TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Prof. Dr. R. Chill
Institut für Analysis
2011/12

Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 2

(8) Es sei $0 < \alpha \leq 1$, und es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt *Hölderstetig der Ordnung* α, falls es ein $L \geq 0$ gibt, so daß

$$|f(x) - f(y)| \leq L\,|x - y|^\alpha \text{ für alle } x,\, y \in I \text{ gilt.}$$

Falls $\alpha = 1$, so heißt diese Funktion auch Lipschitzstetig. Mit $C^\alpha(I)$ bzw. $C^{0,\alpha}(I)$ bezeichnet man den Raum aller Hölderstetigen Funktionen der Ordnung α ($\alpha < 1$), und mit $C^{0,1}(I)$ bzw. $\mathrm{Lip}(I)$ den Raum aller Lipschitzstetigen Funktionen auf I. Man setze

$$\|f\|_\alpha := \sup_{\substack{x,\, y \in I \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

Zeigen Sie:
(a) Für alle $\omega \in I$ definiert $\|f\|_{\omega,\alpha} := |f(\omega)| + \|f\|_\alpha$ eine Norm auf $C^{0,\alpha}(I)$.
(b) Für je zwei $\omega,\, \omega' \in I$ sind die Normen $\|\cdot\|_{\omega,\alpha}$ und $\|\cdot\|_{\omega',\alpha}$ äquivalent.
(c) Für alle $\omega \in I$ ist $(C^{0,\alpha}(I), \|\cdot\|_{\omega,\alpha})$ ein Banachraum.

(9) Es seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ zwei normierte Räume, und es sei $T : X \to Y$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, daß folgende Aussagen äquivalent sind:
(i) T ist stetig.
(ii) T ist stetig in 0.
(iii) Das Bild $TB_X(0, 1)$ der offenen Einheitskugel in X ist beschränkt in Y.
(iv) Es gibt ein $C \geq 0$, so daß für alle $x \in X$ gilt:

$$\|Tx\|_Y \leq C\,\|x\|_X.$$

Anstelle von (iii) kann man auch schreiben:
(iii)$'$ Für alle beschränkten Mengen $B \subseteq X$ ist das Bild TB beschränkt in Y
Ein Operator $T : X \to Y$ mit dieser Eigenschaft heißt *beschränkt*.

(10) Ist $X = \mathbb{K}^N$ und $Y = \mathbb{K}^M$, so ist jede (stetige) lineare Abbildung $T : X \to Y$ eindeutig beschrieben durch ihre darstellende Matrix $A \in \mathbb{K}^{M\times N}$ bezüglich der Standardbasen. Nach Wahl von Normen auf X und Y schreibt man nun $\|A\|$ statt $\|T\|$. Berechnen Sie $\|A\|$ falls man
(a) auf X und Y jeweils die ∞-Norm wählt,
(b) auf X die 1-Norm und auf Y die ∞-Norm wählt,
(c) auf X und Y jeweils die 2-Norm wählt.
Zur Erinnerung: $\|A\| := \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y$.

(11) **(Diracfunktional)** Zeigen Sie, daß für alle $x \in [0, 1]$ die Abbildung

$$\delta_x : C([0, 1]) \to \mathbb{K},$$
$$f \mapsto f(x)$$

ein beschränktes, lineares Funktional auf $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ ist.