Institut für Analysis
Prof. Dr. R. Chill
Dr. M. Waurick

Übungsblatt 5
05. 11. 12

Analysis 1

21. Entscheiden Sie, ob die angegebenen Folgen konvergent sind und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Grenzwerte:

(a) $\left(\frac{n^4}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$,

(b) $\left(1+\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$,

(c) $\left(\frac{n^2+\sqrt{5}^4-3n}{4n^2+1234n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$,

(d) $(\operatorname{sgn}((-n)^n))_{n\in\mathbb{N}}$,

(e) $(\max\{-n^2,0\})_{n\in\mathbb{N}}$.

22. Let $A \subseteq \mathbb{R}$ be bounded from above. Show that there exists a sequence $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A such that $s_n \to \sup A$ as $n \to \infty$.

23. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ heißt *monoton*, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $x_n \leq x_{n+1}$ oder für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $x_n \geq x_{n+1}$ gilt.

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte, monotone Folge in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist und bestimmen Sie den Grenzwert.

24. (a) Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist und die Gleichung

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} y_n$$

gilt.

(b) Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{R}$. Die Folge $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei konvergent. Folgt daraus die Konvergenz von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Zusatzaufgabe: Gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen, sodass

$$\mathbb{R} = \{y \in \mathbb{R}; y \text{ ist Häufungswert von } (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\}?$$

Abgabe: Montag 12.11.12 bis 16:30 Uhr, Briefkasten C-Flügel.