Dr. Ralph Chill
Dipl. Math. Sibylle Schweiker

Übungen zur Funktionalanalysis

1. Sei (M,d) ein metrischer Raum, $x \in M$ und $r \geq 0$. Zeige:
   (a) $B(x,r) := \{y \in M : d(x,y) < r\}$ ist offen.
   (b) $\bar{B}(x,r) := \{y \in M : d(x,y) \leq r\}$ ist abgeschlossen.

2. Sei
$$l^1 := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty\}$$
   und
$$\|x\|_1 := \|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_1 := \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|.$$
   Zeige, daß $(l^1, \|\cdot\|_1)$ ein normierter Raum ist.

3. Zeige, daß die Normen $\|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|_1$ auf $C[0,1] := \{f : [0,1] \to \mathbb{K} : f \text{ ist stetig}\}$ nicht äquivalent sind, wobei für $f \in C[0,1]$
$$\begin{aligned} \|f\|_\infty &:= \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| \text{ und} \\ \|f\|_1 &:= \int_0^1 |f(t)|\,dt. \end{aligned}$$

4. Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, und F ein abgeschlossener Unterraum. Man definiert den *Quotientenraum* E/F als die Menge aller *Nebenklassen*
$$x + F := \{x + y : y \in F\}.$$
   Zeige:
   (a) Die Addition $(x+F)+(y+F) := x+y+F$ und die Multiplikation $\lambda(x+F) := \lambda x + F$ ($x, y \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$) sind wohldefiniert, und E/F wird bzgl. dieser Addition und Multiplikation zu einem Vektorraum.
   (b) Die Abbildung
$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{E/F} : E/F &\to \mathbb{R}_+ \\ x + F &\mapsto \|x+F\| := d(x,F) \end{aligned}$$
   definiert eine Norm auf E/F .

Dr. Ralph Chill
Dipl. Math. Sibylle Schweiker

Übungen zur Funktionalanalysis

5. Sei E ein normierter Raum, $x \in E$, $r > 0$. Zeige:
$$\overline{B(x,r)} = \bar{B}(x,r).$$
Finde ein Beispiel eines metrischen Raumes (M,d) und $x \in M$, so daß $\overline{B(x,r)} \neq \bar{B}(x,r)$.

6. (a) Zeige, daß $(l^1, \|\cdot\|_1)$ ein separabler Banachraum ist.
(b) Zeige, daß $c_0 := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$ versehen mit der Supremumsnorm ein separabler Banachraum ist.
Hinweis: $(l^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ ist ein Banachraum.

7. Sei E ein Banachraum und F ein abgeschlossener Unterraum. Dann ist der Quotientenraum E/F ebenfalls ein Banachraum.

8. **Lineare Algebra und Analysis.** Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein unendlichdimensionaler Banachraum. Zeige, daß jedes *Erzeugendensystem* $S \subset E$ überabzählbar ist. Dabei heißt eine Menge $S \subset E$ Erzeugendensystem, falls sich jedes Element $x \in E$ als endliche Linearkombination von Elementen in S schreiben läßt.
Anleitung: Man nehme an, daß es ein abzählbares Erzeugendensystem gibt, und führe dies mit dem Baireschen Kategoriensatz zu einem Widerspruch.

Dr. Ralph Chill
Dipl. Math. Sibylle Schweiker

Übungen zur Funktionalanalysis

9. **Diracfunktional.** Zeige, daß die lineare Abbildung
$$\begin{aligned} \delta_0 : C[0,1] &\to \mathbb{K} \\ f &\mapsto f(0) \end{aligned}$$
beschränkt ist, und berechne die Norm von δ_0 .

10. **Kernoperatoren.** Sei $k \in C([0,1] \times [0,1])$ und
$$(Kf)(t) := \int_0^1 k(t,s) f(s)\, ds, \quad f \in C[0,1],\ t \in [0,1].$$
Zeige:
(a) $K : C[0,1] \to C[0,1]$ ist linearer, beschränkter Operator.
(b) $K(\overline{B(0,1)}) = \{Kf : f \in C[0,1], \|f\|_\infty \leq 1\}$ ist relativ kompakt. Hinweis: Verwende den Satz von Arzela-Ascoli.

11. Sei E ein normierter Raum und F ein abgeschlossener Unterraum. Dann ist die *Quotientenabbildung*
$$\begin{aligned} Q : E &\to E/F \\ x &\mapsto x + F \end{aligned}$$
linear und beschränkt.

