Analysis 1

33. Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz oder Divergenz:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n$; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n}$;

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{n^3 - 3n + 1}$; (e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (\frac{1}{\sqrt{n}-1} + \frac{1}{\sqrt{n}+1})$; (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

34. Zeigen Sie die folgenden Gleichungen für eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$:

(i) $z\overline{z} = |z|^2 = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$; (ii) $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$;

(iii) $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$; (iv) $z^{-1} = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|^2} - i\frac{\operatorname{Im} z}{|z|^2} \quad (z \neq 0)$.

35. Skizzieren Sie diejenigen komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ in der Gauß'schen Zahlenebene, die jeweils den folgenden Bedingungen genügen:

(i) $|z-1| < |z+1|$; (ii) $|z - z_0| = r$ für ein $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r > 0$;

(iii) $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2}$; (iv) $|z-2| + |z+2| = 10$.

36. Denote the limit of the Leibniz series

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

by s. Prove the convergence of the series

(i) $s^+ := 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + + - \ldots$, (ii) $s^- := 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + - - \ldots$

and express the respective limits in terms of s.
Hint: $s^+_{3n} + s^-_{3n} = s_{2n} + s_{4n}$ and $\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{4k+2} - \frac{1}{4k+4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}\right)$ for all $n \in \mathbb{N}$ and $k \in \mathbb{N}$.

Zusatzaufgabe (Riemannscher Umordnungssatz). Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ reeller Zahlen sei konvergent aber nicht absolut konvergent. Zeigen Sie, dass es für jedes $s \in \mathbb{R}$ eine Umordnung $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gibt mit $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$.

Abgabe: Montag 03.12.12 bis 16:30 Uhr, Briefkasten C-Flügel.