TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Prof. Dr. R. Chill
Institut für Analysis
2011/12

# Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 1

(1) Zeigen Sie, daß die folgenden Funktionen Normen auf $\mathbb{K}^N$ sind:
   (a) $\|x\|_1 := \sum_{k=1}^N |x_k|$.
   (b) $\|x\|_\infty := \sup_{1\le k\le N} |x_k|$.
   (c) $\|x\|_2 := \big(\sum_{k=1}^N |x_k|^2\big)^{\frac{1}{2}}$
   Zeichnen Sie die Einheitskugeln in $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$, $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ und $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$.

(2) Es sei $\ell^\infty$ der Raum der beschränkten Folgen, $c_0$ der Raum der Nullfolgen und $c_{00}$ der Raum der endlichen Folgen in $\mathbb{C}$. Weiter sei $\|x\|_\infty = \sup_k |x_k|$ für $x = (x_k) \in \ell^\infty$.
   (a) Zeigen Sie, daß die Räume $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ und $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ vollständig sind. **Hinweis:** Um zu zeigen, daß $c_0$ vollständig ist, können Sie Aufgabe 5 verwenden.
   (b) Zeigen Sie, daß der Raum $c_{00}$ der endlichen Folgen dicht im Raum $c_0$ der Nullfolgen ist, d.h. für jedes Element $x \in c_0$ gibt es eine Folge $(x_n) \subseteq c_{00}$ mit der Eigenschaft $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_\infty = 0$. Folgern Sie, daß $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ nicht vollständig ist.

(3) Zeigen Sie, daß $(C([0,1]), \|\cdot\|_1)$ ein normierter, nicht vollständiger Raum ist. Zur Erinnerung: $\|f\|_1 := \int_0^1 |f(x)|\, dx$.

(4) Zeigen Sie, daß auf jedem normierten Raum die Norm eine stetige Funktion ist.

(5) Sei $X$ ein Banachraum und $Y \subseteq X$ ein Untervektorraum. Zeigen Sie, daß $Y$ genau dann in $X$ abgeschlossen ist, wenn $Y$ mit der von $X$ induzierten Norm ein Banachraum ist.

(6∗) Sei $\mathbb{K}^\mathbb{N}$ der Raum aller Folgen in $\mathbb{K}$. Für zwei Element $x$, $y \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$ definieren wir

$$d_k(x,y) := \min\{|x_k - y_k|, 1\} \quad \text{und} \quad d(x,y) := \sum_k 2^{-k} d_k(x,y).$$

Zeigen Sie, daß $(\mathbb{K}^N, d)$ ein metrischer Raum ist. Warum ist $d_k$ keine Metrik? Zeigen Sie, daß eine Folge $(x_n) \subseteq \mathbb{K}^\mathbb{N}$ bezüglich der Metrik $d$ genau dann konvergiert, wenn sie koordinatenweise konvergiert. Zeigen Sie desweiteren, daß es auf $\mathbb{K}^N$ keine Norm gibt, die zur Metrik $d$ äquivalent ist, d.h. es gibt keine Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{K}^\mathbb{N}$, so daß gilt: eine Folge $(x_n) \subseteq \mathbb{K}^\mathbb{N}$ konvergiert genau dann in $(\mathbb{K}^\mathbb{N}, d)$, wenn sie in $(\mathbb{K}^\mathbb{N}, \|\cdot\|)$ konvergiert.
Man nehme an, es gäbe eine Norm auf $\mathbb{C}^N$, die zur Metrik $d$ äquivalent ist, und man konstruiere mit Hilfe der kanonischen Einheitsvektoren in $\mathbb{C}^\mathbb{N}$ eine Reihe, die bezüglich der Metrik konvergiert, nicht aber bezüglich der Norm.

(7∗) Man betrachte $\mathbb{R}$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$. Beweisen oder widerlegen Sie: jede Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ (für alle $x$, $y \in \mathbb{R}$) ist linear.