12. Seien E , F Vektorräume über $\mathbb{K}$, und sei $T : E \to F$ linear. Man beachte, daß $\operatorname{Kern} T$ bzw. $\operatorname{Bild} T$ Unterräume von E bzw. F sind. Zeige:
(a) Die Abbildung
$$\begin{aligned} b_T : E/\operatorname{Kern} T &\to \operatorname{Bild} T \\ x + \operatorname{Kern} T &\mapsto Tx \end{aligned}$$
ist wohldefiniert, linear und bijektiv.
(b) Falls E und F normierte Räume sind und T beschränkt ist, dann ist $\operatorname{Kern} T$ abgeschlossen in E , und b_T ist beschränkt.

Dr. Ralph Chill
Dipl. Math. Sibylle Schweiker

Übungen zur Funktionalanalysis

13. Seien E ein normierter Raum und $\varphi : E \to \mathbb{K}$ eine lineare Abbildung. Zeige, daß φ genau dann beschränkt ist, wenn $\operatorname{Kern} \varphi$ abgeschlossen in E ist.
    Hinweis: Benutze die Aufgaben 11 und 12 (a).

14. Sei
    $$c := \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^\infty : \lim_{n \to \infty} x_n \text{ existiert}\}$$
    der Raum aller konvergenten Folgen. Versehen mit der Supremumsnorm ist c ein abgeschlossener Teilraum von l^∞. Zeige, daß die Räume c und c_0 isomorph sind.

15. Zeige, daß die Abbildung
    $$\begin{aligned} J : l^1 &\to c_0' := \mathcal{L}(c_0, \mathbb{K}), \\ x &\mapsto \varphi_x, \end{aligned}$$
    wobei
    $$\begin{aligned} \varphi_x : c_0 &\to \mathbb{K}, \\ y &\mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n y_n, \end{aligned}$$
    eine lineare, bijektive Isometrie ist.

16. **Individuelles und globales exponentielles Wachstum.** Sei $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ eine Familie von beschränkten linearen Operatoren auf einem Banachraum E. Für alle $x \in E$ sei die Funktion $t \mapsto T_t x$ exponentiell beschränkt, d.h. es gibt ein $M_x \geq 0$ und ein $\omega_x \in \mathbb{R}$, so daß $\|T_t x\| \leq M_x e^{\omega_x t}$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$. Zeige, daß dann $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ schon exponentiell beschränkt in $\mathcal{L}(E)$ ist, d.h. es gibt $M \geq 0$ und $\omega \in \mathbb{R}$, so daß $\|T_t\|_{\mathcal{L}(E)} \leq M e^{\omega t}$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$.
    Hinweis: Verfahre ähnlich wie im Beweis des Satzes von Banach-Steinhaus.

Dr. Ralph Chill
Dipl. Math. Sibylle Schweiker

Übungen zur Funktionalanalysis

17. Sei $I = [a, b] \subset [0, 1]$ ein abgeschlossenes Teilintervall und
$$F_I := \{f \in C[0, 1] : f|_I = 0\}.$$
Dann ist F_I ein abgeschlossener Teilraum von $C[0, 1]$. Zeige, daß der Quotientenraum $C[0, 1]/F_I$ isomorph zu $C(I) := \{f : I \to \mathbb{K} : f \text{ ist stetig}\}$ ist.
Anleitung: Finde einen geeigneten, surjektiven, beschränkten Operator von $C[0, 1]$ nach $C(I)$, dessen Kern F_I ist, und benutze Aufgabe 12.

18. Sei E ein beliebiger Banachraum. Zeige, daß es keine zwei Operatoren P, $Q \in \mathcal{L}(E)$ mit der Eigenschaft $PQ - QP = I$ gibt.
Anleitung: Man nehme an, daß es zwei beschränkte Operatoren P, $Q \in \mathcal{L}(E)$ mit der Eigenschaft $PQ - QP = I$ gibt, und zeige durch Induktion, daß dann für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung $PQ^n - Q^n P = nQ^{n-1}$ gelten muss. Eine Normabschätzung führt dann zum Widerspruch.
Anmerkung: In der Quantenmechanik erfüllt ein Paar P, Q von linearen Operatoren mit der Eigenschaft $PQ - QP = I$ die Heisenbergsche Unschärferelation. Die Aufgabe zeigt, daß die in der Quantenmechanik auftretenden Operatoren, für die die Heisenbergsche Unschärferelation gilt, notwendigerweise unbeschränkt sein müssen.

