Université de Metz

Licence de Mathématiques

5ème semestre

Equations différentielles et stabilité

par Ralph Chill

Laboratoire de Mathématiques et Applications de Metz

Année 2007/08

Table

CHAPITRE 1

Premiers exemples d'équations différentielles

1. Notion d'équation différentielle

Soient $n, m \geq 1$, $D \subseteq \mathbb{R}^{1+mn}$ un domaine (cad. ouvert et connexe) et $f : D \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue.

Une *équation différentielle d'ordre m* est une équation de la forme

$$x^{(m)}(t) = f(t, x(t), x'(t), ..., x^{(m-1)}(t)), \quad t \in I, \tag{1.1}$$

où $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $x : I \to \mathbb{R}^n$ est une fonction qui est m fois différentiable. Cette fonction x est l'inconnue et *résoudre* l'équation differentielle (1.1) veut dire trouver une fonction x qui est m fois différentiable et qui vérifie (1.1).

Si $n \geq 2$, alors la fonction x est à valeurs vectorielles, $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $f = (f_1, \dots, f_n)$, et l'équation (1.1) est en fait un système de n équations différentielles scalaires. Au lieu de (1.1) on pourrait alors écrire n équations scalaires. Dans ce cas le système (1.1) devient:

$$\begin{aligned}
x_1^{(m)}(t) &= f_1(t, x_1(t), \dots, x_n(t), x_1'(t), \dots, x_n'(t), \dots, x_1^{(m-1)}(t), \dots, x_n^{(m-1)}(t)),\\
x_2^{(m)}(t) &= f_2(t, x_1(t), \dots, x_n(t), x_1'(t), \dots, x_n'(t), \dots, x_1^{(m-1)}(t), \dots, x_n^{(m-1)}(t)),\\
\vdots \quad & \quad \vdots\\
x_n^{(m)}(t) &= f_n(t, x_1(t), \dots, x_n(t), x_1'(t), \dots, x_n'(t), \dots, x_1^{(m-1)}(t), \dots, x_n^{(m-1)}(t)).
\end{aligned}$$

Des fois, on va utiliser cette notation, mais pour la théorie abstraite la notation (1.1) semble être plus facile.

Souvent une équation différentielle est complémentée de conditions initiales et elle est alors de la forme

$$\begin{cases}
x^{(m)}(t) = f(t, x(t), x'(t), ..., x^{(m-1)}(t)), \quad t \in I,\\
x(t_0) = x_0,\\
x'(t_0) = x_1,\\
\dots\\
x^{(m-1)}(t_0) = x_{m-1}.
\end{cases} \tag{1.2}$$

Ici, $t_0 \in I$ est un 'temps' initial et $x_0, x_1, \dots, x_{m-1} \in \mathbb{R}^n$ sont des données initiales. On appelle (1.2) *problème à données initiales* ou *problème de Cauchy*.

EXEMPLE 1.1 (Croissance exponentielle). Soit $I = [0, T]$ un intervalle qui représent le temps. Pour tout temps $t \in I$ on mesure le nombre $x(t)$ d'individus d'une population, par exemple une population de cellules.

On suppose (!) que les cellules ne meurent pas, et qu'elles se multiplient indépendemment du temps mais proportionnellement à leurs nombre. Autrement dit, le changement infinitésimal $x'(t)$ est proportionnel au nombre $x(t)$ et la constante de proportionalité est indépendent du temps. On arrive ainsi à l'équation différentielle

$$x'(t) = a \cdot x(t).$$

Ceci est une équation différentielle du premier ordre. On peut en plus supposer que le nombre de cellules au temps $t = t_0 \in I$ soit donné:

$$x(t_0) = x_0.$$

Alors on obtient un problème de Cauchy.

EXEMPLE 1.2. On considère la même situation comme dans l'exemple 1.1, mais on suppose que la constante de proportionalité dépend du temps (par exemple, les cellules se divisent mieux pendant le jour que pendant la nuit). Alors on obtient l'équation différentielle

$$x'(t) = a(t)x(t)$$

qui peut être complémentée d'une donnée initiale.

