Université de Metz

Licence de Mathématiques - 2ème année

1er semestre

CALCUL DIFFERENTIEL

par Ralph Chill

Laboratoire de Mathématiques et Applications de Metz

Année 2010/11

Table des matières

CHAPITRE 1

Introduction

1. Notations

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{R}^N = \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ (N fois) est un produit cartésien. Les éléments de $\mathbb{R}^N$ sont appelés *points* ou *vecteurs*. On les note ici avec des lettres minuscules x, y, z, a, b, u, v, ... On note

$$x = (x_1, \ldots, x_N) = (x_i)_{1 \le i \le N} = (x_i) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix},$$

où $x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{R}$ sont les composantes ou coordonnées de x. On utilisera la notation $x = (x_i)$ seulement s'il est clair du context que x est un élément de $\mathbb{R}^N$. Sinon, il sera plus précis d'utiliser la notation $(x_i)_{1 \le i \le N}$.

L'ensemble $\mathbb{R}^N$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ pour la somme $+$ et le produit $\cdot$ donnés par

$$\begin{aligned} x + y &= (x_i) + (y_i) := (x_i + y_i) && x,\ y \in \mathbb{R}^N \text{ et} \\ \lambda \cdot x &= \lambda \cdot (x_i) := (\lambda x_i) && \lambda \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^N. \end{aligned}$$

CHAPITRE 2

Topologie de $\mathbb{R}^N$

1. Norme dans $\mathbb{R}^N$

On appelle l'application $\|\cdot\| : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ donnée par

$$\|x\| := \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \qquad (x \in \mathbb{R}^N)$$

la *norme euclidienne* sur $\mathbb{R}^N$.

Proposition 2.1. *La norme euclidienne vérifie les propriétés suivantes:*

(i) *Pour tout* $x \in \mathbb{R}^N$ *on a* $\|x\| \geq 0$ *et on a* $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
(ii) *Pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et tout* $x \in \mathbb{R}^N$ *on a* $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$.
(iii) (Inégalité du triangle) *Pour tout* $x, y \in \mathbb{R}^N$ *on a* $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

On appelle toute application $\|\cdot\| : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ vérifiant les trois propriétés de la Proposition 2.1 une *norme*. On note ici, sans donner un exemple, qu'il existe des normes sur $\mathbb{R}^N$ autres que la norme euclidienne.

Démonstration de la Proposition 2.1. (i) Il est clair d'après la définition de la norme qu'on a $\|x\| \geq 0$ pour tous les $x \in \mathbb{R}^N$. En plus, il est évident que si $x = 0$, alors $\|x\| = 0$. Si $x \in \mathbb{R}^N$ et $\|x\| = 0$, alors, toujours d'après la définition de la norme, $\sum_{i=1}^N x_i^2 = 0$. Comme les termes x_i^2 sont positifs, on obtient donc, quelque soit $i \in \{1, \dots, N\}$, $x_i^2 = 0$. Donc $x_i = 0$ pour tous les $i \in \{1, \dots, N\}$, ce qui implique $x = (x_i) = 0$.

(ii) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^N$. Alors

$$\begin{aligned} \|\lambda x\| &= \left(\sum_{i=1}^{N} (\lambda x_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\lambda^2 \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= |\lambda| \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= |\lambda|\,\|x\|. \end{aligned}$$

□

Avant de démontrer la propriété (iii), on considère le lemme suivant.

LEMME 2.2 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). *Pour tout x, $y \in \mathbb{R}^N$ on a*

$$\Big|\sum_{i=1}^{N} x_i y_i\Big| \leq \|x\|\,\|y\|.$$

DÉMONSTRATION. Si $y = 0$, alors l'inégalite est clairement vérifiée. On suppose alors que $y \neq 0$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|x \pm \lambda y\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{N} (x_i \pm \lambda y_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \pm 2\lambda \sum_{i=1}^{N} x_i y_i + \lambda^2 \sum_{i=1}^{N} y_i^2. \end{aligned}$$

Donc, si $\lambda > 0$, on obtient

$$\mp \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \leq \frac{1}{2\lambda}\|x\|^2 + \frac{\lambda}{2}\|y\|^2.$$

En choisissant $\lambda = \|x\|/\|y\|$ (ce qui est possible d'après la propriété (i) de la Proposition 2.1 et comme $y \neq 0$), on obtient

$$\mp \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \leq \frac{1}{2}\|x\|\,\|y\| + \frac{1}{2}\|x\|\,\|y\| = \|x\|\,\|y\|.$$

□

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 2.1 (SUITE). (iii) Pour tout x, $y \in \mathbb{R}^N$ on a, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \sum_{i=1}^{N} (x_i + y_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{N} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{N} x_i y_i + \sum_{i=1}^{N} y_i^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

□

LEMME 2.3 (2ème inégalité du triangle). *Pour tout x, $y \in \mathbb{R}^N$ on a*

$$\Big|\,\|x\| - \|y\|\,\Big| \leq \|x - y\|.$$

Démonstration. Par l'inégalité du triangle (Proposition 2.1 (iii)) on a

$$\begin{aligned}\|x\| &= \|x-y+y\| \\ &\leq \|x-y\| + \|y\|,\end{aligned}$$

où

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|.$$

En changeant le rôle de x et y on trouve aussi

$$\|y\| - \|x\| \leq \|y-x\| = \|x-y\|,$$

ce qui, avec l'inégalité précédente, donne le résultat. □

2. Boule, voisinage, ouvert, fermé, borné

Etant donné un point $x_0 \in \mathbb{R}^N$ et $r > 0$, on appelle l'ensemble

$$B(x_0, r) := \{x \in \mathbb{R}^N : \|x - x_0\| < r\}$$

la *boule (euclidienne) de centre x_0 et de rayon r*. On note que la définition de boule dépend de la norme choisie (ici: la norme euclidienne, mais on on peut choisir d'autres normes).

On dit qu'un ensemble $U \subseteq \mathbb{R}^N$ est un *voisinage d'un point* $x_0 \in \mathbb{R}^N$ s'il existe un rayon $r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subseteq U$.

