Institut für Analysis
Prof. Dr. R. Chill
Dr. M. Waurick

Übungsblatt 9
03. 12. 12

Analysis 1

37. (a) Prove De Moivre's formula

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi \qquad (n\in\mathbb{N}_0,\ \varphi\in\mathbb{R}).$$

(b) Prove the addition theorems for cos and sin: For $\varphi,\psi\in\mathbb{R}$ we have

$$\begin{aligned}\sin(\varphi+\psi) &= \sin(\varphi)\cos(\psi)+\cos(\varphi)\sin(\varphi),\\ \cos(\varphi+\psi) &= \cos(\varphi)\cos(\psi)-\sin(\varphi)\sin(\psi).\end{aligned}$$

38. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen. Wir setzen $r := \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ sowie

$$\rho := \begin{cases}\frac{1}{r}, & r\in(0,\infty),\\ 0, & r=\infty,\\ \infty, & r=0.\end{cases}$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen für komplexe Zahlen $z\in\mathbb{C}$:

(a) Ist $|z|<\rho$ so ist $\sum_{n=1}^\infty a_n z^n$ absolut konvergent.

(b) Ist $|z|>\rho$ so ist $\sum_{n=1}^\infty a_n z^n$ divergent.

Hinweis: Benutzen Sie das Wurzelkriterium.

Bemerkung: Die Zahl ρ wird auch *Konvergenzradius* der sogenannten Potenzreihe $\sum_{n=1}^\infty a_n z^n$ genannt. Die Formel "$\rho = \left(\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1}$" heißt *Formel von Cauchy-Hadamard.*

39. Für alle $\alpha\in\mathbb{R}$ und alle $x\in\mathbb{R}$ mit $|x|<1$ ist die binomische Reihe $b_\alpha(x)$ definiert durch

$$b_\alpha(x) := \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n} x^n$$

Zeigen Sie für alle $x\in\mathbb{R}$ mit $|x|<1$:

(a) Die binomische Reihe $b_\alpha(x)$ ist für alle $\alpha\in\mathbb{R}$ absolut konvergent.

(b) Es gilt $b_\alpha(x)\cdot b_\beta(x) = b_{\alpha+\beta}(x)$ für alle $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

(c) Es gilt $b_0(x)=1$ und für $\alpha\in\mathbb{R}$ gilt $b_{-\alpha}(x) = b_\alpha(x)^{-1}$ und $b_\alpha(x)>0$.

(d) Es ist $b_\alpha(x) = (1+x)^\alpha$ für alle $\alpha\in\mathbb{Z}$.

(e) Es ist $b_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{1+x}$.

Hinweis: Für Binomialkoeffizienten gilt

$$\binom{\alpha+\beta}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k},$$

was ohne Beweis verwendet werden darf.

40. Die *Hyperbelfunktionen* oder *hyperbolischen Funktionen* Cosinus hyperbolicus und Sinus hyperbolicus sind definiert durch

$$\cosh(x) := \tfrac{1}{2}\big(\exp(x) + \exp(-x)\big) \quad \text{und} \quad \sinh(x) := \tfrac{1}{2}\big(\exp(x) - \exp(-x)\big) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

(a) Bestätigen Sie die Formel

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

(b) Skizzieren Sie die Menge aller $z \in \mathbb{C}$, so dass

$$(\operatorname{Im} z)^2 - (\operatorname{Re} z)^2 = 1$$

gilt.

Zusatzaufgabe Zeigen Sie, dass $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ irrational ist.
Hinweis: Gegenteil annehmen und $n!e = n! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ für geeignetes $n \in \mathbb{N}$ betrachten.

Abgabe: Montag 10.12.12 bis 16:30 Uhr, Briefkasten C-Flügel.