EXEMPLE 1.3 (Le pendule). Une masse m réduit à un point M est attaché à un fil de longueur l qui lui-même n'a pas de masse. Soit $\varphi(t)$ l'angle de ce pendule par rapport à la verticale, et g la constante de la graviation. Alors la fonction φ vérifie l'équation differentielle du pendule physique:

$$m \cdot l \cdot \varphi''(t) = -mg \cdot \sin \varphi(t).$$

Pour φ petit, on peut remplacer $\sin \varphi$ par φ (première approximation dans le dévéloppement de Taylor). Alors on obtient l'équation differentielle du pendule mathématique:

$$l\varphi''(t) = -g\varphi(t).$$

EXEMPLE 1.4 (Johann Bernoulli[1], 1696). On se donne deux points A et B dans le plan. On doit trouver une courbe liant A et B (représentée par le graphe d'une fonction $x : I \to \mathbb{R}$) telle qu'une masse m se rend le plus vite de A à B en suivant cette courbe et sous la seule influence de la gravitation. Johann Bernoulli a montré que la solution x de ce problème vérifie l'équation différentielle

$$x'(t) = \sqrt{\frac{a - x(t)}{x(t)}}.$$

Quelques problèmes importants dans la théorie des équations différentielles:

- Existence et unicité de solutions?

[1] Johann Bernoulli (27.7.1667-1.1.1748)

- Dépendence continue des données initiales?
- Résolution explicite?
- Résolution numérique?
- Etude du comportement qualitatif des solutions: comportement asymptotique, "blow up", existence de points d'équilibre, existence de solutions périodiques, stabilité et instabilité des points d'équilibre, chaos, ...?
- Modélisation?

Dans la suite, si $D \subset \mathbb{R}^{1+n}$ est un ouvert et $f : D \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue, alors l'équation différentielle du premier ordre est l'équation

$$x'(t) = f(t, x(t)). \tag{1.3}$$

Cette équation différentielle sera souvent complémentée d'une condition initiale

$$x(t_0) = x_0 \tag{1.4}$$

ou $(t_0, x_0) \in D$.

Définition 1.5 (Solution). On appelera *solution* du problème (1.3) et (1.4) toute fonction $x : I_0 \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 définie sur un intervalle I_0 contenant t_0 qui vérifie l'équation diffèrentielle (1.3) et la condition initiale (1.4).

2. Equations différentielles linéaires du premier ordre

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbb{R}$ et $a : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On considère *l'équation différentielle linéaire homogène du premier ordre*:

$$\begin{cases} x'(t) = a(t)x(t), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{1.5}$$

Cette équation différentielle admet toujours une solution unique et la proposition suivante montre même qu'on peut calculer cette solution.

Proposition 1.6. *Le problème* (1.5) *admet une solution unique qui est définie sur tout l'intervalle I. Cette solution est donnée par*

$$x(t) = e^{\int_{t_0}^t a(s)\,ds}\, x_0, \quad t \in I.$$

Démonstration. Existence: on vérifie aisément que la fonction x est en fait une solution de (1.5).

Unicité: Soit z une deuxième solution du problème (1.5). On définit $v(t) := e^{-\int_{t_0}^t a(s)\,ds} z(t)$. Alors, comme z est une solution, on obtient

$$\begin{aligned} v'(t) &= -a(t)e^{-\int_{t_0}^t a(s)\,ds} z(t) + e^{-\int_{t_0}^t a(s)\,ds} z'(t) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi la fonction v est constante. En plus, par la définition de v et comme z est une solution de (1.5),

$$v(t_0) = z(t_0) = x_0.$$

En conséquent, $v(t) = x_0$ pour tout $t \in I$. La définition de v implique alors que

$$z(t) = e^{\int_{t_0}^t a(s)\,ds}\, x_0 = x(t), \quad t \in I,$$

c.à.d. $z = x$. $\square$

Soient I, t_0, x_0 et a comme ci-dessus et soit en plus $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On considère *l'équation différentielle linéaire non-homogène du premier ordre*:

$$\begin{cases} x'(t) = a(t)x(t) + g(t), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{1.6}$$

Proposition 1.7. *Le problème* (1.5) *admet une solution unique qui est définie sur tout l'intervalle I. Cette solution est donnée par*

$$x(t) = e^{\int_{t_0}^t a(s)\,ds}\, x_0 + \int_{t_0}^t e^{\int_s^t a(r)\,dr}\, g(s)\,ds, \quad t \in I.$$

Démonstration. Existence: On vérifie que x est en fait une solution du problème (1.6).

