Institut für Analysis
Prof. Dr. R. Chill
Dr. M. Waurick

Analysis 1

A. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ folgt aus $a < b$ und $b < c$ stets $a < c$.

(b) Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ folgt aus $a < b$ stets $a + c < b + c$.

(c) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ folgt aus $0 < a < b$ stets $0 < b^{-1} < a^{-1}$.

B. Für $a, b \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$\max\{a, b\} := \begin{cases} a, & \text{falls } a - b \in \mathbb{R}_{>0} \cup \{0\}, \\ b, & \text{falls } -(a-b) \in \mathbb{R}_{>0}. \end{cases} \qquad \min\{a, b\} := \begin{cases} a, & \text{falls } b - a \in \mathbb{R}_{>0} \cup \{0\}, \\ b, & \text{falls } -(b-a) \in \mathbb{R}_{>0}. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass für reelle Zahlen $a,\, b \in \mathbb{R}$ gilt:

(a) $\max\{a,\, b\} = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$.

(b) $\min\{a,\, b\} = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|)$.

Zusatzaufgabe. Diese Aufgabe dient zur Veranschaulichung, dass scheinbar einfache Sachverhalte schwierige Beweise erfordern können. Besprechen Sie die Peano-Axiome für die natürlichen Zahlen auf Übungsblatt 1 in der Übung. Mit Hilfe dieser Axiome zeige man, dass die dort definierte Addition wohldefiniert ist, d.h., man zeige, dass es für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Menge $f_n \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ von geordneten Paaren $(k, \ell) \in f_n$ gibt, die die Eigenschaften

(a) $(1, n') \in f_n$ und für alle $k, \ell \in \mathbb{N}$ folgt aus $(k, \ell) \in f_n$ stets $(k', \ell') \in f_n$,

(b) für alle $k \in \mathbb{N}$ gibt es $\ell \in \mathbb{N}$ mit $(k, \ell) \in f_n$ und

(c) aus $(k, \ell_1), (k, \ell_2) \in f_n$ folgt $\ell_1 = \ell_2$

besitzt.

Hinweis: Die Menge

$$f_n := \bigcap \{K \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}; (1, n') \in K, \\ \text{für alle } k \in \mathbb{N} \text{ folgt aus } (k, \ell) \in K \text{ für ein } \ell \in \mathbb{N} \text{ stets } (k', \ell') \in K\}$$

leistet das Gewünschte. Um letzteres zu zeigen, gehen Sie in mehreren Schritten vor:

(a) Zeigen Sie, dass $f_n \neq \emptyset$.

(b) Zeigen Sie Eigenschaft (b) mit Axiom (P4).

(c) Zeigen Sie, dass es für jedes $k \in \mathbb{N}$ höchstens ein $\ell \in \mathbb{N}$ gibt mit $(k, \ell) \in f_n$. Benutzen Sie für letzteres ohne Beweis den *Wohlordnungssatz* für natürliche Zahlen, d.h., jede nichtleere Teilmenge $N \subseteq \mathbb{N}$ natürlicher Zahlen besitzt ein kleinstes Element.

Abgabe: Es ist keine Abgabe dieser Aufgaben vorgesehen. Sie sind zum Selbststudium bzw. zur Besprechung in den Übungen in der Woche beginnend mit 15.10.2012 gedacht.