TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Prof. Dr. R. Chill
Institut für Analysis
2011/12

Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 7

(23) **Laguerrepolynome.** Sei $H := \{f \in C(\mathbb{R}_+) : \int_0^\infty |f(t)|^2 e^{-t}\, dt < \infty\}$ versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle := \int_0^\infty f(t)\bar{g(t)}e^{-t}\, dt \qquad (f,\, g \in H).$$

Zeigen Sie, daß H den Raum aller Polynome enthält. Berechnen Sie sodann die Laguerrepolynome L_n $(0 \le n \le 3)$. Dies sind die Polynome, die man mit dem Gram-Schmidt Orthogonalisierungsverfahren aus den Monomen p_n $(0 \le n \le 3$, $p_n(t) = t^n)$ erhält.

Bemerkung: Es ist günstig, die Identität $\int_0^\infty t^n e^{-t}\, dt = n!$, die für alle ganzen Zahlen $n \ge 0$ gilt, zu verwenden.

(24) **Multiplikationsoperator auf ℓ^2.** Sei $m = (m_n) \in \ell^\infty$ eine beliebige, beschränkte Folge. Sei

$$M : \ell^2 \to \ell^2,$$
$$x = (x_n) \mapsto Mx = (m_n x_n)$$

der zugehörige Multiplikationsoperator. Sei B_{ℓ^2} die Einheitskugel in ℓ^2, und sei MB_{ℓ^2} das Bild der Einheitskugel unter dem Operator M. Zeigen Sie, daß MB_{ℓ^2} genau dann eine relativ kompakte Menge in ℓ^2 ist, wenn $m \in c_0$.

Bemerkung: Die Menge MB_{ℓ^2} ist genau dann relativ kompakt, wenn jede Folge (x_k) in B_{ℓ^2} eine Teilfolge (x_{k_l}) besitzt, so daß (Mx_{k_l}) in ℓ^2 konvergiert.

(25) Sei $H = C([0, \pi])$ versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle := \int_0^\pi f(t)\bar{g(t)}\, dt \qquad (f,\, g \in H).$$

(a) Sei $s_n(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx$ $(n \ge 1,\, x \in [0, \pi])$. Prüfen Sie, daß (s_n) ein Orthonormalsystem in H ist.

(b) Für alle $n \ge 1$ setze man $Ts_n := \frac{1}{1+n^2} s_n$. Zeigen Sie, daß man T eindeutig zu einem beschränkten, linearen Operator auf $K := \overline{\operatorname{span}}\,\{s_n : n \ge 1\}$ fortsetzen kann.

Bemerkung: Es gilt $H = K$, d.h. (s_n) ist sogar eine Orthonormalbasis von H. Diese Bemerkung können Sie im folgenden Punkt ohne Beweis verwenden.

(c)* Zeigen Sie, daß das Bild TB_H der Einheitskugel B_H relativ kompakt in H ist.

(d)* Zeigen Sie, daß T injektiv ist. Zeigen Sie desweiteren, daß $\operatorname{span}\{s_n : n \ge 1\} \subseteq \operatorname{Im} T$, und daß $T^{-1}f = f - f''$ und $f(0) = f(\pi) = 0$ für alle $f \in \operatorname{span}\{s_n : n \ge 1\}$ gilt.

Bemerkung: Es gilt genauer $\operatorname{Im} T = \{f \in C^2([0, 2\pi]) : f(0) = f(\pi) = 0\}$ und $T^{-1}f = f - f''$ für alle $f \in \operatorname{Im} T$. Damit gibt es also für alle $g \in C([0, \pi])$ genau eine Lösung $f \in C^2([0, \pi])$ des Randwertproblems $f - f'' = g$, $f(0) = f(\pi) = 0$. Die Abbildung $g \to f$ ist ein "Diagonaloperator".