Exemple 2.4. (a) L'espace $U = \mathbb{R}^N$ est un voisinage de tout point $x_0 \in \mathbb{R}^N$.
(b) Les ensembles

$$U = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\}$$

et

$$U = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0,\ x_2 > 0\}$$

sont tous les deux des voisinages du point $(1, 1)$.
(c) L'ensemble

$$U = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\}$$

n'est pas un voisinage de $(0, 0)$. (d) La boule $U = B(x_0, r)$ est un voisinage de x_0.

Lemme 2.5. *Une réunion quelconque (mais non-vide) de voisinages de $x_0 \in \mathbb{R}^N$ est un voisinage de x_0. Une intersection finie (mais non-vide) de voisinages de $x_0 \in \mathbb{R}^N$ est un voisinage de x_0.*

Démonstration. Soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille de voisinages de $x_0 \in \mathbb{R}^N$ (l'ensemble d'indices I étant un ensemble quelconque, mais non-vide). Soit $U := \bigcup_{i \in I} U_i$ leur réunion. Comme I est non-vide, il existe $i_0 \in I$. L'ensemble U_{i_0} est un voisinage de x_0. Par définition, il existe alors $r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subseteq U_{i_0}$. Par définition de la réunion, on a donc aussi $B(x_0, r) \subseteq U_{i_0} \subseteq U$. Ainsi, U est un voisinage de x_0.

Soit maintenant $(U_i)_{i \in I}$ une famille finie (mais non-vide) de voisinages de $x_0 \in \mathbb{R}^N$ (c.á.d. l'ensemble d'indices I est un ensemble fini, mais non-vide). Soit $U := \bigcap_{i \in I} U_i$ leur intersection. Par définition, pour tout $i \in I$ il existe un rayon $r_i > 0$ tel que $B(x_0, r_i) \subseteq U_i$. On pose $r := \min_{i \in I} r_i$. Alors $r > 0$ (ici on utilise le fait que I

est fini). Alors, pour tout $i \in I$ on a $r \leq r_i$ et donc $B(x_0, r) \subseteq B(x_0, r_i) \subseteq U_i$. Par définition de l'intersection, ceci implique $B(x_0, r) \subseteq \bigcap_{i \in I} u_i = U$. Ainsi, U est un voisinage de x_0. □

On dit qu'un ensemble $U \subseteq \mathbb{R}^N$ est *ouvert* si pour tout $x_0 \in U$ il existe un rayon $r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subseteq U$. Autrement dit, un ensemble $U \subseteq \mathbb{R}^N$ est ouvert si et seulement si c'est un voisinage de chacun de ses éléments.

Exemple 2.6. (a) L'espace $U = \mathbb{R}^N$ et l'ensemble vide $U = \emptyset$ sont ouverts.
(b) Toute boule $U = B(x_0, r)$ est ouvert.
Preuve: Soit $x \in B(x_0, r)$. Alors, par définition de la boule, $\|x - x_0\| < r$. Soit $r' := r - \|x - x_0\| > 0$. On montre que $B(x, r') \subseteq B(x_0, r)$. En fait, soit $y \in B(x, r')$. Alors, par définition de la boule, $\|y - x\| < r'$. L'inégalité du triangle et la définition de r' impliquent

$$\|y - x_0\| \leq \|y - x\| + \|x - x_0\| < r' + \|x - x_0\| = r,$$

c.à.d. $y \in B(x_0, r)$. Comme $y \in B(x, r')$ était arbitraire, ceci montre $B(x, r') \subseteq B(x_0, r)$.
(c) L'ensemble

$$U = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0,\ x_2 > 0\}$$

est ouvert. (d) Les ensembles

$$U = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\}$$

et

$$U = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0,\ x_2 \geq 0\}$$

ne sont pas ouverts.

Lemme 2.7. *Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert. Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.*

Démonstration. Soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles ouverts (l'ensemble d'indices I étant un ensemble quelconque). Soit $U := \bigcup_{i \in I} U_i$ leur réunion. Si I est vide, alors $U = \emptyset$ est ouvert. On peut donc supposer que I est non-vide. Soit $x \in U$. Alors il existe $i_0 \in I$ tel que $x \in U_{i_0}$. L'ensemble U_{i_0} est ouvert. Par définition, il existe alors $r > 0$ tel que $B(x, r) \subseteq U_{i_0}$. Par définition de la réunion, on a donc aussi $B(x, r) \subseteq U_{i_0} \subseteq U$. Comme $x \in U$ était arbitraire, l'ensemble U est donc ouvert.

Soit maintenant $(U_i)_{i \in I}$ une famille finie d'ensembles ouverts (c.á.d. l'ensemble d'indices I est un ensemble fini). Soit $U := \bigcap_{i \in I} U_i$ leur intersection. Soit $x \in U$. Alors, par définition de l'intersection, $x \in U_i$ pour tout $i \in I$. Les ensembles U_i sont ouverts. Donc, pour tout $i \in I$ il existe un rayon $r_i > 0$ tel que $B(x, r_i) \subseteq U_i$. On pose $r := \min_{i \in I} r_i$. Alors $r > 0$ (ici on utilise le fait que I est fini). Alors, pour tout $i \in I$ on a $r \leq r_i$ et donc $B(x, r) \subseteq B(x, r_i) \subseteq U_i$. Par définition de l'intersection, ceci implique $B(x, r) \subseteq \bigcap_{i \in I} U_i = U$. Ainsi, U est ouvert. □

On dit qu'un ensemble $F \subseteq \mathbb{R}^N$ est *fermé* si son complémentaire $F^c = \mathbb{R}^N \setminus F$ est ouvert.

EXEMPLE 2.8. (a) L'espace $U = \mathbb{R}^N$ et l'ensemble vide $U = \emptyset$ sont fermés.
(b) L'ensemble

$$U = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\}$$

est fermé.
(c) Les ensembles

$$U = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0,\ x_2 > 0\}$$

et

$$U = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0,\ x_2 \geq 0\}$$

ne sont pas fermés.

LEMME 2.9. *Une réunion finie de fermés est un fermé. Une intersection quelconque de fermés est un fermé.*

DÉMONSTRATION. Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille finie d'ensembles fermés (c.à.d. l'ensemble d'indices I est un ensemble fini). Soit $F := \bigcup_{i \in I} F_i$ leur réunion. Par définition, les complémentaires $F_i^c = \mathbb{R}^N \setminus F_i$ sont ouverts. Par conséquence, d'après le Lemme 2.7, le complémentaire

$$\begin{aligned} F^c &:= \mathbb{R}^N \setminus F \\ &= \mathbb{R}^N \setminus (\bigcup_{i \in I} F_i) \\ &= \bigcap_{i \in I} (\mathbb{R}^N \setminus F_i) \end{aligned}$$

est ouvert. Par définition, F est donc fermé.

