

## Analysis 1

**1. (a)** In Dresden fahren nebeneinander sitzend die 3 Studenten Anton, Bertram und Claudia zur Analysis-Vorlesung mit der Straßenbahn. Ein Student studiert Mathematik auf Bachelor, einer Physik und einer Mathematik auf Lehramt. Die folgenden Axiome gelten

- (1) Claudia sitzt nicht links;
- (2) Anton studiert Mathematik auf Bachelor;
- (3) in der Mitte sitzt nicht der Lehramtsstudent;
- (4) rechts sitzt Bertram.

Man folgere aus den Axiomen das Studienfach von Claudia.

**(b)** Es gibt die drei Gegenstände “Bügeleisen”, “Tomate” und “Klappstuhl”. Ferner gibt es die drei Tätigkeiten “Möhren essen”, “auf der Heizung liegen” und “Buchstabensalat lesen” und die drei Eigenschaften “blau”, “mit Rosen übergossen” und “großbürgerlich”. Die folgenden Axiome gelten:

- (0) Jeder Gegenstand besitzt genau eine Eigenschaft und führt genau eine Tätigkeit aus und zu jeder Eigenschaft und jeder Tätigkeit gibt es mindestens einen Gegenstand, der diese besitzt oder ausführt;
- (1) der Klappstuhl isst keine Möhren;
- (2) das Bügeleisen ist blau;
- (3) auf der Heizung liegt nichts, das großbürgerlich ist;
- (4) die Tomate liest Buchstabensalat;
- (5) das Bügeleisen isst Möhren.

Zeigen Sie, dass das gegebene Axiomensystem *nicht unabhängig* ist, d.h., es gibt mindestens ein Axiom, das bereits aus den anderen folgt.

**(c)** Wir betrachten das Axiomensystem unter (a) jedoch ohne Axiom (4). Wir ergänzen das System um die Axiome

- (4') Bertram sitzt in der Mitte;
- (5') der Physikstudent sitzt rechts.

Zeigen Sie, dass das entstandene Axiomensystem *widerspruchsvoll* ist, d.h., es gibt zwei sich logisch widersprechende Aussagen, die aus den gegebenen Axiomen abgeleitet werden können.

**(d)** In der Situation von Aufgabenteil (a) betrachten wir das folgende Axiomensystem

- (1) Claudia sitzt nicht links;
- (2) Anton studiert Mathematik auf Bachelor;

- (3) der Physikstudent sitzt rechts;
- (4) Claudia studiert nicht auf Lehramt.

Zeigen Sie, dass das gegebene Axiomensystem *unvollständig* ist, d.h., es gibt mindestens zwei verschiedene Möglichkeiten, die Anton, Bertram und Claudia jeweils eine Position in der Straßenbahn (links, mitte, rechts) und ein Studienfach zuordnet, die mit dem Axiomensystem nicht in Widerspruch stehen.

*Bemerkung.* Weitere Erläuterungen zu Axiomensystemen finden Sie im unten stehenden Text entnommen aus W.Walter, Analysis 1, Springer, Berlin, 1990.

**2.** Zeigen Sie folgende Aussagen über reelle Zahlen  $a$  mit Hilfe der Axiome (A1)-(A9).

- (a)  $-(-a) = a$ ;
- (b) falls  $a \neq 0$ , dann gilt  $(a^{-1})^{-1} = a$ .

**3.** Betrachten Sie eine Menge  $K$ , auf der zwei Verknüpfungen “+” (Addition) und “.” (Multiplikation) erklärt sind, so daß die Axiome (A1)-(A5) und (A7)-(A9) gelten. Statt (A6) sollen folgende Axiome gelten:

(A6a)  $K$  besitzt ein von Null verschiedenes Element.

(A6b) Es gibt ein Element  $1 \in K$ , so daß  $a \cdot 1 = a$  für alle  $a \in K$  gilt.

Man folgere daraus  $0 \neq 1$ .

