TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Prof. Dr. R. Chill
Institut für Analysis
2011/12

# Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 10

(30) Sei $X$ ein normierter Raum, sei $X'$ sein Dual, und $X''$ der Bidual (d.h. der Dual von $X'$). Betrachten Sie die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} J : X &\to X'', \\ x &\mapsto Jx, \end{aligned}$$

wobei $Jx \in X'' = \mathcal{L}(X', \mathbb{K})$ durch

$$\langle Jx, x' \rangle_{X'',X'} := \langle x', x \rangle_{X',X} \text{ für alle } x' \in X'$$

gegeben ist. Zeigen Sie, daß $J$ eine Isometrie ist, d.h. $\|Jx\|_{X''} = \|x\|_X$ für alle $x \in X$.

**Bemerkung:** Die Abbildung $J$ ist damit insbesondere injektiv, und der Raum $X$ ist isometrisch isomorph zu einem Unterraum von $X''$ (man sagt manchmal verkürzt, daß $X$ *ein Unterraum von* $X''$ *ist*, wobei dies natürlich nicht im mengentheoretischen Sinne zu verstehen ist). Ein Banachraum $X$ ist *reflexiv* wenn $JX = X''$ für die obige Isometrie $J$ gilt, d.h. wenn die Isometrie $J$ zusätzlich ein Isomorphismus ist (man könnte dann verkürzt sagen, daß $X = X''$ gilt, d.h. daß $X$ mit seinem Bidual übereinstimmt).

(31) Zeigen Sie, daß der Raum $\ell^\infty$ nicht separabel ist.

(32) Zeigen Sie, daß jeder separable, normierte Raum $X$ isometrisch isomorph zu einem Unterraum von $\ell^\infty$ ist, d.h. zu jedem separablen, normierten Raum $X$ gibt es eine Isometrie $j : X \to \ell^\infty$.

**Hinweis:** Finden Sie eine Folge $(x'_n)_n$ im Dualraum $X'$, so daß für alle $x \in X$ die Gleichheit

$$\|x\| = \sup_n |\langle x'_n, x \rangle|$$

gilt.