19. (a) Sei $E = c_0$ (oder $E = l^\infty$) und sei $m = (m_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty$. Berechne das Spektrum des Multiplikationsoperators $M \in \mathcal{L}(E)$, der durch
$$M(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (m_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E,$$
definiert ist.
(b) Jede kompakte Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{C}$ ist das Spektrum eines geeigneten Operators auf einem geeigneten (komplexen) Banachraum.

20. **Resolventengleichung.** Seien $T \in \mathcal{L}(E)$, λ, $\mu \in \varrho(T)$. Dann gilt die Resolventengleichung
$$R(\lambda, T) - R(\mu, T) = (\mu - \lambda) R(\lambda, T) R(\mu, T).$$

Dr. Ralph Chill
Dipl. Math. Sibylle Schweiker

Übungen zur Funktionalanalysis

21. **Projektionen.** Sei E ein normierter Raum. Eine lineare Abbildung $P : E \to E$ heißt *Projektion*, falls $P^2 = P$ gilt. Sei $P \in \mathcal{L}(E)$ eine Projektion. Zeige:
(a) $Q := I - P$ ist ebenfalls eine Projektion.
(b) $\operatorname{Bild} P = \operatorname{Kern} Q$.
(c) $\operatorname{Kern} P$ und $\operatorname{Bild} P$ sind abgeschlossen in E .
(d) $\operatorname{Kern} P \cap \operatorname{Bild} P = \{0\}$.
(e) $\operatorname{Kern} P + \operatorname{Bild} P = E$.
Anmerkung: Aus (d) und (e) folgt, daß sich jedes Element $x \in E$ *eindeutig* als Summe zweier Elemente $x_1 \in \operatorname{Kern} P$ und $x_2 \in \operatorname{Bild} P$ schreiben läßt. Wer will, kann auch noch zeigen, daß E und $\operatorname{Kern} P \times \operatorname{Bild} P$ isomorph sind.

22. **Shifthalbgruppe.** Sei $E := BUC(\mathbb{R}_+) := \{f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{K} : f$ ist beschränkt und gleichmässig stetig$\}$ versehen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$. Für alle $t \geq 0$ sei
$$(S(t)f)(x) := f(t+x), \quad f \in E, x \in \mathbb{R}_+.$$
Zeige, daß für alle $s, t \in \mathbb{R}_+$ $S(t) \in \mathcal{L}(E)$ und $S(t+s) = S(t)S(s)$ gilt, und daß die Abbildung $t \mapsto S(t)f$ für alle $f \in E$ stetig von $\mathbb{R}_+$ mit Werten in E ist.

23. Sei E ein komplexer Banachraum und $T \in \mathcal{L}(E)$.
(a) Sei $\lambda \in \varrho(T)$. Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - \lambda|\|R(\lambda, T)\| < 1$ gilt wegen der Neumann-Reihe $z \in \varrho(T)$. Folgere daraus $\|R(\lambda, T)\| \geq \frac{1}{d(\lambda, \sigma(T))}$, wobei $d(\lambda, \sigma(T)) = \inf\{|\lambda - \mu| : \mu \in \sigma(T)\}$.
(b) Für jede Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \varrho(T)$ mit $\lim_{n\to\infty} d(\lambda_n, \sigma(T)) = 0$ gibt es ein $x \in E$, so daß $\sup \|R(\lambda_n, T)x\| = \infty$. Hinweis: Verwende das Prinzip der gleichmässigen Beschränktheit.

24. **Approximatives Punktspektrum.** Sei E ein komplexer Banachraum und $T \in \mathcal{L}(E)$. Dann heißt
$$\sigma_{ap}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \; : \; \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E, \|x_n\| = 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } \lim_{n\to\infty} \|\lambda x_n - Tx_n\| = 0\}$$
das *approximative Punktspektrum* von T . Zeige:
(a) Für alle $\lambda \in \varrho(T)$ gibt es ein $c > 0$, so daß $\|(\lambda - T)x\| \geq c\|x\|$ für alle $x \in E$. Folgere daraus $\sigma_{ap}(T) \subset \sigma(T)$.
(b) Der Rand $\partial\sigma(T)$ des Spektrums $\sigma(T)$ ist eine Teilmenge von $\sigma_{ap}(T)$. Hinweis: Verwende Aufgabe 23 (b); setze $x_n := \frac{R(\lambda_n, T)x}{\|R(\lambda_n, T)x\|}$, wobei $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \varrho(T)$ gegen ein $\lambda \in \partial\sigma(T)$ konvergiert.

