

Analysis 1

41. Докажите $e^{i\pi} + 1 = 0$.

42. Bestimmen Sie die Grenzwerte der angegebenen Funktion in 0, falls diese existieren.

(a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$

(b) $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

(c) $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Hinweis: Verwenden Sie, dass $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

43. Determine the points of continuity of the following mappings.

(a) (Dirichlet function) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

(b) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto xf(x)$ with f from part (a).

(c) $h : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^4 - 3 \sin\left(\sqrt{|x|}\right) - \tan(x)}{\cosh(x) \cos(x)}$.

44. (a) Für die stetige Funktion $f : [0, 2] \cap \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 - 2$ gilt $f(0) = -2 < 0$ und $f(2) = 2 > 0$. Zeigen Sie, dass f keine Nullstelle besitzt. Warum ist das kein Widerspruch zum Mittelwertsatz?

(b) Zeigen Sie, dass es $x > 0$ gibt, so dass $(1 + x^3)\sqrt{x} = 1$.

Zusatzaufgabe. In welchen Punkten ist die nachstehende Funktion g stetig und in welchen nicht

$$g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 0, & x \in (0, \infty) \setminus \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \text{ mit } p, q \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd} \end{cases} ?$$

Abgabe: Montag 17.12.12 bis 16:30 Uhr, Briefkasten C-Flügel.