Institut für Analysis
Prof. Dr. R. Chill
Dr. M. Waurick

Übungsblatt 4
29. 10. 12

Analysis 1

17. A natural number n is called *even*, if there exists $m \in \mathbb{N}$ such that $n = 2m$. Prove the following assertion by induction on $n \in \mathbb{N}$: If n^2 is even, then so is n.
Hint: For all $n \in \mathbb{N}$ it holds $(n+1)^2 = (n-1)^2 + 4n$.

18 (Cauchy-Schwarz-Bunyakowski Ungleichung)**.** Seien a_k, $b_k \in \mathbb{R}$ $(k \in \{1, \ldots, n\})$. Zeigen Sie die Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.$$

Hinweis: Beweisen Sie die Ungleichung im Fall $n = 1$ und $n = 2$ direkt, und beweisen Sie den allgemeinen Fall durch vollständige Induktion.

19. (a) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichungen

$$1 \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2}.$$

(b) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

(c) Berechnen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Summen

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)}.$$

20. Zeigen Sie, dass es für zwei reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ eine rationale Zahl $q \in \mathbb{Q}$ und eine irrationale Zahl $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit der Eigenschaft $q, r \in (a, b)$ gibt.

Zusatzaufgabe: Zeigen Sie, dass es genau eine Zahl $e \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} \leq e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Hinweis: Beweisen Sie dazu die Ungleichungen $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ und $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \geq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}$.

Spaßaufgabe: Die Aussage „Alle natürlichen Zahlen sind gleich.“ wird wie folgt „bewiesen“: Durch vollständige Induktion zeigen wir, dass jede n-elementige Menge natürlicher Zahlen nur gleiche Zahlen enthält. Induktionsanfang ($n = 1$): Eine natürliche Zahl ist mit sich selbst gleich.
Induktionsschritt (von n auf $n + 1$): Haben wir eine Menge $n + 1$ natürlicher Zahlen, so wählen wir zwei verschiedene n-elementige Teilmengen. Nach Induktionsvoraussetzung bestehen diese beiden Teilmengen aus gleichen natürlichen Zahlen, somit auch die ganze Menge, da wir ja 2 verschiedene n-elementige Teilmengen gewählt haben.
Wo steckt der Fehler?

Abgabe (Aufgaben 17-20): Montag 5.11.12 bis 16:30 Uhr, Briefkasten C-Flügel.