Dr. Ralph Chill
Dipl. Math. Sibylle Schweiker

Übungen zur Funktionalanalysis

25. Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum.
(a) Seien p_1 , $p_2 \in [1, \infty]$ derart, daß $\frac{1}{p} := \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \leq 1$, und seien $f \in L^{p_1}(\Omega)$ und $g \in L^{p_2}(\Omega)$. Zeige, daß dann $f \cdot g \in L^p(\Omega)$ gilt, und daß
$$\|fg\|_p \leq \|f\|_{p_1} \cdot \|g\|_{p_2}.$$
Hinweis: Hölderungleichung.
(b) **Interpolationsungleichung.** Seien $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$, $\alpha \in [0,1]$ und $\frac{1}{p} = \frac{1-\alpha}{p_1} + \frac{\alpha}{p_2}$. Zeige mit Hilfe von Teil (a), daß $f \in L^{p_1}(\Omega) \cap L^{p_2}(\Omega)$ schon $f \in L^p(\Omega)$ impliziert, und daß die Interpolationsungleichung gilt:
$$\|f\|_p \leq \|f\|_{p_1}^{1-\alpha} \cdot \|f\|_{p_2}^{\alpha}.$$

26. Sei (Ω, Σ, μ) ein endlicher Maßraum, d.h. $\mu(\Omega) < \infty$. Zeige mit Hilfe der Hölderungleichung (oder direkt), daß für $1 \leq p \leq q \leq \infty$ die Inklusion $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ gilt, und daß die Einbettung $L^q(\Omega) \to L^p(\Omega)$ beschränkt ist.

27. **Diracmaß.** Sei $\mathcal{B}([0,1])$ die Borel σ -Algebra auf $[0,1]$. Man zeige, daß
$$\begin{aligned} \delta_0 : \mathcal{B}([0,1]) &\to [0,\infty], \\ A &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \in A, \\ 0 & \text{falls } 0 \notin A. \end{cases} \end{aligned}$$
ein Maß auf $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$ ist.
Berechne ferner das Integral $\int_{[0,1]} f \, d\delta_0$ für alle $f \in C[0,1]$.

28. Sei $\Omega = \mathbb{N}$, $\Sigma = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ und μ das Zählmaß auf $\mathbb{N}$. Zeige, daß für $p \in [1, \infty)$ der Raum der p -integrierbaren einfachen Funktionen (= Treppenfunktionen) mit dem Raum c_{00} der endlichen Folgen übereinstimmt. Für jede endliche Folge $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in c_{00}$ gilt außerdem: $\|x\|_p = (\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$.
Anmerkung: Es gilt schliesslich, daß $L^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ gerade mit dem Raum l^p der p -summierbaren Folgen übereinstimmt, d.h. mit dem Raum aller Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$, so daß $(\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty$. Weiter gilt $L^\infty(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu) = l^\infty$.

Dr. Ralph Chill
Dipl. Math. Sibylle Schweiker

Übungen zur Funktionalanalysis

29. Sei $1 \leq p \leq q < \infty$.
(a) Zeige die Inklusionen $l^p \subset l^q \subset c_0$, und zeige, daß die Einbettungen jeweils stetig sind. Gilt $c_0 = \bigcup_{1 \leq p < \infty} l^p$?
(b) Zeige, daß für den Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ weder die Inklusion $L^p(\mathbb{R}) \subset L^q(\mathbb{R})$ noch die Inklusion $L^q(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$ gilt.

30. **Schwach Lipschitzstetig impliziert Lipschitzstetig.** Sei E ein Banachraum. Eine Funktion $f : [0,1] \to E$ heißt *Lipschitzstetig* falls

$$L(f) := \sup_{\substack{s,t \in [0,1] \\ s \neq t}} \frac{\|f(t) - f(s)\|}{|s-t|} < \infty.$$

Eine Funktion $f : [0,1] \to E$ heißt *schwach Lipschitzstetig* falls für alle $x' \in E' := \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ die Funktion $x' \circ f : [0,1] \to \mathbb{K}$ Lipschitzstetig ist. Zeige mit Hilfe des Prinzips der gleichmässigen Beschränktheit, daß jede schwach Lipschitzstetige Funktion schon Lipschitzstetig ist.
Hinweis: Es gilt $\|x\| = \sup_{\|x'\| \leq 1} |x'(x)|$ für alle $x \in E$.