Soit maintenant $(F_i)_{i \in I}$ une famille quelconque d'ensembles fermés (l'ensemble d'indices I étant un ensemble quelconque). Soit $F := \bigcap_{i \in I} F_i$ leur intersection. Par définition, les complémentaires $F_i^c = \mathbb{R}^N \setminus F_i$ sont ouverts. Par conséquence, d'après le Lemme 2.7, le complémentaire

$$\begin{aligned} F^c &:= \mathbb{R}^N \setminus F \\ &= \mathbb{R}^N \setminus (\bigcap_{i \in I} F_i) \\ &= \bigcup_{i \in I} (\mathbb{R}^N \setminus F_i) \end{aligned}$$

est ouvert. Par définition, F est donc fermé. □

On dit qu'un ensemble $B \subseteq \mathbb{R}^N$ est *borné* s'il existe un rayon $R > 0$ tel que $B \subseteq B(0, R)$. Autrement dit, B est borné si et seulement si il existe une constante $R \geq 0$ telle que pour tout $x \in B$ on a $\|x\| \leq R$.

3. Suites dans $\mathbb{R}^N$

Notations pour les suites dans $\mathbb{R}^N$:

$$(x_n) \text{ ou } (x_n)_n \text{ ou } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ou } (x_n)_{n\geq 0} \text{ ou } (x_n)_{n\geq 1}.$$

Ici, les éléments x_n sont des éléments de $\mathbb{R}^N$: $x_n = (x_{ni})_{1\leq i\leq N} \in \mathbb{R}^N$.

On dit qu'une suite $(x_n) \subseteq \mathbb{R}^N$ *converge vers* $a \in \mathbb{R}^N$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on a $\|x_n - a\| < \varepsilon$. On note $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ si (x_n) converge vers a. On dit que (x_n) est une *suite de Cauchy* si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, m \geq n_0$ on a $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$. Finalement, on dit que (x_n) est une suite *bornée* s'il existe $R \geq 0$ tel que pour tout n on a $\|x_n\| \leq R$.

Lemme 2.10. *Soit $(x_n) \subseteq \mathbb{R}^N$ une suite. Alors*

$$\begin{gathered} (x_n) \textit{ converge vers } a \in \mathbb{R}^N \\ \Downarrow \\ (x_n) \textit{ est une suite de Cauchy} \\ \Downarrow \\ (x_n) \textit{ est une suite bornée.} \end{gathered}$$

Démonstration. On démontre la première implication. Soit donc (x_n) une suite qui converge vers $a \in \mathbb{R}^N$. Soit $\varepsilon > 0$. D'après la définition de convergence, il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on a $\|x_n - a\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Pour ce même n_0 et pour tout $n, m \geq n_0$ on a donc, par l'inégalité du triangle,

$$\|x_n - x_m\| \leq \|x_n - a\| + \|x_m - a\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ainsi, (x_n) est une suite de Cauchy.

On démontre maintenant la deuxième implication. Soit (x_n) une suite de Cauchy. D'après la définition de suite de Cauchy, pour $\varepsilon = 1$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, m \geq n_0$ on a $\|x_n - x_m\| < \varepsilon = 1$. On particulier ($m = n_0$), pour tout $n \geq n_0$ on a

$$\|x_n\| \leq \|x_n - x_{n_0}\| + \|x_{n_0}\| \leq 1 + \|x_{n_0}\|.$$

Soit $R := \sup_{n\leq n_0} \|x_n\|$. Comme l'ensemble des $n \in \mathbb{N}$, $n \leq n_0$, est fini, alors $R < \infty$. Par définition de R, et par l'estimation précdente,

$$\|x_n\| \leq \begin{cases} R & \text{si } n \leq n_0, \\ 1 + R & \text{si } n \geq n_0. \end{cases}$$

Par conséquence, la suite (x_n) est bornée. □

Lemme 2.11. *Une suite $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}^N$ converge vers $a \in \mathbb{R}^N$ (respectivement, est une suite de Cauchy) si et seulement si, quelque soit $1 \leq i \leq N$, la suite $(x_{ni})_n \subseteq \mathbb{R}$ converge vers $a_i \in \mathbb{R}$ (respectivement, est une suite de Cauchy).*

Démonstration. On considère le cas des suites convergentes. Le cas des suites de Cauchy se démontre de manière similaire.

"⇒" Supposons d'abord que $(x_n) \subseteq \mathbb{R}^N$ est une suite qui converge vers $a \in \mathbb{R}^N$. Soit $1 \leq i \leq N$. On veut montrer que la suite $(x_{ni}) \subseteq \mathbb{R}$ converge vers $a_i \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on a $\|x_n - a\| < \varepsilon$. Pour ce même n_0 et pour tout $n \geq n_0$ on a

$$\begin{aligned} |x_{ni} - a_i| &\leq \Big(\sum_{j=1}^{N} |x_{nj} - a_j|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|x_n - a\| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Ceci montre que la suite $(x_{ni}) \subseteq \mathbb{R}$ converge vers $a_i \in \mathbb{R}$. Comme $1 \leq i \leq N$ était arbitraire, on a donc montré que, quelque soit $1 \leq i \leq N$, la suite $(x_{ni}) \subseteq \mathbb{R}$ converge vers $a_i \in \mathbb{R}$.