Unicité: Soient x_1 et x_2 deux solution du problème (1.6). Alors la différence $x(t) := x_1(t) - x_2(t)$ est une solution du problème linéaire homogène (1.5) pour la donnée initiale $x(t_0) = 0$. La Proposition 1.6 implique que $x = 0$. Ainsi, $x_1 = x_2$. $\square$

3. Equations différentielles du premier ordre à variables séparées

On considère comme deuxième exemple l'équation différentielle du premier ordre à variables séparèes:

$$\begin{cases} x'(t) = a(t)\, f(x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{1.7}$$

où $a : I \to \mathbb{R}$ et $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues.

Dans cet exemple, on va procéder différemment. On *suppose* d'abord que $x : I \to \mathbb{R}$ est une solution de cette équation différentielle. On *suppose* en plus que $f(x(t)) \neq 0$ pour tout $t \in I$.

Alors on a

$$\frac{x'(t)}{f(x(t))} = a(t) \text{ pour tout } t \in I.$$

En intégrant cette équation de t_0 à t on obtient:

$$\int_{t_0}^t \frac{x'(s)}{f(x(s))}\,ds = \int_{t_0}^t a(s)\,ds,$$

La substitution $v := x(s)$ donne:

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{f(v)}\,dv = \int_{t_0}^t a(s)\,ds.$$

Soit F une intégrale de $\frac{1}{f}$ sur l'intervalle $[x_0, x(t)]$. Cette intégrale existe parce que f est continue et non-nulle sur cet intervalle. En particulier, F est monotone. On a:

$$F(x(t)) = F(x_0) + \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds.$$

Comme la fonction F est monotone, elle admet une inverse, notée F^{-1}:

$$x(t) = F^{-1}(F(x_0) + \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds).$$

Par le calcul précédent on obtient donc que *si* x est une solution de (1.7), alors elle est donnée par cette formule. Par contre, tous les étapes ci-dessus sont réversibles et on voit que si on *définit* x comme dans cette formule, alors x *est* une solution de (1.7).

Proposition 1.8 (Existence et unicité locale). *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ telle que $f(x_0) \neq 0$. Alors le problème* (1.7) *admet une solution x qui est définit sur un intervalle I_0 voisinage de t_0. Cette solution est donnée par*

$$\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{f(v)}\, dv, \quad t \in I_0.$$

Si x_1 et x_2 sont deux solutions de (1.7)*, alors elles coincident dans un voisinage de t_0.*

Démonstration. L'unicité a déjà été démontré.

Existence: Soit $J_0 \subset J$ un intervalle, voisinage de x_0, tel que $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in J_0$. Par hypothèse et continuité de f, un tel intervalle existe. On va supposer sans perte de généralité que $f(x) > 0$ pour tout $x \in J_0$, le cas où f est négative étant similaire.

On définit

$$F(\eta) := \int_{x_0}^{\eta} \frac{1}{f(v)}\, dv, \quad \eta \in J_0.$$

Alors F est strictement croissante sur l'intervalle J_0. En conséquence, F admet une fonction inverse notée F^{-1}. Cette inverse est comme F de classe C^1.

On définit en plus $A(t) := \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds$ et $K_0 := F(J_0)$. Soit $I_0 \subset I$ un intervalle ouvert tel que $t_0 \in I_0$ et $A(I_0) \subseteq K_0$. Soit

$$x(t) := F^{-1}(A(t)), \quad t \in I_0.$$

On vérifie que $x(t_0) = x_0$ et $x'(t) = a(t) \cdot f(x(t))$, c.à.d. x *est* une solution de (1.7). □

4. L'équation différentielle $x' = f(\frac{at+bx+c}{\alpha t+\beta x+\gamma})$

Nous considérons deux cas particuliers de cette équation différentielle.