31. Seien E und F Banachäume über $\mathbb{K}$. Eine Abbildung

$$\begin{aligned} b : E \times F &\to \mathbb{K} \\ (x,y) &\mapsto b(x,y) \end{aligned}$$

heißt *bilinear*, falls sie linear in jeder Komponente ist.
(a) Falls b zusätzlich in jeder Komponente beschränkt ist, dann gibt es ein $B \in \mathcal{L}(E, F')$, so daß für alle $x \in E$ und alle $y \in F$ $(Bx)(y) = b(x,y)$ gilt.
Hinweis: Verwende das Prinzip der gleichmässigen Beschränktheit.
(b) Zeige mit Hilfe von Teil (a), daß es ein $M \geq 0$ gibt, so daß

$$|b(x,y)| \leq M\|x\| \cdot \|y\|, \quad x \in E,\, y \in F.$$

(c) Zeige, daß b schon stetig auf $E \times F$ ist.

32. Sei $E := l^p$ ($1 \leq p < \infty$), so daß der Dualraum $E' = l^q$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) ist. Berechne den zum Linksshift $L \in \mathcal{L}(E)$ adjungierten Operator $L' \in \mathcal{L}(E')$, wobei

$$\begin{aligned} L : E &\to E, \\ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} &\mapsto L(x_n)_{n \in \mathbb{N}} := (x_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}. \end{aligned}$$

Dr. Ralph Chill
Dipl. Math. Sibylle Schweiker

Übungen zur Funktionalanalysis

33. **Shifthalbgruppe.** Definiere für alle $t \in \mathbb{R}$ einen isometrischen Operator $S(t) \in \mathcal{L}(L^1(\mathbb{R}))$ durch $(S(t)f)(s) := f(t+s)$.
(a) Sei $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$ eine einfache Funktion, wobei A_i ein beschränktes Intervall ist. Zeige mit Hilfe des Satzes von der dominierten Konvergenz, daß $\lim_{t\to 0} \|S(t)f - f\|_1 = 0$ gilt. Wer möchte, kann die Aussage auch für stetige Funktionen mit kompakten Träger anstelle von einfachen Funktionen zeigen.
(b) Man nehme an, daß die Treppenfunktionen wie in (a) (bzw. die stetigen Funktionen mit kompakten Träger) dicht in $L^1(\mathbb{R})$ liegen. Folgere aus (a), daß $\lim_{t\to 0} \|S(t)f - f\|_1 = 0$ für alle $f \in L^1(\mathbb{R})$ gilt.

34. **Fouriertransformation.** Für $f \in L^1(\mathbb{R})$ setze
$$(\mathcal{F}f)(t) := \int_{\mathbb{R}} e^{-its} f(s)\, ds, \quad t \in \mathbb{R}.$$
Die Funktion $\mathcal{F}f : t \mapsto (\mathcal{F}f)(t)$ heißt *Fouriertransformierte* von f .
(a) Zeige mit Hilfe des Satzes von der dominierten Konvergenz, daß $\mathcal{F}f$ stetig ist.
(b) **Lemma von Riemann-Lebesgue.** Für alle $f \in L^1(\mathbb{R})$ gilt $\mathcal{F}f \in C_0(\mathbb{R})$. Anleitung: Multipliziere den Integranden für $t \neq 0$ mit $1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-i\pi\frac{t}{t}}$, substituiere in dem einen entstehenden Integral s durch $s + \frac{\pi}{t}$ und verwende dann Aufgabe 33 (b).
(c) Zeige, daß $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$, $f \mapsto \mathcal{F}f$ ein beschränkter, linearer Operator ist.

35. **Dunford-Pettis Operatoren.** Seien E und F zwei Banachräume. Ein Operator $T \in \mathcal{L}(E, F)$ heißt *Dunford-Pettis Operator*, falls für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ gilt:
$$x_n \rightharpoonup x \text{ in } E \quad \Rightarrow \quad Tx_n \to Tx \text{ in } F.$$
Zeige: Falls E reflexiv ist, dann ist jeder Dunford-Pettis Operator $T \in \mathcal{L}(E, F)$ kompakt.

24. **Volterraoperator.** Sei $E = C[0,1]$ und $V \in \mathcal{L}(E)$ definiert durch
$$(Vf)(t) := \int_0^t f(s)\, ds, \quad f \in E, t \in [0,1].$$
Zeige mit Hilfe des Satzes von Arzela-Ascoli, daß V kompakt ist.

Dr. Ralph Chill
Dipl. Math. Sibylle Schweiker

Übungen zur Funktionalanalysis

37. Zeige, daß in einem Prähilbertraum E das Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$ stetig von $E \times E$ nach $\mathbb{K}$ ist, d.h.
$$x_n \to x \text{ und } y_n \to y \text{ in } E \Rightarrow (x_n, y_n) \to (x, y).$$
Benutze dazu die Cauchy-Schwarz Ungleichung.

