

Analysis 1

53. Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin(x))^2}{\sin(x^2)} & \text{(b)} \lim_{x \rightarrow 0} x \log(x) & \text{(c)} \lim_{x \rightarrow 0} x^x \\ \text{(d)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} \quad (a, b > 0) & \text{(e)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} & \text{(f)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{|x|}. \end{array}$$

54. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

beliebig oft differenzierbar ist und dass $f^{(n)}(0) = 0$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$.

55. Let $I \subseteq \mathbb{R}$ be an interval. Let $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ be differentiable. Show the following assertions.

- (a) If f' is bounded, then f is Lipschitz continuous.
- (b) If f is continuously differentiable and I is bounded and closed, then f is Lipschitz continuous.

56. Ein Archäologe findet an einer Steilwand die Rückstände eines Fossils eines Archaeopteryx. Das Fossil misst vom Boden aus gemessen 60 cm Höhe. Um das Fossil zu fotografieren benutzt der Archäologe ein Stativ, das die Linse des Fotoapparats in 1,68 m Höhe arretiert. Berechnen Sie den Abstand des Stativs von der Steilwand, den der Archäologe nehmen muss, um das Fossil unter dem größtmöglichen Winkel zu fotografieren.

Zusatzaufgabe. Zeigen Sie den Satz von Darboux: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(a) < f'(b)$. Dann gibt es für jedes $\xi \in (f'(a), f'(b))$ ein $x \in (a, b)$ mit $f'(x) = \xi$.

Warum folgt der Satz nicht aus dem Zwischenwertsatz angewendet auf f' ?

Abgabe: Montag 21.01.13 bis 16:30 Uhr, Briefkasten C-Flügel.