

Analysis 1

25. Consider the sequence $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ given by

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \dots \right).$$

(a) Show that every rational number in the interval $[0, 1]$ is an accumulation value of $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(b) Show that every real number in the interval $[0, 1]$ is an accumulation value of $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
Hint: Use part (a) and exercise 20.

26. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathbb{R} . Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist genau dann konvergent, wenn $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist und nur einen Häufungswert besitzt.

(b) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist genau dann konvergent, wenn es $x \in \mathbb{R}$ gibt mit $\limsup_{n \rightarrow \infty} |x_n - x| = 0$.

27. Berechnen Sie für die angegebenen Zahlenfolgen Häufungswerte, Limes superior und Limes inferior:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \left(\frac{1 + (-1)^n n}{2n + (-1)^n} \right)_{n \in \mathbb{N}}, & \text{(b)} \left(\frac{n}{n + (-1)^n (n-1)} \right)_{n \in \mathbb{N}}, \\ \text{(c)} \left((-1)^n \frac{n}{n+1} \right)_{n \in \mathbb{N}}, & \text{(d)} \left(\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 + 2} \right)_{n \in \mathbb{N}}. \end{array}$$

28. (a) Seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkte Folgen in \mathbb{R} . Zeigen Sie

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

(b) Gilt in Aufgabenteil (a) sogar Gleichheit?

Zusatzaufgabe: Für $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R} definieren wir das arithmetische Mittel (auch: *Cesaro-Mittel*) für $n \in \mathbb{N}$ durch

$$y_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k.$$

Zeigen Sie, dass aus der Konvergenz von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Konvergenz von $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ folgt und dass die Konvergenz von $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht hinreichend für die Konvergenz von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist.

Abgabe: Montag 19.11.12 bis 16:30 Uhr, Briefkasten C-Flügel.