réponse.

(3) Montrer que la notion *d'ensemble des ensembles qui sont pas éléments d'eux-même* est contradictoire. On notera X un tel ensemble et on montrera que la phrase $X \in X$ est un paradoxe.

(4) Arthur, Bernard et Casimir sont soupçonnés d'avoir peint en vert le chat de la voisine. Ils font les déclarations suivantes:
Arthur: *B est coubable et C est innocent.*
Bernard: *Si A est coupable, C aussi.*
Casimir: *Je suis innocent, mais au moins un des deux autres est coupable.*
  (a) Transcrire les trois déclarations dans le langage de la logique des propositions avec des lettres de propositions: a pour *"A est coupable"*, b pour *"B est coupable"*, c pour *"C est coupable"*.
  (b) Répondre aux questions suivantes:
    (i) Si Casimir a menti, que dire de la déclaration d'Arthur?
    (ii) Dans la même hypothèse, que dire de la déclaration de Bernard?
    (iii) En supposant que tous ont dit la vérité, qui est innocent, qui est coupable?

(iv) En supposant que tous sont coupable, qui a menti et qui a dit la vérité?
(v) En supposant que tout innocent dit la vérité et que tout coupable ment, qui est innocent et qui est coupable?
(vi) Que répondre à la question: "en supposant que les innocents ont menti et que les coupables ont dit la vérité, qui est innocent et qui est coupable?"

(5) On dira qu'une formule F est équivalente à une formule G si elles ont la même table de vérité. On écrira alors F éq. G.
Montrer qu'on a:
(a) $p \wedge (q \vee r)$ éq. $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.
(b) $p \vee (q \wedge r)$ éq. $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$.
(c) $\neg(p \wedge q)$ éq. $\neg p \vee \neg q$.
(d) $\neg(p \vee q)$ éq. $\neg p \wedge \neg q$.
(e) $p \rightarrow q$ éq. $\neg p \vee q$.
(f) $\neg(p \rightarrow q)$ éq. $p \wedge \neg q$.

(6) **(Ou exclusif).** La disjonction exclusive 'p ou$_{ex}$ q' est vraie si exactement une des deux propositions p et q est vraie. Si les deux propositions p et q sont simultanément fausses, ou si les deux sont simultanément vraies alors 'p ou$_{ex}$ q' est faux.
(a) Ecrire la table de vérité.
(b) Exprimer la disjonction exclusive en termes des connecteurs logiques $\wedge$, $\vee$, $\neg$ et $\rightarrow$, c.à.d. trouver une formule F telle que F est équivalent à 'p ou$_{ex}$ q'.

(7) Donner la table de vérité de la formule

$$((p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r)$$

et montrer que cette formule est équivalente à $(p \leftrightarrow q) \vee r$.

(8) Etablir par une chaîne d'équivalences que l'on a
(a) $\neg(p \wedge \neg q) \wedge \neg(p \wedge \neg r)$ éq. $\neg(p \wedge \neg(q \wedge r))$.
(b) $p \wedge \neg(q \wedge \neg p)$ éq. p.
(c) $(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)$ éq. $(p \vee q \vee r) \rightarrow (p \wedge q \wedge r)$.
(d) $(p \vee q) \rightarrow (q \wedge r)$ éq. $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$.
La difficulté dans (d) est que quelle que soit la formule de départ, on trouve un terme manifestement superflu. Un emploi approprié des équivalences fondamentales permet de l'éliminer.

Logique et ensembles

Feuille TD 2

(9) Traduire en langage courant par une phrase la plus usuelle possible les formules:
(a) $\forall x\, \forall y\, Hxy$
(b) $\exists x\, \forall y\, Hxy$
(c) $\forall y\, \exists x\, Hxy$
(d) $\forall y\, \forall x\, Hxy$
(e) $\forall x\, \exists y\, Hxy$
où Hxy note: x *aime* y.

(10) Traduire en langage courant par une phrase la plus usuelle possible les formules:
(a) $\exists x\, \forall y\, (Ayx \to Mxy)$
(b) $\exists x\, (\exists y Ayx \to Axx)$
(c) $\forall x\, (\exists y Axy \wedge \exists y Mxy)$
(d) $\exists y\, \forall x (\neg Axy \wedge Mxy)$
où Axy note: x *admire* y et Mxy note: x *méprise* y.