Le premier cas particuler est l'équation différentielle

$$\begin{cases} x'(t) = f(\frac{x(t)}{t}), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{1.8}$$

Supposons que $x : I_0 \to \mathbb{R}$ est une solution de cette équation différentielle et posons $z(t) := \frac{x(t)}{t}$. Alors on calcul que

$$\begin{aligned} z'(t) &= \frac{x'(t)}{t} - \frac{x(t)}{t^2} \\ &= \frac{1}{t}(f(z(t)) - z(t)) \end{aligned}$$

et

$$z(t_0) = \frac{x(t_0)}{t_0},$$

c.à.d. z est une solution d'une équation différentielle à variables séparées.

Inversement, si z est une solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} z'(t) = \frac{1}{t}(f(z(t)) - z(t)), \\ z(t_0) = \frac{x_0}{t_0}, \end{cases}$$

alors $x(t) := t\,z(t)$ est une solution de (1.8). La substitution $z(t) = \frac{x(t)}{t}$ transforme alors l'équation différentielle (1.8) en une équation différentielle à variables séparabés (1.7), pour laquelle on connaît existence, unicité et même une représentation de la solution.

On considère comme deuxième cas l'équation différentielle

$$\begin{cases} x'(t) = f(at + bx(t) + c), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{1.9}$$

Soit $x : I_0 \to \mathbb{R}$ une solution de cette équation différentielle et posons $z(t) := at + bx(t) + c$. Alors on calcul que

$$\begin{aligned} z'(t) &= a + bx'(t) \\ &= a + bf(z(t)) \end{aligned}$$

et

$$z(t_0) = at_0 + bx_0 + c,$$

c.à.d. z est une solution d'une équation différentielle à variables séparées.

Inversement, si z est une solution de

$$\begin{cases} z'(t) = a + bf(z(t)), \\ z(t_0) = at_0 + bx_0 + c, \end{cases}$$

alors $x(t) := \frac{z(t)-at-c}{b}$ est une solution de (1.9).

L'équation générale $x' = f(\frac{at+bx+c}{\alpha t+\beta x+\gamma})$ est traitée dans [**6**, Abschnitt 9].

5. Champs de vecteurs

Pour deux cas simples d'équation différentielles on peux essayer de comprendre le comportement qualitatif des solutions (si elles existent et sont uniques) en déssinant des champs de vecteurs.

(1) Dans le premier cas, soient $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Nous considérons l'équation différentielle *non-autonome* (c.à.d. dépendante du temps)

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{1.10}$$

où $(t_0, x_0) \in D$.

Si $x : I_0 \to \mathbb{R}$ est une solution de cette équation différentielle, et si nous déssinons le graphe de cette solution x dans un systéme cartésien de coordonnées t et x, alors l'équation différentielle dit que la tangente en un point $(t, x(t))$ du graphe, caractérisée essentiellement par $x'(t)$, est donné par $f(t, x(t))$.

Nous déssinons donc dans un systéme cartésien de coordonnées t et x en tout point $(t, x) \in D$ le vecteur $(1, f(t, x))$ (où aussi $(c, cf(t, x))$ avec une constante $c > 0$ fixée).

Le *champs de vecteur* que nous obtenons ainsi peut nous indiquer comment se comportent les solutions de l'équation différentielle (1.10).

Exemple 1.9. Considérons l'exemple

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{\sin t}{1+x(t)}, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

Cette équation différentielle mène au champs de vecteurs suivant. Pour les données initiales $x_0 = -0.2$ et $x_0 = 1.2$ on trouveras aussi les graphes des solutions correspondantes.

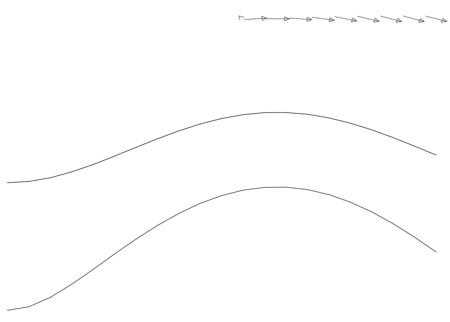

Figure 1. Champs de vecteurs pour $x' = \frac{\sin t}{1+x}$

(2) Dans le deuxième cas, soient $D \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert et $f : D \to \mathbb{R}^2$ une fonction continue. Nous considérons l'équation différentielle *autonome* (c.à.d. inépendente du temps)

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{1.11}$$

où $x_0 \in D$.

