Prof. Dr. R. Chill
Institut für Analysis
2011/12

Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 9

(27) Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ ein Hilbertraum, und sei H' sein Dualraum, d.h. H' ist der Raum aller linearen, beschränkten Funktionale auf H. Nach dem Satz von Riesz-Fréchet gibt es für je zwei Elemente x', $y' \in H'$ genau zwei darstellende Elemente x, $y \in H$, so daß für alle $z \in H$ die Gleichheiten $x'(z) = \langle z, x \rangle_H$ und $y'(z) = \langle z, y \rangle_H$ gelten. Zeigen Sie, daß durch

$$\langle x', y' \rangle_{H'} := \langle y, x \rangle_H \qquad (x', y' \in H)$$

ein Skalarprodukt auf H' definiert wird, und daß die von diesem Skalarprodukt induzierte Norm mit der üblichen Funktionalnorm

$$\|x'\|_{H'} := \sup_{\|x\|_H \leq 1} |x'(x)| \qquad (x' \in H')$$

übereinstimmt, daß also H' ein Hilbertraum ist.

(28) Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ ein Hilbertraum, sei H' sein Dualraum, und sei H'' sein Bidualraum, d.h. der Raum aller linearen, beschränkten Funktionale auf H'. Zeigen Sie, daß für alle $x \in H$ die Abbildung

$$\varphi_x : H' \to \mathbb{K}, \quad x' \mapsto x'(x)$$

linear und beschränkt ist (d.h. $\varphi_x \in H''$). Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$J : H \to H'', \quad x \mapsto \varphi_x$$

ein isometrischer Isomorphismus ist.

(29) **Lemma von Lax-Milgram.** Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ ein Hilbertraum. Eine Abbildung $a : H \times H \to \mathbb{K}$ heißt *sesquilinear* falls für alle x, y, $z \in H$ und alle $\lambda \in \mathbb{K}$

$$a(\lambda x + y, z) = \lambda a(x, z) + a(y, z) \quad \text{und}$$
$$a(x, \lambda y + z) = \bar{\lambda} a(x, y) + a(x, z)$$

gilt.

(a) Sei $a : H \times H \to \mathbb{K}$ stetig und sesquilinear. Zeigen Sie, daß es einen linearen, beschränkten Operator $T : H \to H$ gibt, so daß für alle x, $y \in H$

$$a(x, y) = \langle x, Ty \rangle_H$$

gilt.

(b) Sei $a : H \times H \to \mathbb{K}$ stetig und sequilinear wie in (a). Zusätzlich sei a *koerziv*, d.h. es gebe es ein $\eta > 0$, so daß für alle $x \in H$ die Ungleichung

$$a(x, x) \geq \eta \|x\|_H^2$$

gilt. Zeigen Sie, daß unter dieser Voraussetzung der Operator T aus (a) ein Isomorphismus ist.

(c) Sei $a : H \times H \to \mathbb{K}$ stetig, sesquilinear, koerziv. Zeigen Sie, daß es für alle $\varphi \in H'$ genau ein $y \in H$ gibt, so daß für alle $x \in H$

$$a(x, y) = \varphi(x).$$