Institut für Analysis
Prof. Dr. R. Chill
Dr. M. Waurick

Übungsblatt 11
17. 12. 12

Analysis 1

45. (a) Let $n \in \mathbb{N}$ be odd and $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ with $a_n \neq 0$. Show that the polynomial $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{k=0}^{n} x^k a_k$ has at least one root, i.e., there exists $x_0 \in \mathbb{R}$ such that $p(x_0) = 0$.

(b) Let $a, b \in \mathbb{R}$ with $a < b$. Show that every continuous function $f : [a, b] \to [a, b]$ has a fixed point, i.e., there exists $x \in [a, b]$ such that $f(x) = x$.

46. Zeigen Sie, dass die Funktionen $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sowie $\cosh : [0, \infty) \to [1, \infty)$ streng monoton und bijektiv sind und dass deren Umkehrfunktionen stetig sind.

Bemerkung: Die Umkehrfunktionen sind die sogenannten *Areafunktionen* Arsinh (Area Sinus hyperbolicus) bzw. Arcosh (Area Cosinus hyperbolicus) und sind gegeben durch

$$\operatorname{Arsinh}(x) = \ln\big(x + \sqrt{x^2+1}\big) \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad \operatorname{Arcosh}(x) = \ln\big(x + \sqrt{x^2-1}\big) \quad (x \in [1, \infty)).$$

47. Sei $M \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in M$. Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heißt *unterhalbstetig in* x_0, falls für alle Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in M, die gegen x_0 konvergieren, gilt

$$f(x_0) \leq \liminf_{n \to \infty} f(x_n).$$

f heißt *unterhalbstetig*, falls für alle $x \in M$ die Abbildung f unterhalbstetig in x ist.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $f(0) = 0$ unterhalbstetig ist.

(b) Geben Sie ein Beispiel einer unterhalbstetigen Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, die kein Maximum besitzt.

(c) Zeigen Sie, dass jede auf einem abgeschlossenen, beschränkten Intervall definierte, unterhalbstetige Funktion ein Minimum besitzt.

48. Wir definieren $f : [1, 16] \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\cos(\ln(\sqrt{x})+1)}{\tanh(x^2)+1}$. Zeigen Sie, dass f Maximum, Minimum und mindestens eine Nullstelle besitzt.

Zusatzaufgabe. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt *konvex*, falls für alle $x, y \in I$ und $\lambda \in [0, 1]$ gilt

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Zeigen Sie, dass auf einem offenen Intervall jede konvexe Funktion stetig ist. Gilt diese Aussage auch für nicht offene Intervalle?

Abgabe: Montag 07.01.13 bis 16:30 Uhr, Briefkasten C-Flügel.

FRÖHLICHE WEIHNACHTEN!