TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Prof. Dr. R. Chill
Institut für Analysis
2011/12

Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 6

(19) **Polarisationsidentität.** Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Prähilbertraum über $\mathbb{K}$, und sei $\| \cdot \|$ die induzierte Norm. Zeigen Sie, daß für alle x, $y \in H$ die *Polarisationsidentität*

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 \right)$$

im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bzw.

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i \, \|x + iy\|^2 - i \, \|x - iy\|^2 \right)$$

im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gilt.

(20) **Parallelogrammgleichung, Lemma von von Neumann.** Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Prähilbertraum über $\mathbb{K}$. Zeigen Sie, daß die induzierte Norm $\| \cdot \|$ die Parallelogrammgleichung

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2 \, \|x\|^2 + 2 \, \|y\|^2 \text{ für alle } x, \, y \in H$$

erfüllt. Zeigen Sie umgekehrt, daß wenn eine Norm $\| \cdot \|$ auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum die Parallelogrammgleichung erfüllt, dann kommt diese Norm von einem Skalarprodukt.

Hinweis: Benutzen Sie die Polarisationsidentität. Es genügt, die Aussagen für einen der Fälle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ zu zeigen.

Bemerkung: Diese Aufgabe zeigt, daß die Parallelogrammgleichung die Prähilberträume unter den normierten Räumen charakterisiert.

(21) Es sei $1 \leq p \leq \infty$, $p \neq 2$. Zeigen Sie, daß die p-Norm auf $\mathbb{R}^2$ nicht von einem Skalarprodukt kommt. Folgern Sie, daß die auch die p-Norm auf ℓ^p nicht von einem Skalarprodukt kommt.

Sie zeigen hier, daß die Räume ℓ^p (für $p \neq 2$) mit den üblichen Normen keine Hilberträume sind. Auf $\mathbb{R}^2$ gibt es natürlich eine zur p-Norm äquivalente Norm, die von einem Skalarprodukt kommt (z.B. die euklidische Norm). Man kann jedoch zeigen, daß es auf ℓ^p (für $p \neq 2$) keine *äquivalente* Norm gibt, die von einem Skalarprodukt kommt.

(22) Auf dem Raum $C^1([0,1])$ aller stetig differenzierbaren Funktionen auf dem Intervall $[0,1]$ definiert man die bilineare Abbildung

$$\langle f, g\rangle_{H^1} := \int_0^1 f\bar{g} + \int_0^1 f'\bar{g}' \qquad (f,\, g \in C^1([0,1])).$$

(a) Zeigen Sie, daß der Raum $(C^1([0,1]), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Prähilbertraum ist.

(b) Sei $\|\cdot\|_{H^1}$ die vom Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ induzierte Norm. Zeigen Sie, daß es eine Konstante $C \geq 0$ gibt, so daß für alle $f \in C^1([0,1])$ die Ungleichung

$$\|f\|_\infty \leq C\,\|f\|_{H^1}$$

gilt.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, daß es ein $C \geq 0$ gibt, so daß für alle $f \in C^1([0,1])$ und alle $x \in [0,1]$ die Ungleichung $\|f\|_\infty^2 \leq C\,(|f(x)|^2 + \int_0^1 |f'|^2)$ gilt. Integrieren Sie sodann diese Ungleichung.

Bemerkung: Die obige Ungleichung zeigt, daß die Einbettung $J : (C^1([0,1]), \|\cdot\|_{H^1}) \to (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$, $f \mapsto f$ stetig ist. Damit ist jede Cauchyfolge in $(C^1([0,1]), \|\cdot\|_{H^1})$ auch eine Cauchyfolge in $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$. Da letzterer Raum vollständig ist, können wir die abstrakte Vervollständigung des Raumes $(C^1([0,1]), \|\cdot\|_{H^1})$ mit einem Unterraum von $C([0,1])$ identifizieren. Diese Vervollständigung bezeichnen wir mit $H^1(0,1)$. Der Raum $H^1(0,1)$ ist ein Hilbertraum.