Aufgabe 2:

(a) Beh.: $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ ist vollständig.

Beweis:

Sei $(x_n)_n$ eine Cauchyfolge in ℓ^∞, $x_n = (x_n^k)_k$. Für alle k gilt:

$$|x_n^k - x_m^k| \leq \|x_n - x_m\|_\infty ,$$

und somit ist $(x_n^k)_n$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{K}$. Weil $\mathbb{K}$ vollständig ist, existiert damit für alle k der Limes

$$\lim_{n\to\infty} x_n^k =: x^k \quad \text{in } \mathbb{K}$$

(d.h. die Folge $(x_n)_n$ konvergiert "punktweise"). Wir zeigen, daß $x = (x^k)_k \in \ell^\infty$, und daß (x_n) in ℓ^∞ gegen x konvergiert.

Jede Cauchyfolge in einem normierten Raum konvergiert (!). Insbesondere gibt es ein $M \geq 0$, so daß

$$\sup_n \|x_n\|_\infty \leq M < \infty .$$

Für alle k gilt:

$$|x^k| = \lim_{n\to\infty} |x_n^k| \leq \sup_n |x_n^k| \leq$$

$$\leq \sup_n \|x_n\|_\infty \leq M < \infty$$

d.h. $x \in \ell^\infty$ und $\|x\|_\infty \leq M$.

Ähnlich gilt:

$$\|x - x_n\|_\infty = \sup_k |x^k - x_n^k| =$$

$$= \sup_k \lim_{m\to\infty} |x_m^k - x_n^k| \leq$$

$$\leq \sup_k \sup_{m\geq n} |x_m^k - x_n^k| =$$

$$= \sup_{m\geq n} \sup_k |x_m^k - x_n^k| =$$

$$= \sup_{m\geq n} \|x_m - x_n\|_\infty$$

und weil (x_n) eine Cauchyfolge ist, folgt aus dieser Abschätzung, daß (x_n) in l^∞ gegen x konvergiert.
Wir haben gezeigt, daß jede Cauchyfolge in l^∞ konvergiert. $\square$

Beh.: $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ ist vollständig.

Beweis:
Wegen Aufgabe und Teil 1 genügt es zu zeigen, daß c_0 abgeschlossen in l^∞ ist.
Sei $(x_n)_n$ eine Folge in c_0, die in l^∞ konvergiert,

$$x := \lim_{n\to\infty} x_n .$$

Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq n_0$

$$\| x - x_n \|_\infty < \varepsilon .$$

Diese Ungleichung gilt insbesondere für $n = n_0$. Nach Voraussetzung ist $x_{n_0} \in c_0$. Es gibt also ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $k \geq k_0$

$$| x_{n_0}^k | < \varepsilon .$$

Damit gilt für alle $k \geq k_0$:

$$\begin{aligned} |x^k| &\leq |x^k - x_{n_0}^k| + |x_{n_0}^k| \leq \\ &\leq \|x - x_{n_0}\|_\infty + |x_{n_0}^k| < \\ &< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon . \end{aligned}$$

Wir haben gezeigt, daß $x \in c_0$, und schließlich daß c_0 abgeschlossen in l^∞ ist.

(B) Beh.: c_{00} ist dicht in $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$.

Beweis:

Sei $x = (x^k)_k \in c_0$ (eine Nullfolge).

Für alle n setzen wir

$$x_n^k = \begin{cases} x^k & \text{falls } k \leq n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $x_n = (x_n^k)_k \in c_{00}$ und

$$\|x - x_n\|_\infty = \sup_k |x^k - x_n^k| =$$

$$= \sup_{k>n} |x^k|$$

und somit (weil x eine Nullfolge ist!),

$$\lim_{n\to\infty} \|x - x_n\|_\infty = \lim_{n\to\infty} \sup_{k>n} |x^k| =$$

$$= \limsup_{k\to\infty} |x^k| = 0,$$

d.h. $(x_n)_n$ konvergiert gegen x.

$\square$

Beh.: $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ ist nicht vollständig.

Beweis:

Sei $x \in c_0 \setminus c_{00}$ (z.B. $x = (\frac{1}{k})_k$).
Nach Teil 1 gibt es eine Folge (x_n) in c_{00}, die gegen x konvergiert (bzgl. der Supremumsnorm).
Diese Folge ist eine Cauchyfolge in $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$, die nicht in c_{00} konvergiert (Eindeutigkeit des Limes in c_0).

$\square$