"⇐" Supposons maintenant que, quelque soit $1 \leq i \leq N$, la suite $(x_{ni}) \subseteq \mathbb{R}$ converge vers $a_i \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, quelque soit $1 \leq i \leq N$, il existe $n_i \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_i$ on a $|x_{ni} - a_i| < \varepsilon/\sqrt{N}$. Soit $n_0 := \max_{1\leq i\leq N} n_i$. Alors $n_0 \in \mathbb{N}$ et $n_0 \geq n_i$ pour tout $1 \leq i \leq N$. Ainsi, pour tout $n \geq n_0$ on a

$$\begin{aligned} \|x_n - a\| &= \Big(\sum_{i=1}^{N} |x_{ni} - a_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &< \Big(\sum_{i=1}^{N} \varepsilon^2/N\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &= (\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Ceci montre que (x_n) converge vers a. □

Théorème 2.12 ($\mathbb{R}^N$ est complet). *Toute suite de Cauchy dans $\mathbb{R}^N$ converge.*

Démonstration. Soit $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}^N$ une suite de Cauchy. Alors, d'après le Lemme 2.11, quelque soit $1 \leq i \leq N$, la suite réelle $(x_{ni})_n$ est une suite de Cauchy. Dans $\mathbb{R}$, toute suite de Cauchy converge. Donc, quelque soit $1 \leq i \leq N$, la suite réelle $(x_{ni})_n$ converge. En appliquant encore une fois le Lemme 2.11 on trouve que $(x_n)_n$ converge. □

A la fin de ce chapitre, nous enoncons une caractérisation des sous-ensembles fermés de $\mathbb{R}^N$ en terme suites convergentes et leurs limites.

Lemme 2.13. *Une ensemble $F \subseteq \mathbb{R}^N$ est fermé si et seulement si pour toute suite convergent $(x_n) \subseteq F$ (convergente dans $\mathbb{R}^N$) on a $\lim_{n\to\infty} x_n \in F$.*

Démonstration. "⇒" Soit $F \subseteq \mathbb{R}^N$ fermé. Soit $(x_n) \subseteq F$ une suite convergente, $x := \lim_{n\to\infty} x_n$. On veut montrer que $x \in F$. Supposons le contraire, c.à.d. $x \in F^c$. Par définition, le complémentaire F^c est ouvert. Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subseteq$

F^c. En même temps, comme la suite (x_n) converge vers x, pour ce $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, quelque soit $n \geq n_0$, $\|x_n - x\| < \varepsilon$. En particulier, $x_{n_0} \in B(x, \varepsilon) \subseteq F^c$ ce qui contredit à l'hypothèse $(x_n) \subseteq F$.

"$\Leftarrow$" Supposons maintenant que pour toute suite convergent $(x_n) \subseteq F$ (convergente dans $\mathbb{R}^N$) on a $\lim_{n\to\infty} x_n \in F$. On veut montrer que F est fermé. Supposons le contraire, c.à.d. F n'est pas fermé. Alors le complémentaire F^c n'est pas ouvert (définition de "fermé"). Comme F^c n'est pas ouvert, il existe $x \in F^c$ tel que, quelque soit $r > 0$, $B(x, r) \not\subseteq F^c$. Autrement dit, il existe $x \in F^c$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $x_n \in F$ avec $\|x_n - x\| < 1/n$. La suite $(x_n) \subseteq F$ ainsi obtenue est une suite convergente, et $x = \lim_{n\to\infty} x_n \in F^c$. Ceci contredit l'hypothèse. $\square$

CHAPITRE 3

Fonctions continues

1. Limites de fonctions

Dans toute la suite on considère des

$$\begin{aligned} \text{fonctions scalaires d'une variable réelle} \quad & f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \\ \text{fonctions scalaires de plusieures variables réelles} \quad & f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}, \\ \text{fonctions vectorielles d'une variable réelle} \quad & f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^M, \\ \text{fonctions vectorielles de plusieures variables réelles} \quad & f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M. \end{aligned}$$

De manière plus générale, on considère des fonctions vectorielles de plusieures variables réelles

$$f : D \to \mathbb{R}^M,$$

où $D \subseteq \mathbb{R}^N$ est le domaine de définition de f (on n'a pas nécessairement $D = \mathbb{R}^N$).

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^N$ et $y_0 \in \mathbb{R}^M$. On dit que y_0 *est la limite de* f *on* x_0, si pour tout voisinage $V \subseteq \mathbb{R}^M$ de y_0 il existe un voisinage $U \subseteq \mathbb{R}^N$ de x_0 tel que

$$f(U \setminus \{x_0\}) := \{f(x) : x \in U \cap D,\ x \neq x_0\} \subseteq V.$$

On écrit $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$ si y_0 est la limite de f en x_0.

Lemme 3.1. *On a* $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$ *si et seulement si pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe un* $\delta > 0$ *tel que pour tout* $x \in D \setminus \{x_0\}$ *on a*

$$\|x - x_0\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|f(x) - y_0\| < \varepsilon. \tag{3.1}$$

Démonstration. "$\Rightarrow$" On suppose d'abord que $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors la boule $V := B(y_0, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}^M$ est un voisinage de y_0. Par hypothèse, il existe un voisinage $U \subseteq \mathbb{R}^N$ de x_0 tel que

$$f(U \setminus \{x_0\}) \subseteq B(y_0, \varepsilon).$$

Par définition de voisinage, il existe $\delta > 0$ tel que $B(x_0, \delta) \subseteq U$. Ainsi,

$$f(B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}) \subseteq B(y_0, \varepsilon),$$

ce qui veut dire exactement que pour tout $x \in D \setminus \{x_0\}$ on a l'implication (3.1).
"$\Leftarrow$" On suppose maintenant inversement que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in D \setminus \{x_0\}$ on a l'implication (3.1). Soit $V \subseteq \mathbb{R}^M$ un voisinage de y_0. Par définition de voisinage, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(y_0, \varepsilon) \subseteq V$. Par hypothèse, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in D \setminus \{x_0\}$ on a l'implication (3.1). On pose

$U := B(x_0, \delta) \subseteq \mathbb{R}^N$. Alors U est un voisinage de x_0. En plus, l'implication (3.1) dit que

$$f(U \setminus \{x_0\}) \subseteq B(y_0, \varepsilon) \subseteq V.$$

□

Lemme 3.2 (Linéarité de la limite). *Soient f, $g : D \to \mathbb{R}^M$ deux fonctions avec domaine de définition $D \subseteq \mathbb{R}^N$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose que f et g admettent des limites en x_0. Alors $f + g$ et λf admettent des limites en x_0 et*

$$\text{(i)} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)),$$

$$\text{(ii)} \quad \lambda \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} (\lambda f(x)).$$

Démonstration. □

Lemme 3.3 (Caractérisation de la limite par des suites). *Soit $f : D \to \mathbb{R}^M$ une fonction avec domaine de définition $D \subseteq \mathbb{R}^N$. Alors y_0 est limite de f en $x_0 \in \mathbb{R}^N$ si et seulement si pour toute suite $(x_n) \subseteq D \setminus \{x_0\}$ vérifiant* $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ *on a* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = y_0$.