(11) Mettre en formule:
(a) Les ours blancs sont plus grands que tous les autres.
(b) Le diamand peut rayer tous les autres corps.
(c) Si on tire la queue d'un chat, il est mécontent.
(d) Si on tire la queue d'un chat, on a des ennuis.
(e) Il y a des gens qui sont en colère s'ils sont contrariés.
(f) Jupin n'est jamais malade.
(g) Un résultat n'est jamais acquis.
On note: Mx pour x *est un moment*, Axy pour y *est acquis en* x, Ry pour y *est un résultat*, Dx pour x *est du diamant*, Cx pour x *est un corps*, Rxy pour x *peut rayer* y, Cx pour x *est un chat*, Txy pour x *tire la queue de* y, Fx pour x *est mécontent*, Ex pour x *a des ennuis*, Jx pour *Jupin est malade au moment* x, Rx pour x *est un résultat*.

(12) Donner la négation des propositions ou formules suivantes:
(a) Toute peine mérite salaire.
(b) Toutes les françaises sont rousses.
(c) Un ours est plus fort qu'un buffle.
(d) Un malheur n'est jamais bon.
(e) Certains réussissent sans travailler.
(f) $\exists x\, \forall y\, (Axy \to Mxy)$.
(g) $\forall x\, (\exists y\, Axy \wedge \exists y\, Mxy)$.

(13) Montrer par un raisonnement que
(a) $\forall x\, (Fx \vee p)$ équivaut à $\forall x\, Fx \vee p$.
(b) $\neg \forall x\, Fx$ équivaut à $\exists x\, \neg Fx$.

(14) Supposons que dans un langage $\mathcal{L}$ contenant la logique des propositions on interprète les formules de la façon suivante:

- Règle 1: *Une formule qui est une tautologie de la logique des propositions est dite* vraie *ou un* théorème.
- Règle 2: *Si R est une formule vraie et si la formule $R \to S$ est vraie, alors la formule S est vraie.*

(a) On suppose que les formules $p_1, \ldots, p_n$ sont vraies. Montrer alors que si la formule $(p_1 \wedge \cdots \wedge p_n \wedge \neg R) \to R$ est vraie, alors R est vraie.

(b) Le résultat de la question (a) justifie une pratique souvent utilisée en mathématiques: laquelle?

(c) Montrer que s'il existe une formule R telle que R et $\neg R$ sont vraies, alors toute formule S est vraie. Qu'en conclure pour les mathématiques?

Laboratoire de Mathématiques et
Applications de Metz

R. Chill
Année 2007/08

Logique et ensembles

Feuille TD 3

(15) Soit Px: *'x chante'* et q: *'il pleut'*. Traduire par une phrase:
 (1) $\exists x Px \to q$.
 (2) $\exists x(Px \to q)$.
 Dire quand (1) est fausse et quand (2) est fausse. Conclusion?

(16) Soit U un ensemble. On désigne par A (resp. B, resp. C) l'ensemble des éléments de U qui vérifient la propriété p (resp. q, resp. r). On dit que p (resp. q, resp. r) est une propriété caractéristique de A (resp. B, resp. C).
 (a) Donner en fonction de p, q et r une propriété caractéristique de $A \cap B$, $A \cup B$, A^c et $A \triangle B$. Ici, $A^c = U \setminus A$ est le complément de A dans U, et $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ est la différence symétrique de A et B.
 (b) Démontrer en utilisant l'exercice 5 (a) l'associativité des lois $\cap$, $\cup$, $\triangle$ dans l'ensemble des parties dans U.
 (c) Démontrer en utilisant l'exercice 5 (a) les formules:
  (i) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.
  (ii) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.
 (d) Montrer que $A \subset B$ se traduit par $p \to q$. Comment traduit-on alors l'égalité $A = B$?

(17) Soit Ω un ensemble et pour chaque $n \in \mathbb{N}$, soit A_n une partie de Ω. On notera

$$S = \bigcap_{q=0}^{\infty} \bigcup_{n=q}^{\infty} A_n. \tag{1}$$

 (a) Exprimer à l'aide des quanteurs $\forall$, $\exists$, les phrases $\omega \in S$ et $\omega \notin S$.
 (b) On note I l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que

$$\exists q\, ((q \in \mathbb{N}) \wedge (\forall n\, ((n \in \mathbb{N}) \wedge (n \geq q)) \to (\omega \in A_n))).$$

 Exprimer l'ensemble I à l'aide d'une formule ensembliste de type (1).
 (c) Dire lequel des ensembles I ou S est *l'ensemble des $\omega \in \Omega$ qui appartiennent à une infinité des parties* A_n. Trouver alors une description analogue pour l'autre ensemble (I ou S).

 Remarque: On appelle S la limite supérieure et I la limite inférieure des A_n.

(18) Une application $f : E \to F$ entre deux ensembles E et F est appelée *surjection* si pour tout $y \in F$ il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$.
 Soit E un ensemble et soit $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Montrer qu'il n'existe pas de surjection $f : E \to \mathcal{P}(E)$.
 Indication: Raisonnement par l'absurde. Considérer la partie

$$\{x \in E : x \notin f(x)\}.$$