**4.** Bestätigen Sie, dass  $\mathbb{F}_2$  und  $\mathbb{F}_3$  Körper sind.

**Zusatzaufgabe:** Finden Sie einen Körper mit 4 Elementen.

Keine Abgabe dieser Übungsaufgaben, Besprechung in der Übung

### Zum Ablauf der Übung

1. Die Ausgabe der Übungsblätter erfolgt montags in der Vorlesung.

Im Netz können sie unter

<http://www.math.tu-dresden.de/~waurick/Teaching/>

oder unter OPAL gefunden werden. Termin für die Abgabe der schriftlichen Ausarbeitung ist der darauf folgende Montag, 16:30 Uhr; Einwurf in die entsprechend gekennzeichneten Briefkästen. Jedes Übungsblatt wird von zwei Studenten bearbeitet, die jeder jeweils 2 Übungen schriftlich ausarbeiten.

Jedes Übungsblatt ist mit Ausnahme der Zusatzaufgaben, die als besonders schwierig einzuschätzen sind, vollständig zu bearbeiten. Für jede Aufgabe werden 2 Punkte vergeben.

2. Für die Zulassung zur Prüfung sind erforderlich

- (a) die Hälfte der Gesamtpunktzahl aus den Übungsaufgaben,
- (b) Vortragen einer Aufgabe in der Übungsgruppe,
- (c) das Bestehen eines schriftlichen Tests am Ende des Semesters.

**1.10 Bemerkungen zur Axiomatik.** Die folgenden Probleme treten bei jeder axiomatisch festgelegten mathematischen Struktur auf. Wir formulieren sie jedoch nur für den vorliegenden Fall der reellen Zahlen.

(a) *Unabhängigkeit der Axiome.* Sind die Axiome (A 1)–(A 13) voneinander unabhängig, oder sind einige von ihnen überflüssig, d.h. lassen sie sich aus den übrigen Axiomen als Sätze beweisen?

(b) *Widerspruchsfreiheit.* Ist das System der Axiome (A 1)–(A 13) in sich widerspruchsfrei, d.h. ist man sicher, durch Ableitung von Sätzen aus diesen Axiomen nie zu einem Widerspruch zu gelangen?

(c) *Vollständigkeit.* Sind die reellen Zahlen durch die Axiome (A 1)–(A 13) eindeutig charakterisiert, oder gibt es noch andere, von  $\mathbb{R}$  verschiedene mathematische Strukturen, die diesen Axiomen genügen?

Hierzu einige mehr kursorische Bemerkungen. Die Unabhängigkeit eines Axiomensystems beweist man, indem man ein Axiom oder mehrere Axiome streicht und dann eine mathematische Struktur angibt, die zwar allen restlichen, aber nicht den gestrichenen Axiomen genügt. Z.B. ist (A 10) von den Körperaxiomen unabhängig, denn der nur aus zwei Elementen 0 und 1 bestehende Körper genügt den Körperaxiomen, aber es ist wegen  $1 = -1$  unmöglich, eine Menge  $P$  mit  $1 \in P$ ,  $-1 \notin P$  anzugeben. In unserem Axiomensystem gibt es eine ganze Reihe von Abhängigkeiten. Insbesondere läßt sich die Multiplikation mit Hilfe der Addition und der Ordnungsregeln definieren. Die Axiome (A 5)–(A 9) und (A 12) können dann als Sätze bewiesen werden. Dies geht auf O. Hölder [Leipziger Ber. 53 (1901), 1–64; Fortschritte d. Math. 1901, 79] zurück. Eine neuere Darstellung mit Beweisen findet man bei A. Frölicher [Math.-phys. Semesterberichte 19 (1972), 38–54]. Allgemein haftet jedem Axiomensystem eine gewisse Willkür an. Vom formalen Standpunkt aus ist jedes zum ursprünglich gegebenen Axiomensystem äquivalente System gleichberechtigt. Dabei nennt man zwei Axiomensysteme äquivalent, wenn man aus jedem von beiden die Axiome des jeweils anderen als Sätze ableiten kann. In der Praxis wird man sich von der einfachen Formulierbarkeit oder Einsichtigkeit der Axiome leiten lassen. Eine dabei auftretende Abhängigkeit einzelner Axiome von den anderen ist von logischem Interesse, aber sie stiftet kein Unheil.

