TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Prof. Dr. R. Chill
Institut für Analysis
2012

Übungen zur Funktionalanalysis II

Blatt 3

(12) **Basiswechsel.** Seien H und K zwei separable, unendlichdimensionale Hilberträume.

(a) Sei $(e_n)_n$ eine Orthonormalbasis in H und $(f_n)_n$ eine Orthonormalbasis in K. Wir definieren einen linearen Operator $U : H \to K$ durch

$$Ux := \sum_n \langle x, e_n \rangle_H \, f_n \quad (x \in H).$$

Zeigen Sie, daß U wohldefiniert und beschränkt ist. Zeigen Sie darüberhinaus, daß U ein unitärer Operator ist, und daß $Ue_n = f_n$ für alle n gilt.

(b) Zeigen Sie umgekehrt, daß jeder unitäre Operator $U : H \to K$ jede Orthonormalbasis von H auf eine Orthonormalbasis von K abbildet.

(13) **Hilbert-Schmidt-Operatoren.** Ein linearer Operator $T : H \to H$ auf einem Hilbertraum H heißt *Hilbert-Schmidt-Operator*, falls es eine ONB (e_n) gibt, so daß

(*)
$$\|T\|_{HS}^2 := \sum_n \|Te_n\|^2 < \infty.$$

(a) Zeigen Sie, daß die Größe $\|T\|_{HS}$ nicht von der Wahl der Orthonormalbasis abhängt. Insbesondere ist also T genau dann ein Hilbert-Schmidt-Operator, wenn für jede ONB (e_n) die Beziehung (*) gilt.

(b) Zeigen Sie, daß jeder Hilbert-Schmidt-Operator kompakt ist.

(c) Zeigen Sie, daß die Menge $HS(H)$ der Hilbert-Schmidt-Operatoren auf H ein Vektorraum ist, und daß $\| \cdot \|_{HS}$ eine Norm auf $HS(H)$ ist. Zeigen Sie, daß für eine beliebige ONB (e_n) von H durch

$$\langle T, S \rangle_{HS} := \sum_n \langle Te_n, Se_n \rangle \quad (T,\, S \in HS(H))$$

ein Skalarprodukt auf $HS(H)$ definiert ist, welches diese Norm induziert. Insbesondere ist also $HS(H)$ ein Prähilbertraum.

(d) Zeigen Sie, daß für alle $T \in HS(H)$ die Ungleichung

$$\|T\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \|T\|_{HS}$$

gilt. Insbesondere ist die Einbettung von $(HS(H), \|\cdot\|_{HS})$ in $(\mathcal{K}(H), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(H)})$ beschränkt.

(e) Zeigen Sie, daß $(HS(H), \| \cdot \|_{HS})$ vollständig, also ein Hilbertraum, ist.

(f) Zeigen Sie, daß für alle $T \in HS(H)$ und alle $S \in \mathcal{L}(H)$ die Operatoren ST und TS Hilbert-Schmidt-Operatoren sind. Insbesondere ist also $HS(H)$ ein (nicht abgeschlossenes) Ideal von $\mathcal{L}(H)$.

(14) **Kernoperatoren.** Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein beliebiger Maßraum, so daß $H := L^2(\Omega)$ separabel ist. Für einen gegebenen *Kern* $k \in L^2(\Omega \times \Omega)$ definieren wir den *Kernoperator* $K : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ durch

$$(Kf)(x) := \int_\Omega k(x,y) f(y)\, d\mu(y) \quad (f \in L^2(\Omega),\, x \in \Omega).$$

(a) Zeigen Sie, daß K wohldefiniert ist.
(b) Zeigen Sie, daß K ein Hilbert-Schmidt-Operator und insbesondere kompakt ist.
(c) Zeigen Sie, daß K genau dann selbstadjungiert ist, wenn für fast alle $(x,y) \in \Omega \times \Omega$ die Beziehung $k(x,y) = \overline{k(y,x)}$ gilt.

(15) **Multiplikationsoperatoren.** Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein beliebiger Maßraum, so daß $H := L^2(\Omega)$ separabel ist. Für eine gegebene Funktion $m \in L^\infty(\Omega)$ definieren wir den *Multiplikationsoperator* $M : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ durch

$$(Mf)(x) = m(x)\, f(x) \quad (f \in L^2(\Omega),\, x \in \Omega).$$

(a) Zeigen Sie, daß M wohldefiniert und beschränkt ist, und daß $\|M\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega))} = \|m\|_{L^\infty(\Omega)}$.
(b) Berechnen Sie das Spektrum von M.