Si $x : I_0 \to \mathbb{R}^2$ est une solution de cette équation différentielle, et si nous déssinons l'image de cette solution dans un système cartesien de coordonnées x_1 et x_2, c.à.d. si nous déssinons la courbe décrite par la solution x, alors l'équation différentielle dit que la tangente à cette courbe en un point $x(t) \in \mathbb{R}^2$ montre dans la direction du vecteur $f(x(t))$.

Nous déssinons donc dans un systéme cartésien de coordonnées x_1 et x_2 en tout point $(x_1, x_2) \in D$ le vecteur $f(x_1, x_2) = f(x)$ ou le vecteur normalisé $f(x)/\|f(x)\|$ (indiquant juste la direction). Ainsi, nous obtenons un *champs de vecteurs* qui peut indiquer comment les solutions exactes se comportent. Ce champs de vecteurs peut aussi indiquer où trouver des points d'équilibre et s'ils sont stables ou instables, c.à.d. si les solutions convergent vers ces points d'équilibre ou non. En plus, un champs de vecteurs peut nous indiquer si on peut trouver des solutions périodiques et si elles sont stables ou instables.

Exemple 1.10 (Lotka-Volterra). On considère deux populations d'individus. Soient $x(t)$ et $y(t)$ les nombres d'individus de chaque espèce au temps t. On suppose que la population x dépend de la population y, mais pas l'inverse. Le modèle suivant a été proposé par Lotka[2] et Volterra[3]:

$$\begin{cases} x'(t) = -\alpha x(t) + \beta x(t) y(t), \\ y'(t) = \gamma y(t) - \delta x(t) y(t). \end{cases}$$

Ici, α, β, γ et δ sont des constantes positives.

Pour le choix de $\alpha = 1.5$, $\beta = 0.5$, $\gamma = 1$ et $\delta = 1.5$ on obtient le champs de vecteurs suivant.

Exemple 1.11 (Lotka-Volterra). Comme avant, on considère deux populations d'individus, et $x(t)$ et $y(t)$ soient les nombres d'individus au temps t. Dans ce deuxième modèle on suppose que les deux populations sont en compétition. Une équation différentielle simple pour ce modèle est

$$\begin{cases} x'(t) = a x(t) - b x(t) y(t) - c x(t)^2, \\ y'(t) = \alpha y(t) - \beta x(t) y(t) - \gamma y(t)^2, \end{cases}$$

où a, b, c, α, β et γ sont des constantes positives.

---

[2] Lotka ()

[3] Vito Volterra (3.5.1860-11.10.1940)

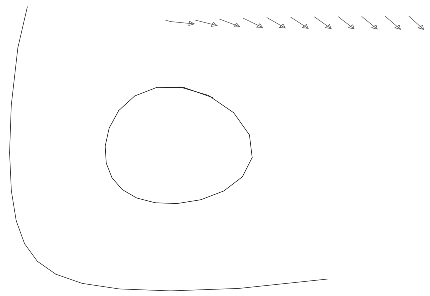

FIGURE 2. Premier modèle de Lotka-Volterra

Pour $a = 0.8$, $b = 0.5$, $c = 0.7$, $\alpha = 1$, $\beta = 0.4$ et $\gamma = 1.1$ on obtient le champs de vecteurs suivant.

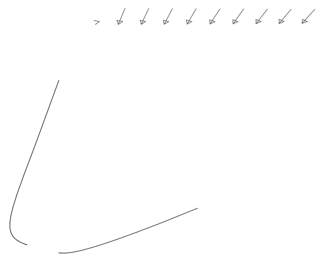

FIGURE 3. Deuxième modèle de Lotka-Volterra (compétition)

CHAPITRE 2

Les théorèmes de Peano et Cauchy-Lipschitz

Soit $D \subset \mathbb{R}^{1+n}$ un ouvert, $f : D \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue et $(t_0, x_0) \in D$. On considère l'équation différentielle du premier ordre

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Le but de ce chapître est de démontrer existence et unicité de solutions locales, et de discuter quelques conséquences.

1. Solutions ε-approchées et théorème de Peano

Nous commençons par étudier l'existence de solutions locales.