38. **Parallelogrammgleichung.** Sei E ein normierter Raum, in dem die *Parallelogrammgleichung*
$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$
für alle x , $y \in E$ gilt. Zeige, daß E dann schon ein Prähilbertraum ist. Benutze dazu die Aufgabe 39 (Es genügt, den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ zu betrachten).

39. **Polarisationsidentität.** Sei E ein Prähilbertraum über $\mathbb{K}$. Zeige, daß dann für alle x , $y \in E$ die *Polarisationsidentität*
$$(x,y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$
im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bzw.
$$(x,y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + \|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\right)$$
im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gilt.

40. Sei $m = (m_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$ und $M \in \mathcal{L}(l^2)$ der zu m assoziierte Multiplikationsoperator:
$$M(x_n) := (m_n x_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad (x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2).$$
Zeige, daß M kompakt ist.
Hinweis: Unter anderen gibt es die folgenden zwei Möglichkeiten, um die Kompaktheit von M zu zeigen:
- Man benutze die Aufgabe 35 und die Tatsache, daß jede schwach konvergente Folge in l^2 insbesondere punktweise konvergiert, und daß l^2 reflexiv ist.
- Man approximiere M gleichmässig (d.h. in der Operatornorm) mit Operatoren mit endlichdimensionalem Bild, und benutze die Tatsache, daß der Raum der kompakten Operatoren abgeschlossen in $\mathcal{L}(l^2)$ ist, und daß Operatoren mit endlichdimensionalem Bild kompakt sind.

Dr. Ralph Chill
Dipl. Math. Sibylle Schweiker

Übungen zur Funktionalanalysis

Für $f \in L^2[0, 2\pi]$ sei

$$\mathcal{F}f(n) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\, dt \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

41. Sei $u \in C^1[0, 2\pi]$, so daß $u(0) = u(2\pi)$. Dann gilt
(a) für alle $n \in \mathbb{Z}$:
$$in(\mathcal{F}u)(n) = (\mathcal{F}u')(n).$$
Hinweis: Partielle Integration.
(Die Fouriertransformation führt also die Differentiation in eine Multiplikation über).
(b) $(\mathcal{F}u(n))_{n\in\mathbb{Z}} \in l^1(\mathbb{Z})$.

42. Für $\lambda \in \mathbb{C}\backslash i\mathbb{Z}$ sei M_λ der zu $(\frac{1}{-\lambda+in})_{n\in\mathbb{Z}}$ gehörige Multiplikationsoperator auf $l^2(\mathbb{Z})$, und $\mathcal{F} : L^2[0, 2\pi] \to l^2(\mathbb{Z})$ sei die (diskrete) Fouriertransformation. Dann gilt:
(a) Der Operator $R_\lambda := \mathcal{F}^{-1}M_\lambda\mathcal{F} \in \mathcal{L}(L^2[0, 2\pi])$ ist injektiv und kompakt.
(b) Für alle λ , $\mu \in \mathbb{C}\backslash i\mathbb{Z}$ gilt:
$$R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda)R_\lambda R_\mu.$$

43. Betrachte für $f \in L^2[0, 2\pi]$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ die Gleichung
$$(D) \begin{cases} u'(x) = \lambda u(x) + f(x), & x \in [0, 2\pi], \\ u(0) = u(2\pi). \end{cases}$$
Zeige:
(a) Für jede (klassische) Lösung $u \in C^1[0, 2\pi]$ von (D) gilt:
$$(-\lambda + in)\mathcal{F}u(n) = \mathcal{F}f(n). \tag{1}$$
(b) Sei $\lambda \in \mathbb{C}\backslash i\mathbb{Z}$. Dann gibt es für alle $f \in L^2[0, 2\pi]$ genau ein $u \in L^2[0, 2\pi]$, so daß (1) gilt.
Hinweis: Benutze die Aufgabe 42. Die Funktion u heißt *schwache Lösung* von (D).
(c) Jede schwache Lösung u ist stetig und es gilt $u(0) = u(2\pi)$.
Hinweis: Zeige $(\mathcal{F}u(n))_{n\in\mathbb{Z}} \in l^1(\mathbb{Z})$, und benutze die Fourierreihe.

44. Zeige. daß
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$
Hinweis: Betrachte die Funktion $f(t) = \frac{1}{4}(t - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{12}$ ($t \in [0, 2\pi]$) und berechne $\mathcal{F}f(n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Werte sodann die zu f gehörige Fourierreihe in 0 aus.

