TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Prof. Dr. R. Chill
Institut für Analysis
2011/12

Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 8

(26) **Fourierreihen.** Sei $C_{2\pi}(\mathbb{R}) := \{f \in C(\mathbb{R}) : f(x) = f(x+2\pi) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}$ der Raum aller 2π-periodischen, stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$, versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle := \int_0^{2\pi} f(t)\bar{g}(t)\,dt \qquad (f,\, g \in C_{2\pi}(\mathbb{R})).$$

Die von diesem Skalarprodukt induzierte Norm wird mit $\|\cdot\|_2$ bezeichnet. Für alle $n \in \mathbb{Z}$ definiere man außerdem die Funktion $e_n \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ durch

$$e_n(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

(a) Zeigen Sie, daß die Folge $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine Orthonormalbasis von $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ ist.

(b) Für alle $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ und alle $n \in \mathbb{Z}$ definiert man den *n-ten Fourierkoeffizienten* von f:

$$\hat{f}(n) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt.$$

Die Abbildung, die jedem $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ die Folge der Fourierkoeffizienten $\hat{f} = (\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ zuordnet, heißt *Fouriertransformation*.

Zeigen Sie: wenn die Fourierkoeffizienten einer Funktion $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ alle verschwinden, dann ist $f = 0$. (**Eindeutigkeit der Fouriertransformation**, d.h. die Folge der Fourierkoeffizienten bestimmt die Funktion).

(c) Zeigen Sie, daß für alle $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ die Folge $\hat{f} = (\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ beschränkt ist, und daß die Ungleichung

$$\|(\hat{f}(n))\|_{\ell^\infty} \le \sqrt{2\pi}\,\|f\|_1$$

mit $\|f\|_1 = \int_0^{2\pi} |f(t)|\,dt$ gilt.

(d) Zeigen Sie darüber hinaus, daß sogar $(\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2$ und die Gleichung

$$\|(\hat{f}(n))\|_{\ell^2} = \|f\|_2$$

gilt. Bemerken Sie, daß also insbesondere auch $(\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}} \in c_0$ gilt. **(Lemma von Riemann-Lebesgue)**.

(e) Zeigen Sie, daß für alle $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ die *Fourierreihe*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e_n$$

in $(C_{2\pi}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$ gegen f konvergiert, d.h., daß

$$\lim_{N\to\infty} \|f - \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)e_n\|_2 = 0.$$

Bemerkung: Obwohl die Funktionen f und e_n alle stetig sind, und damit auch die Partialsummen der Fourierreihe stetig sind, konvergiert die Fourierreihe im allgemeinen *nicht* gleichmäßig, d.h. nicht in $(C_{2\pi}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$. Man bemerke außerdem, daß die Konvergenz bezüglich der Norm $\|\cdot\|_2$ im allgemeinen *nicht* punktweise Konvergenz fast überall impliziert. Daß hier trotzdem die Gleichheit

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e_n(t) \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} f(s)e^{-ins}\, ds\, e^{int} \\ &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N} \int_0^{2\pi} f(s)e^{-ins}\, ds\, e^{int} \end{aligned}$$

für fast alle $t \in \mathbb{R}$ (und das sogar auch für alle $f \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$; siehe unten) gilt, ist ein tiefliegender Satz, der zuerst im Jahr 1966 von Lennart Carleson bewiesen wurde (L. Carleson ist Abelpreisträger des Jahres 2006).

Sämtliche Aussagen auf diesem Übungsblatt bleiben wahr, wenn man $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ durch den Raum $L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$ aller 2π-periodischen, messbaren, auf dem Intervall $(0, 2\pi)$ quadratintegrierbaren Funktionen ersetzt.