Institut für Analysis
Prof. Dr. R. Chill
Dr. M. Waurick

Analysis 1

Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in \mathbb{R}$ sind $n!$ und $\binom{x}{k}$ wie folgt definiert

$$0! := 1, \quad (n+1)! := n! \cdot (n+1);$$

$$\binom{x}{0} := 1, \quad \binom{x}{n+1} := \binom{x}{n} \cdot \frac{x-n}{n+1}.$$

13. Zeigen Sie, dass für $n, k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

(a) $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$, falls $k \leq n$;

(b) $\displaystyle\binom{n}{k} = 0$, falls $k > n$.

14. Sei $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie:

(a) für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\displaystyle\binom{x+1}{n} = \binom{x}{n} + \binom{x}{n-1}$;

(b) für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $\displaystyle(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.

15. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\displaystyle a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$,

(b) ist $a \neq 1$ so gilt $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$.

16. Let $n \in \mathbb{N}$. Show the following assertions:

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$,

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$,

(c) there exists $\ell \in \mathbb{N}$ such that $\displaystyle 11 \cdot \ell = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 10^k$.

Zusatzaufgabe: (Türme von Hanoi) Gegeben seien 3 Stangen s_1, s_2 und s_3 sowie $n \in \mathbb{N}$ Scheiben. Die Scheiben sind paarweise verschieden groß. Zunächst befinden sich alle Scheiben der Größe nach geordnet mit der größten Scheibe unten gesteckt auf s_1. Man soll nun alle Scheiben von s_1 nach s_3 bringen, indem man folgende Regeln beachtet:

- Man darf nur eine Scheibe auf einmal auf eine andere Stange stecken;
- es darf zu keinem Zeitpunkt eine Scheibe auf einer kleineren Scheibe liegen.

Das Stecken einer Scheibe auf eine andere Stange bezeichne einen Zug. Wieviele Züge werden benötigt?

Abgabe: Montag 29.10.12 bis 16:30 Uhr, Briefkasten C-Flügel.