Dr. Ralph Chill
Dipl. Math. Sibylle Schweiker

Übungen zur Funktionalanalysis

45. Sei H ein Hilbertraum und $U \in \mathcal{L}(H)$ invertierbar. Dann ist U genau dann unitär, wenn U isometrisch ist.
Hinweis: Verwende die Polarisationsidentität (Aufgabe 39).

46. (a) Betrachte den Hilbertraum $H = \mathbb{C}^n$ mit dem euklidischen Skalarprodukt. Berechne die (Hilbertraum-) Adjungierte A^* einer Matrix $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in \mathbb{C}^{n\times n}$.
(b) Sei $k \in C([0,1]^2)$ und $K \in \mathcal{L}(L^2[0,1])$ definiert durch

$$Kf(t) := \int_0^1 k(t,s)f(s)\,ds, \qquad f \in L^2[0,1], t \in [0,1].$$

Zeige, daß K selbstadjungiert ist falls $k(t,s) = \overline{k(s,t)}$ für alle s , $t \in [0,1]$ gilt.
Hinweis: Verwende den Satz von Fubini.

47. Sei H ein komplexer Hilbertraum und $T \in \mathcal{L}(H)$ derart, daß $(Tx,x) = 0$ für alle $x \in H$ gilt. Zeige, daß dann schon $T = 0$ gilt. Zeige durch ein Gegenbeispiel (zum Beispiel in $H = \mathbb{R}^2$), daß diese Aussage in einem reellen Hilbertraum falsch ist.
Hinweis: Zeige (im Fall des komplexen Hilbertraums), daß T selbstadjungiert ist, und verwende dann eine Darstellung für $\|T\|$.

48. **von Neumannscher Ergodensatz.** Sei H ein Hilbertraum und $T \in \mathcal{L}(H)$ eine Kontraktion, d.h. $\|T\| \le 1$. Zeige:
(a) Für alle $x \in H$ gilt $Tx = x$ genau dann, wenn $T^*x = x$.
(b) Es gilt $\operatorname{Kern}(I-T) = (\overline{\operatorname{Bild}(I-T)})^\perp$.
(c) Für alle $x \in \overline{\operatorname{Bild}(I-T)}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k x = 0.$$

Hinweis: Zeige die Behauptung zuerst für $x \in \operatorname{Bild}(I-T)$ (Teleskopsumme!) und benutze dann $\|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k\| \le 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
(d) Sei P die orthogonale Projektion auf $\operatorname{Kern}(I-T)$. Dann gilt für alle $x \in H$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k x = Px.$$

Hinweis: Schreibe $x = (I-P)x + Px$ und benutze Teil (b).
Anmerkung: Man sagt, daß eine Kontraktion *ergodisch* ist, wenn die Cesaromittel der Potenzen $(T^n)_{n\in\mathbb{N}}$ stark konvergieren. In einem Hilbertraum ist also jede Kontraktion ergodisch. Es ist sogar wahr, daß in einem reflexiven Raum jede Kontraktion ergodisch ist.

Dr. Ralph Chill
Dipl. Math. Sibylle Schweiker

Übungen zur Funktionalanalysis

49. **Greensche Funktion.** Sei
$$G(x,y) := \frac{1}{2\pi}\min\{x,y\}(\max\{x,y\}-2\pi), \qquad x,y\in[0,2\pi],$$
und sei $K\in\mathcal{L}(C[0,2\pi])$ der zu $G\in C([0,2\pi]^2)$ assoziierte Kernoperator. Man weise nach, daß für alle $f\in C[0,2\pi]$ die Funktion $u:=Kf$ die Gleichungen
$$\begin{cases} \frac{d^2}{dx^2}u(x)=f(x), & x\in[0,2\pi],\\ u(0)=u(2\pi)=0 \end{cases}$$
löst.

50. **Hilbert-Schmidt Operatoren.** Sei H ein separabler Hilbertraum und $S=\{e_n : n\in\mathbb{N}\}$ eine Orthonormalbasis. Ein Operator $T\in\mathcal{L}(H)$ heiße *Hilbert-Schmidt Operator*, falls $\sum_{n\in\mathbb{N}}\|Te_n\|^2<\infty$. Zeige, daß jeder Hilbert-Schmidt Operator T kompakt ist.
Hinweis: Man approximiere zum Beispiel T gleichmäßig (in der Operatornorm) durch eine Folge T_n von Operatoren mit endlichdimensionalem Bild.