Définition 2.1. Une fonction continue $x : I_0 \to \mathbb{R}^n$ est appelée *solution ε-approchée* de (2.1) si elle est C^1 par morceaux, partout dérivable à droite, si $x(t_0) = x_0$ et si

$$\sup_{t \in I_0} \|x'(t) - f(t, x(t))\| \leq \varepsilon.$$

Lemme 2.2. *Sous la seule condition que f soit continue, il existe un intervalle $I_0 \subset \mathbb{R}$, voisinage de t_0, tel que pour tout $\varepsilon > 0$ le problème* (2.1) *admet une solution ε-approchée définie sur I_0.*

Démonstration. Parce que D est un ouvert, on trouve $\alpha > 0$ et $r > 0$ tel que

$$D' := [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times \overline{B}(x_0, r) \subset D.$$

Comme f est continue et par compacité de D' on trouve $M \geq 1$ tel que

$$\|f(t, x)\| \leq M \text{ pour tout } (t, x) \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times \overline{B}(x_0, r).$$

En choisissant α plus petit, si nécessaire, on peut dans la suite supposer que $\alpha \leq \frac{r}{M}$ et on pose alors $I_0 = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme D' est compact et f continue, f est uniformément continue sur D'. Donc, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $(t_1, x_1), (t_2, x_2) \in D'$ on a

$$\|(t_1, x_1) - (t_2, x_2)\| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad \|f(t_1, x_1) - f(t_2, x_2)\| \leq \varepsilon.$$

On choisit une famille finie $(\tau_i)_{0 \leq i \leq m}$ telle que $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_m = t_0 + \alpha$ et

$$\sup_i (\tau_{i+1} - \tau_i) \leq \frac{\delta}{\sqrt{2}M}.$$

Puis on définit

$$\begin{aligned} x(\tau_0) &:= x_0 \text{ et} \\ x(\tau_{i+1}) &:= x(\tau_i) + (\tau_{i+1} - \tau_i) f(\tau_i, x(\tau_i)) \text{ si } 0 \le i \le m-1 \text{ et} \\ x(t) &:= x(\tau_i) + (t - \tau_i) f(\tau_i, x(\tau_i)) \text{ si } t \in [\tau_i, \tau_{i+1}). \end{aligned}$$

Alors la fonction $x : [t_0, t_0 + \alpha] \to \mathbb{R}^n$ est continue, C^1 par morceaux (même linéaire par morceaux) et partout dérivable à droite et à gauche. En plus, $x(t_0) = x_0$ par définition de x.

On montre par récurrence que $\|x(t) - x_0\| \le r$ quelque soit $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$. Premièrement, cette estimation est vraie en $t = t_0 = \tau_0$ car $x(t_0) = x_0$. Maintenant, on suppose que l'estimation est vraie sur $[\tau_0, \tau_i]$ pour un $i \in \{0, \dots, m-1\}$. Alors, pour tout $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$

$$\begin{aligned} \|x(t) - x_0\| &\le \int_{t_0}^{t} \|x'(t)\|\, dt \\ &\le \sum_{j=0}^{i} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \|f(\tau_i, x(\tau_i))\|\, dt \\ &\le \alpha M \\ &\le r. \end{aligned}$$

Donc, $\|x(t) - x_0\| \le r$ quelque soit $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$.

Pour tout $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ on a d'un côté

$$|t - \tau_i| \le \frac{\delta}{\sqrt{2}M} \le \frac{\delta}{\sqrt{2}} \quad (\text{car } M \ge 1)$$

et d'un autre côté

$$\begin{aligned} \|x(t) - x(\tau_i)\| &= \|\int_{\tau_i}^{t} x'(s)\, ds\| \\ &= \|\int_{\tau_i}^{t} f(\tau_i, x(\tau_i))\, ds\| \\ &\le \frac{\delta}{\sqrt{2}M} M = \frac{\delta}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Ceci implique pour tout $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ on a

$$\|(t, x(t)) - (\tau_i, x(\tau_i))\| \le \delta$$

et donc

$$\|x'(t) - f(t, x(t))\| = \|f(\tau_i, x(\tau_i)) - f(t, x(t))\| \le \varepsilon.$$

pour tout $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ et tout $0 \le i \le m-1$. En conséquence, la fonction x est une solution ε-approchée sur l'intervalle $[t_0, t_0 + \alpha]$. D'une manière similaire, on construit une solution ε-approchée sur $[t_0 - \alpha, t_0]$ et on a donc démontré l'existence d'une solution ε-approchée sur I_0. □