Démonstration. □

2. Fonctions continues

Soit $f : D \to \mathbb{R}^M$ une fonction avec domaine de définition $D \subseteq \mathbb{R}^N$. On dit que f est *continue en $x_0 \in D$* si $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. On dit simplement que f est *continue* si f est continue en tout point $x_0 \in D$.

Lemme 3.4 (ε-δ-définition de continuité). *Soit $f : D \to \mathbb{R}^M$ une fonction avec domaine de définition $D \subseteq \mathbb{R}^N$. Alors f est continue en $x_0 \in D$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in D$ on a*

$$\|x - x_0\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon.$$

Démonstration. □

Lemme 3.5 (Caractérisation de continuité par les ouverts). *Soit $f : D \to \mathbb{R}^M$ une fonction avec domaine de définition $D \subseteq \mathbb{R}^N$. Alors f est continue si et seulement si pour tout ouvert $V \subseteq \mathbb{R}^M$ il existe un ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^N$ tel que*

$$f^{-1}(V) := \{x \in D : f(x) \in V\} = D \cap U.$$

Démonstration. "⇒" On suppose que f est continue. Soit $V \subseteq \mathbb{R}^M$ un ouvert et soit $f^{-1}(V) = \{x \in D : f(x) \in V\}$ sa pré-image. Soit $x \in f^{-1}(V)$. Alors $f(x) \in V$. Comme V est un ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(f(x), \varepsilon) \subseteq V$. Comme f est continue, il existe $\delta = \delta_x > 0$ tel que pour tout $y \in D$, $\|y - x\| < \delta_x$, on a $\|f(y) - f(x)\| < \varepsilon$. Autrement dit, l'image de $B(x, \delta_x) \cap D$ sous f est contenu dans $B(f(x), \varepsilon) \subseteq V$, ou, $B(x, \delta_x) \cap D$ est contenu dans $f^{-1}(V)$. Soit maintenant $U := \bigcup_{x \in f^{-1}(V)} B(x, \delta_x)$. Alors, d'après le Lemme 2.7, U est un ouvert. En plus, $f^{-1}(V) = D \cap U$.

"⇐" On suppose maintenant que pour tout ouvert $V \subseteq \mathbb{R}^M$ il existe un ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^N$ tel que $f^{-1}(V) = D \cap U$. On veut montrer que f est continue. Soit $x \in D$

et soit $\varepsilon > 0$. La boule $V = B(f(x), \varepsilon)$ est ouvert. D'après l'hypothèse il existe un ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^N$ tel que $f^{-1}(V) = D \cap U$. Clairement, $x \in U$. Comme U est ouvert, il existe $\delta > 0$ tel que $B(x, \delta) \subseteq U$. Ainsi, $f(B(x, \delta) \cap D) \subseteq f(U \cap D) \subseteq V = B(f(x), \delta)$ ce qui veut dire que pour tout $y \in D$ tel que $\|y - x\| < \delta$ on a $\|f(y) - f(x)\| < \varepsilon$. D'aprés le Lemme 3.4, f est donc continue en x. Comme $x \in D$ était arbitraire, f est continue. □

LEMME 3.6 (Caractérisation de continuité par des suites). *Soit $f : D \to \mathbb{R}^M$ une fonction avec domaine de définition $D \subseteq \mathbb{R}^N$. Alors f est continue en $x_0 \in D$ si et seulement si pour toute suite $(x_n) \subseteq D$ vérifiant* $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ *on a* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

DÉMONSTRATION. Ceci est une conséquence immédiate du Lemme 3.3. □

LEMME 3.7 (Linéarité de continuité). *Soient $f, g : D \to \mathbb{R}^M$ deux fonctions avec domaine de définition $D \subseteq \mathbb{R}^N$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose que f et g sont continues en $x_0 \in D$ (respectivement, continue). Alors $f+g$ et λf sont continues en x_0 (respectivement, continue).*

DÉMONSTRATION. Ceci est une conséquence immédiate de la linéarité de la limite (Lemme 3.2) et de la définition de continuité. □

Plus précisément, on a une propriété plus forte pour le produit.

LEMME 3.8 (Continuité d'un produit de fonctions continues). *Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}^M$ deux fonctions avec domaine de définition $D \subseteq \mathbb{R}^N$. Si f et g sont continues en x_0, alors le produit $f \cdot g$ est continue en x_0.*

DÉMONSTRATION. □

Dans la suite on note

$$C(D; \mathbb{R}^M) := \{f : D \to \mathbb{R}^M : f \text{ est continue}\}$$

l'ensemble de toutes les fonctions continues $D \to \mathbb{R}^M$. Si $M = 1$, on note simplement $C(D)$ au lieu de $C(D; \mathbb{R})$. D'après le lemme précédent (Lemme 3.7), $C(D; \mathbb{R}^M)$ (et a fortiori $C(D)$) est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

LEMME 3.9 (Continuité des fonctions composées). *Soient $f : D_f \to \mathbb{R}^M$ et $g : D_g \to \mathbb{R}^L$ deux fonctions avec domaines de définition $D_f \subseteq \mathbb{R}^N$ et $D_g \subseteq \mathbb{R}^M$. On suppose que l'image de f est contenue dans D_g, c.à.d. $f(D_f) \subseteq D_g$. Si f est continue en x_0 (respectivement, continue) et si g est continue en $f(x_0)$ (respectivement, continue), alors la fonction composée $g \circ f : D_f \to \mathbb{R}^L$ est continue en x_0 (respectivement, continue).*

DÉMONSTRATION. Soit $(x_n) \subseteq D_f$ une suite qui converge vers x_0. Comme f est continue en x_0, alors $(f(x_n))$ converge vers $f(x_0)$ (Lemme 3.6). Comme g est continue en $f(x_0)$, alors $(g(f(x_n)) = (g \circ f(x_n))$ converge vers $g(f(x_0)) = g \circ f(x_0)$ (Lemme 3.6). Comme la suite (x_n) était arbitraire, le Lemme 3.6 implique que $g \circ f$ est continue en x_0. □

3. Fonctions continues sur les compacts

A la fin de ce chapitre on veut étudier une propriété importante des fonctions continues qui sont définies sur des ensembles D bornés et fermés dans $\mathbb{R}^N$ (que l'on appelle les sous-ensembles *compacts* de $\mathbb{R}^N$).