51. **Hilbert-Schmidt Operatoren.** Sei $k\in C([0,2\pi]^2)$, und sei $K\in\mathcal{L}(L^2[0,2\pi])$ der zu k assoziierte Kernoperator. Desweiteren sei $S:=\{e_n : n\in\mathbb{N}\}$ eine beliebige Orthonormalbasis von $L^2[0,2\pi]$. Zeige:
(a) Für alle $x\in[0,2\pi]$ gilt
$$\sum_{n\in\mathbb{N}}|(Ke_n)(x)|^2=\|k(x,\cdot)\|_{L^2}^2.$$
Hinweis: Sehe $(Ke_n)(x)$ als ein Skalarprodukt an, und verwende die Parsevalsche Gleichung.
(b) Es gilt
$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\|Ke_n\|_{L^2}^2=\int_0^{2\pi}\|k(x,\cdot)\|_{L^2}^2\,dx.$$
Hinweis: Verwende den Satz von Fubini (Vertauschung von Summe und Integral).

52. Man betrachte noch einmal den Kernoperator K aus Aufgabe 49. Für alle $n\in\mathbb{N}$ sei $e_n(x):=\sin\frac{nx}{2}$ ($x\in[0,2\pi]$). Man zeige, daß dann für alle $n\in\mathbb{N}$ die Gleichung
$$Ke_n=-\frac{4}{n^2}e_n$$
gilt.
Wer möchte, der bemerkt noch, daß K auf dem Raum $L^2[0,2\pi]$ selbstadjungiert und kompakt ist.

Dr. Ralph Chill
Dipl. Math. Sibylle Schweiker

Übungen zur Funktionalanalysis

Alle Übungen auf diesem Blatt sind Sternchenaufgaben. Wer möchte, kann hier zusätzliche Punkte bekommen.

53. **Approximative Eins und Diracfunktional.** Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ derart, daß $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$. Definiere für alle $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $f_n(x) := nf(nx)$ ($x \in \mathbb{R}$). Dann gilt für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$
$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\varphi(x)\, dx = \varphi(0) \quad (= \langle \delta_0, \varphi \rangle),$$
wobei δ_0 das Diracfunktional in 0 ist.
Anmerkung: Das Diracfunktional δ_0 ist der Limes (im distributionellem Sinne) der Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

54. **Heavisidefunktion und Diracfunktional.** Sei
$$H(x) := \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$
die *Heavisidefunktion*. Dann gilt für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$
$$\int_{\mathbb{R}} H(x) \frac{d}{dx}\varphi(x)\, dx = \varphi(0) \quad (= \langle \delta_0, \varphi \rangle).$$
Anmerkung: Das Diracfunktional δ_0 ist die Ableitung (im distributionellem Sinne) der Heavisidefunktion.

55. **Heisenbergsche Unschärferelation.** Betrachte den Schwartzraum $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ mit dem Skalarprodukt $(\varphi, \psi) := \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\overline{\psi(x)}\, dx$. Betrachte auf $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ die (unbeschränkten) Operatoren P , $Q : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$, wobei $P\varphi(x) := i\frac{d}{dx}\varphi(x)$ und $Q\varphi(x) := x\varphi(x)$.
Zeige:
(a) Für alle $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gilt
$$(P\varphi, \varphi) = (\varphi, P\varphi) \text{ und } (Q\varphi, \varphi) = (\varphi, Q\varphi).$$
(b) Für alle $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gilt
$$PQ\varphi - QP\varphi = i\varphi \quad \text{(vgl. mit Aufgabe 18).}$$
(c) Für alle $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ mit $\|\varphi\|_2 = 1$ gilt
$$(P\varphi, \varphi)^2 \leq \|P\varphi\|_2^2 \text{ und } (Q\varphi, \varphi)^2 \leq \|Q\varphi\|_2^2.$$
Hinweis: Cauchy-Schwarz Ungleichung.
(d) Für alle $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ mit $\|\varphi\|_2 = 1$ gilt
$$\|P\varphi\|_2\, \|Q\varphi\|_2 \geq 1.$$
Hinweis: Betrachte die Parabel $q(\lambda) := \|P\varphi + \lambda Q\varphi\|_2^2$ ($\lambda \in \mathbb{R}$). Schreibe q in der Form $q(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$ (benutze dabei Teil (a) und (b)). Wegen $q(\lambda) \geq 0$ kann die Parabel q höchstens eine Nullstelle besitzen. Dies ergibt eine Bedingung an die Koeffizienten a , b und c .
Anmerkung: Es gilt sogar für $\Delta P := \sqrt{\|P\varphi\|^2 - (P\varphi, \varphi)^2}$ und $\Delta Q := \sqrt{\|Q\varphi\|^2 - (Q\varphi, \varphi)^2}$ die *Heisenbergsche Unschärferelation*: $\Delta P \Delta Q \geq 1$.