Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 12

(37) Zeigen Sie, daß jeder unendlichdimensionale Banachraum eine überabzählbare Vektorraumbasis besitzt.
Hinweis: Lemma von Baire.

(38) Sei $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so daß $\lim_{n\to\infty} f(nt) = 0$ für alle $t > 0$. Zeigen Sie, daß dann schon $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$ gilt.
Hinweis: Lemma von Baire.

(39) Zeigen Sie, daß in einem normierten Raum jede schwach konvergente Folge beschränkt ist.

(40) Seien $0 < \alpha \leq 1$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und X ein Banachraum. Eine Funktion $f : I \to X$ heißt *Hölderstetig der Ordnung* α, falls es ein $L \geq 0$ gibt, so daß

$$|f(t) - f(s)| \leq L \, \|t - s\|^\alpha \text{ für alle } t,\, s \in I \text{ gilt.}$$

Sie heißt *schwach Hölderstetig der Ordnung* α, falls für alle Funktionale $x' \in X'$ die Verknüpfung $\langle x', f\rangle = x' \circ f : I \to \mathbb{K}$ Hölderstetig der Ordnung α ist.

Zeigen Sie, daß eine Funktion $f : I \to X$ genau dann Hölderstetig der Ordnung α ist, wenn sie schwach Hölderstetig der Ordnung α ist.

(41) **Schauderbasen.** Eine Folge $(x_n)_n$ in einem Banachraum X heißt *Schauderbasis*, falls jedes Element $x \in X$ eine eindeutige Darstellung der Form $x = \sum_n \alpha_n x_n$ (mit Koeffizienten $\alpha_n \in \mathbb{K}$) besitzt.

(a) Zeigen Sie, daß die Folge $(e_n)_n$ der kanonischen Einheitsvektoren eine Schauderbasis in ℓ^p $(1 \leq p < \infty)$ und in c_0 ist.

(b) Zeigen Sie, daß in einem Banachraum X mit Schauderbasis (x_n) die *Koeffizientenfunktionale*

$$x'_n : X \to \mathbb{K}, \qquad x \mapsto \alpha_n$$

wohldefiniert, linear und stetig sind.
Hinweis: Setzten Sie $\|x\|_S := \sup_N \|\sum_{n=0}^N x'_n(x) x_n\|$, und zeigen Sie, daß $\|\cdot\|_S$ eine Norm ist. Zeigen Sie, daß $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|_S$ äquivalent sind.
Bemerkung: Jeder Banachraum mit einer Schauderbasis ist notwendigerweise separabel. Die Umkehrung gilt nicht, wie P. Enflo 1973 gezeigt hat (*A counterexample to the approximation problem in Banach spaces.* Acta Math. 130 (1973), 309–317).