Théorème 3.10 (Bolzano-Weierstraß). *Toute suite bornée dans $\mathbb{R}^N$ admet une sous-suite convergente.*

Démonstration. Soit (x_n) une suite bornée dans $\mathbb{R}^N$. Alors, par définition, il existe $R \geq 0$ tel que pour tout n on a $\|x_n\| = (\sum_{i=1}^N x_{ni}^2)^{\frac{1}{2}} \leq R$. En particulier, quelque soit $1 \leq i \leq N$, la suite (x_{ni}) est bornée dans $\mathbb{R}$. Dans $\mathbb{R}$ toute suite bornée admet une sous-suite convergente (Théorème de Bolzano-Weierstraß dans $\mathbb{R}$). En appliquant ce résultat à la première composante on trouve qu'il existe une sous-suite $(x_{\varphi_1(n)})$ de (x_n) tel que $(x_{\varphi_1(n)1})_n$ converge dans $\mathbb{R}$. Ensuite, on trouve une sous-suite $(x_{\varphi_2(n)})_n$ de $(x_{\varphi_1(n)})$ tel que la suite des deuxièmes composantes $(x_{\varphi_2(n)2})_n$ converge dans $\mathbb{R}$. Comme $(x_{\varphi_2(n)})_n$ est une sous-suite de $(x_{\varphi_1(n)})$ et comme toute sous-suite d'une suite convergente converge, alors $(x_{\varphi_2(n)1})_n$ converge dans $\mathbb{R}$ aussi. En continuant ainsi, on trouve qu'il existe une sous-suite $(x_{\varphi_N(n)})_n$ de $(x_{\varphi_{N-1}(n)})_n$ tel que, pour tout $1 \leq i \leq N$, la suite $(x_{\varphi_N(n)i})_n$ converge dans $\mathbb{R}$. En appliquant le Lemme 2.11, on trouve que $(x_{\varphi_N(n)})_n$ converge dans $\mathbb{R}^N$. □

Lemme 3.11. *Un ensemble $D \subseteq \mathbb{R}^N$ est borné et fermé si et seulement si toute suite $(x_n) \subseteq D$ admet une sous-suite qui converge dans D, c.à.d. une sous-suite convergente $(x_{n_k})_k$ telle que $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} \in D$.*

Démonstration. "⇒" Supposons d'abord que D est borné et fermé. Soit (x_n) une suite dans D. Comme D est borné, alors la suite (x_n) est bornée. D'après le Théorème de Bolzano-Weierstraß, (x_n) admet une sous-suite convergente. Comme D est fermé, la limite de cette sous-suite appartient à D (Lemme 2.13).

"⇐" Supposons maintenant que toute suite dans D admet une sous-suite convergente dans D. Alors, en particulier, les suites $(x_n) \subseteq D$ convergentes dans $\mathbb{R}^N$ admettent des sous-suites qui convergent dans D. Comme toute sous-suite d'une suite convergente est convergente à la même limite, on obtient par le Lemme 2.13 que D est fermé. Il reste à montrer que D est borné. Supposons le contraire. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $x_n \in D$ tel que $\|x_n\| \geq n$. Toute sous-suite de la suite $(x_n) \subseteq D$ ainsi obtenue est non-bornée. Donc, d'après le Lemme 2.10, aucune sous-suite de (x_n) ne peut converger, ce qui contredit l'hypothèse. □

On appelle tout sous-ensemble $K \subseteq \mathbb{R}^N$ vérifiant une des propriétés équivalentes du Lemme 3.11 un *compact*. Autrement dit, un sous-ensemble $K \subseteq \mathbb{R}^N$ est compact si K est borné et fermé. Ou, d'une manière équivalente, un sous-ensemble $K \subseteq \mathbb{R}^N$ est compact si toute suite dans K admet une sous-suite convergente dans K (c.à.d. la limite appartient aussi à K). En fait, la première définition est peut-être plus facile à retenir, mais la deuxième définition est meilleure dans le sens qu'elle se généralise plus facilement dans le contexte des espaces métriques (au lieu de $\mathbb{R}^N$; voir le cours

Fondements de l'Analyse en L3). En plus, on utilise la deuxième définition dans la démonstration du théorème suivant.

Théorème 3.12. *Soit $f : K \to \mathbb{R}^M$ une fonction continue sur un domaine de définition $K \subseteq \mathbb{R}^N$ qui est compact. Alors l'image $f(K)$ est aussi compact.*

Démonstration. Soit $(y_n) \subseteq f(K)$ une suite quelconque dans l'image de f. Par définition de l'image, pour chaque y_n il existe $x_n \in K$ tel que $f(x_n) = y_n$. Comme K est compact, la suite $(x_n) \subseteq K$ admet une sous-suite convergente (x_{n_k}) avec $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} =: x \in K$. Par continuité de f, la sous-suite des images $(y_{n_k}) = (f(x_{n_k}))$ est convergente et $y := \lim_{k\to\infty} y_{n_k} = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x) \in f(K)$. On a donc démontré que toute suite dans $f(K)$ admet une sous-suite convergente dans $f(K)$. Ainsi, $f(K)$ est compact. □

Le prochain résultat contient un critère pratique qui implique qu'une fonction scalaire atteint son minimum et son maximum.

Corollaire 3.13. *Soit $f : K \to \mathbb{R}$ une fonction scalaire continue sur un domaine de définition $K \subseteq \mathbb{R}^N$ qui est compact. Alors f atteint son minimum et son maximum, c.á.d. il existe x_m, $x_M \in K$ tel que*

$$f(x_m) = \inf_{x\in K} f(x) = \min_{x\in K} f(x) \text{ et } f(x_M) = \sup_{x\in K} f(x) = \max_{x\in K} f(x). \tag{3.2}$$

Démonstration. D'après le Théorème 3.12, l'image $f(K)$ est borné et fermé dans $\mathbb{R}$. Comme $f(K)$ est borné, la borne inférieure $\inf_{x\in K} f(x) = \inf f(K)$ et la borne supérieure $\sup_{x\in K} f(x) = \sup f(D)$ sont finies. Comme $f(K)$ est fermé, on a $\inf_{x\in K} f(x)$, $\sup_{x\in K} f(x) \in f(K)$ (on peut utiliser le Lemme 2.13 pour voir ça). Ceci veut dire qu'il existe x_m, $x_M \in K$ tel que les relations (3.2) soient vraies. □

Soit $D \subseteq \mathbb{R}^N$. On rappelle qu'une fonction $f : D \to \mathbb{R}^M$ est continue si

$$\forall x \in D \,\forall \varepsilon > 0 \,\exists \delta > 0 \,\forall y \in D : \quad \|x - y\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon.$$

On dit qu'une fonction $f : D \to \mathbb{R}^M$ est *uniformément continue* si

$$\forall \varepsilon > 0 \,\exists \delta > 0 \,\forall x, y \in D : \quad \|x - y\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon;$$

(attention à l'ordre des quanteurs!!).

