Institut für Analysis
Prof. Dr. R. Chill
Dr. M. Waurick

Übungsblatt 7
19. 11. 12

Analysis 1

29. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die *n-te Wurzel* einer nicht-negativen reellen Zahl r analog zur Quadratwurzel als diejenige nicht-negative reelle Zahl q mit $q^n = r$. Wir schreiben $\sqrt[n]{r} := r^{\frac{1}{n}} := q$. Insbesondere ist q eindeutig bestimmt.

Sei $x > 0$. Zeigen Sie, dass die Folgen $(\sqrt[n]{x})_{n\in\mathbb{N}}$, $(\sqrt[n]{n})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 1 konvergent sind und dass die Folge $(\sqrt[n]{n!})_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt divergent gegen $+\infty$ ist.

Hinweis: Benutzen Sie für den Nachweis der Konvergenz Satz 2.1.6 (c) aus der Vorlesung und den Binomischen Lehrsatz oder die Bernoullische Ungleichung.

30. Show that the following sequences are convergent and compute their limits.

(a) $\left(\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(b) $\left((-1)^n\dfrac{n^2}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(c) $\left(\prod_{k=2}^{n}\left(1-\dfrac{1}{k^2}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

31 (Verdichtungssatz von Cauchy)**.** Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge positiver reeller Zahlen. Für $n \in \mathbb{N}$ setze $b_n := 2^n a_{2^n}$. Zeigen Sie die folgende Äquivalenz:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist summierbar } \Leftrightarrow (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist summierbar.}$$

32. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^3}$,

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$,

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}k^4\,x^k$ mit $x \in \mathbb{R}$, $|x| < 1$,

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\,\frac{k+1}{2+k^3}$.

Zusatzaufgabe (Entwicklung in b-adische Brüche)**.** Sei $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$. Zeigen Sie: Zu jedem $x \in (0,1]$ existiert eine eindeutige Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a_k \in \{0,1,\ldots,b-1\}$,

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\,b^{-k} \text{ und für alle } n \in \mathbb{N} \text{ gilt } 0 < r_n := x - \sum_{k=1}^{n} a_k\,b^{-k}.$$

Hinweis: Für $n \in \mathbb{N}$ setze $a_n \in \{0,1,\ldots,b-1\}$ mit $r_n b^n \in (0,1]$. Die Bedingung $r_n > 0$ bedeutet, dass ab einer beliebigen Stelle nicht alle a_n gleich Null sein können. Veranschaulichen Sie sich diesen Sachverhalt anhand des Spezialfalls $b = 10$ und $x = 1$.
Bemerkung: Anstelle von $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\,b^{-k}$ schreibt man auch $x = 0, a_1a_2a_3a_4\ldots$.

Abgabe: Montag 26.11.12 bis 16:30 Uhr, Briefkasten C-Flügel.