Aufgabe 8:

Sei $\alpha \in]0,1]$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, und $C^{0,\alpha}(I)$ der Raum aller Hölderstetigen Funktionen ~~...~~ $I \to \mathbb{R}$ der Ordnung α, d.h. der Raum aller Funktionen $I \to \mathbb{R}$, für die

$$\|f\|_\alpha := \sup_{\substack{x,y \in I \\ x \neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty .$$

Definiere für $f \in C^{0,\alpha}(I)$, $w \in I$:

$$\|f\|_{w,\alpha} := |f(w)| + \|f\|_\alpha .$$

(a) Beh.: $\|f\|_{w,\alpha}$ ist eine Norm ($\forall w \in I$)

✓

(b) Beh.: Für je zwei $w, w' \in I$ sind die Normen $\|\cdot\|_{w,\alpha}$ und $\|\cdot\|_{w',\alpha}$ äquivalent.

Beweis:

Für alle $w, w' \in I$ gilt

$$\begin{aligned}
\|f\|_{w,\alpha} &= |f(w)| + \|f\|_\alpha \leq \\
&\leq |f(w)-f(w')| + |f(w')| + \|f\|_\alpha \\
&\leq \|f\|_\alpha \cdot |w-w'|^\alpha + |f(w')| + \|f\|_\alpha \\
&= |f(w')| + (1+|w-w'|^\alpha)\|f\|_\alpha \leq \\
&\leq (1+|w-w'|^\alpha)\|f\|_{w',\alpha}
\end{aligned}$$

und ähnlich

$$\|f\|_{w',\alpha} \leq (1+|w-w'|^\alpha)\|f\|_{w,\alpha} \qquad \square$$

(c) Beh.: $(C^{0,\alpha}(I), \|\cdot\|_{\omega,\alpha})$ ist ein Banachraum

Beweis:

Sei (f_n) eine Cauchyfolge in $(C^{0,\alpha}(I), \|\cdot\|_{\omega,\alpha})$. Aus der Definition der Norm sieht man dann leicht, daß $(f_n(\omega))$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{K}$ ist, und weil die Normen $\|\cdot\|_{\omega,\alpha}$ und $\|\cdot\|_{\omega',\alpha}$ für alle $\omega, \omega' \in I$ äquivalent sind, ist also für alle $x \in I$ die Folge $(f_n(x))$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{K}$. Weil $\mathbb{K}$ vollständig ist, existiert also für alle $x \in I$

$$f(x) := \lim_{n \to \infty} f_n(x) .$$

(die Folge (f_n) konvergiert also punktweise). Weil jede Cauchyfolge in einem normierten Raum beschränkt ist, existiert ein $L \geq 0$ so daß

$$\sup_n \|f_n\|_{\omega,\alpha} \leq L .$$

Insbesondere gilt also

$$\sup_n \|f_n\|_\alpha = \sup_n \sup_{\substack{x,y \in I \\ x \neq y}} \frac{|f_n(x) - f_n(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq L .$$

Für alle $x, y \in I$ gilt also

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \lim_{n \to \infty} |f_n(x) - f_n(y)| \leq \\ &\leq \sup_n |f_n(x) - f_n(y)| \leq \\ &\leq L \cdot |x-y|^\alpha , \end{aligned}$$

d.h. $f \in C^{0,\alpha}(I)$. Des weiteren gilt

$$\|f - f_n\|_{\omega,\alpha} = |f(\omega) - f_n(\omega)| + \sup_{\substack{x,y \in I \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f_n(x) - (f(y) - f_n(y))|}{|x-y|^\alpha} =$$

$$= |f(\omega) - f_n(\omega)| + \sup_{\substack{x,y \in I \\ x \neq y}} \lim_{m \to \infty} \frac{|f_m(x) - f_n(x) - (f_m(y) - f_n(y))|}{|x-y|^\alpha}$$

$$\leq |f(\omega) - f_n(\omega)| + \sup_{\substack{x,y \in I \\ x \neq y}} \sup_{m \geq n} \frac{|f_m(x) - f_n(x) - (f_m(y) - f_n(y))|}{|x-y|^\alpha}$$

$$= |f(\omega) - f_n(\omega)| + \sup_{m \geq n} \sup_{\substack{x,y \in I \\ x \neq y}} \frac{|f_m(x) - f_n(x) - (f_m(y) - f_n(y))|}{|x-y|^\alpha}$$

$$= |f(\omega) - f_n(\omega)| + \sup_{m \geq n} \|f_m - f_n\|_\alpha \underset{n \to \infty}{\to} 0,$$

weil (f_n) eine Cauchyfolge ist. Also konvergiert (f_n) in $C^{0,\alpha}$ gegen f $\square$