Théorème 3.14. *Soit $f : K \to \mathbb{R}^M$ une fonction continue sur un domaine de définition $K \subseteq \mathbb{R}^N$ qui est compact. Alors f est uniformément continue.*

Démonstration. On fait un raisonnement par l'absurde, c.à.d. on suppose que f n'est pas uniformément continue. Alors il existe $\varepsilon > 0$ et deux suites (x_n), $(y_n) \subseteq K$ tels que $\|x_n - y_n\| \leq \frac{1}{n}$ et $\|f(x_n) - f(y_n)\| \geq \varepsilon$. Comme K est compact, il existe des sous-suites (x_{n_k}) et (y_{n_k}) et $x, y \in K$ tels que $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$ et $\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = y$ (attention: pour avoir les mêmes indices n_k, il faut d'abord choisir une sous-suite convergente (x_{n_k}) de (x_n), ensuite une sous-suite convergente $(y_{n_{k_l}})$ de (y_{n_k}) (!), et finalement considérer les sous-suites $(x_{n_{k_l}})$ et $(y_{n_{k_l}})$). On a

$$\|x - y\| = \lim_{k\to\infty} \|x_{n_k} - y_{n_k}\| \leq \lim_{k\to\infty} \frac{1}{n_k} = 0,$$

et donc $x = y$. Ceci et la continuité de f impliquent

$$\begin{aligned}\varepsilon &\leq \liminf_{k\to\infty} \|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})\| \\ &= \liminf_{k\to\infty} \|f(x_{n_k}) - f(x) + f(y) - f(y_{n_k})\| \\ &\leq \liminf_{k\to\infty}(\|f(x_{n_k}) - f(x)\| + \|f(y) - f(y_{n_k})\|) \\ &= 0,\end{aligned}$$

ce qui est une contradiction, car $\varepsilon > 0$. Donc, f est uniformément continue. □

CHAPITRE 4

Calcul différentiel

1. Dérivée totale et dérivées partielles

Soit $U \subseteq \mathbb{R}^N$ un ouvert. On dit qu'une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ est *dérivable en* $x \in U$ s'il existe $a \in \mathbb{R}^N$ tel que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - a \cdot h}{\|h\|} = 0.$$

Ici, $a \cdot h = \sum_{i=1}^N a_i h_i$ est le *produit scalaire* des vecteurs a, $h \in \mathbb{R}^N$. Le vecteur $a \in \mathbb{R}^N$ est unique (s'il existe); on notera $f'(x) := a$ et on appelle $f'(x)$ la *dérivée* (ou: dérivée totale) de f en x. On dit que f est *dérivable* si f est dérivable en chaque point $x \in U$. La fonction $f' : U \to \mathbb{R}^N$, $x \mapsto f'(x)$ est alors appelée la *dérivée* de f. On dit que f est *continûment dérivable* (ou: de classe C^1) si f est dérivable et si sa dérivée f' est continue.

Lemme 4.1. *Si $f : U \to \mathbb{R}$ est dérivable en $x \in U$, alors f est continue en x.*

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}(f(x+h) - f(x)) &= \lim_{h\to 0}\Big(\frac{f(x+h) - f(x) - f'(x)\cdot h}{\|h\|}\,\|h\| + f'(x)\cdot h\Big)\\ &= 0.\end{aligned}$$

□

Lemme 4.2. *Si $f : U \to \mathbb{R}$ est dérivable en $x \in U$ et si $a = f'(x)$, et si $e_i \in \mathbb{R}^N$ est le i-ième vecteur unité canonique, alors, quelque soit $1 \leq i \leq N$,*

$$a_i = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+he_i) - f(x)}{h}.$$

On dit que $f : U \to \mathbb{R}$ est *en $x \in U$ partiellement dérivable par rapport à x_i* si la limite

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x+he_i) - f(x)}{h}$$

existe. On appelle alors $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ la *dérivée partielle (en x) de f par rapport à x_i*. On dit simplement que $f : U \to \mathbb{R}$ est *partiellement dérivable par rapport à x_i* si f est en tout $x \in U$ partiellement dérivable par rapport à x_i. La fonction $\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \to \mathbb{R}$ est appelée *dérivée partielle de f par rapport à x_i*. Avec ces définitions, le lemme précédent peut être reformulé autrement (mais de manière équivalente).

LEMME 4.3. *Si $f : U \to \mathbb{R}$ est dérivable en $x \in U$, alors f est en x partiellement dérivable par rapport à tout x_i ($1 \leq i \leq N$) et*

$$f'(x) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N}(x)).$$

La réciproque du lemme précédent n'est pas vraie en général. Cependant, on a le

THÉORÈME 4.4. *On suppose que $f : U \to \mathbb{R}$ est partiellement dérivable par rapport à tout x_i ($1 \leq i \leq N$)* et *que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sont continues. Alors f est continûment dérivable (= de classe C^1).*

DÉMONSTRATION. Soit $x \in U$ et soit $r > 0$ tel que $B(x, r) \subseteq U$. Soit $h \in \mathbb{R}^N$, $\|h\| < r$. Alors

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= f(x_1 + h_1, \dots, x_N + h_N) - f(x_1, \dots, x_N) \\ &= f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \dots, x_N + h_N) - f(x_1, x_2 + h_2, \dots, x_N + h_N) + \\ &\quad + f(x_1, x_2 + h_2, \dots, x_N + h_N) - f(x_1, x_2, \dots, x_N + h_N) + \\ &\quad + \cdots + \\ &\quad + f(x_1, \dots, x_{N-1}, x_N + h_N) - f(x_1, \dots, x_N). \end{aligned}$$