Das Problem (b), die Widerspruchsfreiheit, birgt tiefliegende logische Schwierigkeiten und kann hier nicht behandelt werden.

Auf die Frage (c) können wir eine Antwort geben. In der Tat ist durch (A 1)–(A 13) das System der reellen Zahlen eindeutig „bis auf Isomorphie“ festgelegt. Ohne diesen Begriff genau zu definieren, sei folgendes bemerkt: In 5.18 wird gezeigt, daß jede reelle Zahl mit Hilfe der in den Axiomen auftretenden Zahlen 0 und 1 in einer normierten Gestalt, nämlich als unendlicher Dualbruch, darstellbar ist.

## Analysis 1

5. Folgern Sie aus den Körperaxiomen:

- (a) Falls  $a, b \in \mathbb{R}$ , dann gibt es genau ein  $x \in \mathbb{R}$  mit  $a + x = b$  (vgl. Satz der Vorlesung).
- (b) Für jede reelle Zahl  $a \neq 0$  gilt  $(-a)^{-1} = -(a^{-1})$ .

Begründen Sie dabei jeden Beweisschritt durch Angabe eines der Axiome (A1) bis (A9).

6. Beweisen Sie die beiden folgenden Aussagen über reelle Zahlen  $a, b \in \mathbb{R}$ :

- (a)  $0 \leq a \leq b \Rightarrow \frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b}$ .
- (b) Für jedes  $\varepsilon > 0$  gilt  $2ab \leq \varepsilon^2 a^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} b^2$ .

7. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen über reelle Zahlen  $a, b, \lambda \in \mathbb{R}$ :

- (a)  $0 < \lambda < 1 \Rightarrow \min\{a, b\} \leq \lambda a + (1 - \lambda)b \leq \max\{a, b\}$ .
- (b)  $a > 0 \Rightarrow a^2 \geq a$ .

8. Let  $a \in \mathbb{R}$ . Show the following assertions.

- (a)  $a = 0$  if and only if for all  $\varepsilon > 0$  we have  $a < \varepsilon$  and  $-a < \varepsilon$ .
- (b)  $a = 0$  if and only if for all  $\varepsilon > 0$  we have  $a \leq \varepsilon$  and  $-a \leq \varepsilon$ .

**Zusatzaufgabe:** Peano hat die natürlichen Zahlen wie folgt definiert:

Die natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$  bilden eine Menge mit den folgenden Eigenschaften:

- (P1) jedem Element  $n \in \mathbb{N}$  ist genau ein Element  $n' \in \mathbb{N}$  zugeordnet.  $n'$  wird *Nachfolger* von  $n$  genannt;
- (P2) es gibt genau ein Element – hier mit 1 bezeichnet – das nicht Nachfolger ist;
- (P3) sind  $n, m \in \mathbb{N}$  mit  $n \neq m$  so gilt  $n' \neq m'$ ;
- (P4) ist  $M \subseteq \mathbb{N}$  mit  $1 \in M$  und folgt aus  $n \in M$  stets  $n' \in M$ , dann gilt  $M = \mathbb{N}$ .

Die Addition natürlicher Zahlen wird wie folgt definiert: Für  $n \in \mathbb{N}$  und  $m \in \mathbb{N}$  setzen wir

$$n + 1 := n' \text{ sowie } n + m' := (n + m)'$$

(Man kann zeigen, dass die so definierte Addition wohldefiniert ist). Zeigen Sie unter Verwendung der angegebenen Axiome (P1)-(P4), dass die folgenden Aussagen gelten:

- (a) Für alle  $k, n, m \in \mathbb{N}$  gilt  $k + (m + n) = (k + m) + n$ .

Hinweis: Wenden Sie für gegebenes  $k, m \in \mathbb{N}$  das Induktionsaxiom (P4) auf die Menge  $M := \{n \in \mathbb{N}; k + (m + n) = (k + m) + n\}$  an.

- (b) Für alle  $n, m \in \mathbb{N}$  gilt  $n + m = m + n$ .

Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Fall  $m = 1$ .

**Abgabetermin (nur die Aufgabe 5):** Montag, 15.10.2012, 16.30 Uhr.