En appliquant le théorème de la moyenne en chaque ligne, on obtient l'existence de $\xi_i \in \mathbb{R}$, $|\xi_i| \leq |h_i|$ ($1 \leq i \leq N$) tel que

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 + \xi_1, x_2 + h_2, \dots, x_N + h_N)\, h_1 + \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2 + \xi_2, \dots, x_N + h_N)\, h_2 + \\ &\quad + \cdots + \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial x_N}(x_1, \dots, x_{N-1}, x_N + \xi_N)\, h_N, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
f(x+h)-f(x) = {} & \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1+\xi_1, x_2+h_2, \dots, x_N+h_N) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, \dots, x_N)\Big)\, h_1 + \\
& + \Big(\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2+\xi_2, \dots, x_N+h_N) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, \dots, x_N)\Big)\, h_2 + \\
& + \cdots + \\
& + \Big(\frac{\partial f}{\partial x_N}(x_1, \dots, x_{N-1}, x_N+\xi_N) - \frac{\partial f}{\partial x_N}(x_1, \dots, x_{N-1}, x_N)\Big)\, h_N + \\
& + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, \dots, x_N)\, h_1 + \\
& + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, \dots, x_N)\, h_2 + \\
& + \cdots + \\
& + \frac{\partial f}{\partial x_N}(x_1, x_2, \dots, x_N)\, h_N.
\end{aligned}$$

On remarque que, si on pose $a = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N}(x))$, alors

$$\begin{aligned}
a \cdot h = {} & \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, \dots, x_N)\, h_1 + \\
& + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, \dots, x_N)\, h_2 + \\
& + \cdots + \\
& + \frac{\partial f}{\partial x_N}(x_1, x_2, \dots, x_N)\, h_N.
\end{aligned}$$

La continuité des dérivées partielles donne donc

$$\begin{aligned}
& \lim_{h\to 0} \frac{|f(x+h)-f(x)-a\cdot h|}{\|h\|} \leq \\
& \leq \lim_{h\to 0} \Big|\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1+\xi_1, x_2+h_2, \dots, x_N+h_N) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, \dots, x_N)\Big| \frac{|h_1|}{\|h\|} + \\
& \quad + \lim_{h\to 0} \Big|\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2+\xi_2, \dots, x_N+h_N) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, \dots, x_N)\Big| \frac{|h_2|}{\|h\|} + \\
& \quad + \cdots + \\
& \quad + \lim_{h\to 0} \Big|\frac{\partial f}{\partial x_N}(x_1, \dots, x_{N-1}, x_N+\xi_N) - \frac{\partial f}{\partial x_N}(x_1, \dots, x_{N-1}, x_N)\Big| \frac{|h_N|}{\|h\|} \\
& = 0,
\end{aligned}$$

ce qui veut dire que f est dérivable en x. Comme $f'(x) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N}(x))$, et comme les dérivées partielles sont continues, on voit que f' est continue. □

1.0.1. *Critères de dérivabilité.*

2. Dérivées partielles d'ordre supérieur

Soit $U \subseteq \mathbb{R}^N$ un ouvert et soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction. On définit

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} := \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right),$$

si les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ et $\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial f}{\partial x_j})$ existent.

Théorème 4.5 (Schwarz). *Soit $U \subseteq \mathbb{R}^N$ un ouvert et soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que les dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ existent et sont continues. Alors*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Démonstration. □

3. Le théorème de Taylor

4. Extréma

Soit $U \subseteq \mathbb{R}^N$ et soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit qu'un point $x \in U$ est un *minimum local* (respectivement, un *maximum local*) s'il exist un voisinage $V \subseteq \mathbb{R}^N$ de x tel que $f(y) \geq f(x)$ (respectivement, $f(y) \leq f(x)$) pour tout $y \in V \cap U$. On dit que $x \in U$ est un *minimum global* (respectivement, un *maximum global*) si $f(y) \geq f(x)$ (respectivement, $f(y) \leq f(x)$) pour tout $y \in U$. On a déjà vu que si f est une fonction continue sur un ensemble $K \subseteq \mathbb{R}^N$ compact, alors il existe un minimum global et un maximum global pour f (Théorème 3.12. Mais ce résultat est uniquement un résultat d'existence qui n'est pas constructif dans le sens qu'il ne permet pas de localiser des minima / maxima globaux. Pour les localiser, la dérivabilité de f peut aider.

Lemme 4.6 (Condition nécessaire pour un extremum). *Soit $U \subseteq \mathbb{R}^N$ un ouvert, et soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Si $x \in U$ est un extremum local (c.á.d. un minimum local ou un maximum local), alors $f'(x) = 0$.*

Démonstration. On suppose que $x \in U$ est un minimum local. Alors il existe un voisinage $V \subseteq \mathbb{R}^N$ de x tel que $f(y) \geq f(x)$ pour tout $x \in V \cap U$. On a donc $f(x + he) - f(x) \geq 0$ pour tout $e \in \mathbb{R}^N$ et tout $h \in \mathbb{R}$ suffisamment petit (tel que $x + he \in V \cap U$). Soit $e \in \mathbb{R}^N$, $\|e\| = 1$. Alors

$$\begin{aligned} f'(x) \cdot e &= \lim_{h \to 0} \frac{f'(x) \cdot he}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f'(x) \cdot he + f(x) - f(x + he)}{h} + fracf(x + he) - f(x)h\right] \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Comme cette inégalité reste vraie si on remplace e par $-e$, on obtient donc $f'(x) \cdot e = 0$, et comme e était arbitraire, ceci n'est possible que si $f'(x) = 0$.

La démonstration en un maximum local est similaire. □

THÉORÈME 4.7.

5. Le théorème de la fonction implicite

Bibliographie

1. H. Brézis, *Analyse fonctionnelle*, Masson, Paris, 1992.
2. L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 19, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
3. D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2001.
4. F. John, *Partial Differential Equations. Fourth Edition*, Applied Mathematical Sciences, vol. 1, Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1982.
5. J.-L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Gauthier-Villars, Paris, 1969.
6. J.-E. Rakotoson and J.-M. Rakotoson, *Analyse fonctionnelle appliquée aux équations aux dérivées partielles*, Presse universitaire de France, Paris, 1999.
7. H. Reinhard, *Equations aux dérivées partielles. Introduction*, Dunod, Paris, 2001.