REMARQUE 2.3. Les solutions ε-approchées construites dans la démonstration du lemme précédent (en remplaçant la dérivée $x'(t)$ par le quotient $(x(\tau_{i+1}) - x(\tau_i))/(\tau_{i+1} - \tau_i))$ sont les exemples les plus simples de solutions ε-approchées en analyse numérique des équations différentielles. L'algorithme emprunt est l'algorithme d'Euler. Si f est de classe C^1, alors on peut estimer l'erreur ε en fonction du nombre m de points choisis dans l'intervalle $[t_0, t_0 + \alpha]$.

THÉORÈME 2.4 (Peano). *Sous la seule condition que la fonction f soit continue, le problème* (2.1) *admet une solution locale, c.à.d. il existe un intervalle $I_0 \subset \mathbb{R}$ voisinage de t_0 et une fonction $x : I_0 \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 qui vérifie* (2.1).

DÉMONSTRATION. Soit I_0 l'intervalle obtenu dans le lemme 2.2, et soit $(x_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une famille de solutions ε-approchées telle que $\sup_{t\in I_0} \|x_\varepsilon(t) - x_0\| \leq r$ et $\sup_{t\in I_0} \|f(t, x_\varepsilon(t))\| \leq M$ pour des constantes $r > 0$, $M \geq 1$ et pour tout $\varepsilon > 0$. Une telle famille existe d'après le lemme 2.2 et sa démonstration.

Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $t, s \in I_0$ on a

$$\begin{aligned} \|x_\varepsilon(t) - x_\varepsilon(s)\| &\leq \Big|\int_s^t \|x_\varepsilon'(r)\|\, dr\Big| \\ &\leq \Big|\int_s^t (\|f(r, x_\varepsilon(r))\| + \varepsilon)\, dr \\ &\leq (M + \varepsilon)|t - s|. \end{aligned}$$

Donc, toute fonction x_ε est lipschitzienne avec constante de Lipschitz $M + \varepsilon$.

Soit (ε_n) une suite convergente vers 0. On suppose que $\varepsilon_n \leq 1$, quelque soit $n \in \mathbb{N}$. Pour simplifier la notation, on note x_n au lieu de x_{ε_n}.

Soit $(t_j) \subset I_0$ tel que $\{t_j : j\} = I_0 \cap \mathbb{Q}$ (on utilise que $\mathbb{Q}$ est dénombrable et qu'on troube ainsi une telle suite). On montre premièrement (en utilisant l'idée de la suite diagonale de Cantor) que la suite (x_n) admet une sous-suite qui converge en tout point t_j.

Comme la suite $(x_n(t_1))$ est bornée dans $\mathbb{R}$, il existe une sous-suite $(x_{\varphi_1(n)}(t_1))$ qui converge. Puis, comme la suite $(x_{\varphi_1(n)}(t_2))$ est bornée dans $\mathbb{R}$, il existe une sous-suite $(x_{\varphi_2(n)}(t_2))$ (de la sous-suite) qui converge. En itérant ce processus, on trouve une sous-suite $(x_{\varphi_{j+1}(n)}(t_{j+1}))$ de $(x_{\varphi_j(n)}(t_{j+1}))$ qui converge. En prenant la suite diagonale $(x_{\varphi_n(n)})$ on a donc trouvé une sous-suite de (x_n) qui converge en tout point t_j vers un $x(t_j) \in \mathbb{R}$. Pour faciliter la notation, on note cette sous-suite de nouveau (x_n).

On montre que (x_n) converge uniformément sur I_0 vers une fonction continue x. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe une suite finie $(t_{j_l})_{l=1}^k \subset I_0 \cap \mathbb{Q}$ telle que

$$I_0 \subset \bigcup_{l=1}^k \Big(t_{j_l} - \frac{\varepsilon}{2(M+1)}, t_{j_l} + \frac{\varepsilon}{2(M+1)}\Big).$$

Puisque pour tout $l \in \{1, \ldots, k\}$ la suite $(x_n(t_{j_l}))$ est convergente et puisque $k < \infty$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, m \geq n_0$ et tout $l \in \{1, \ldots, k\}$ on a

$$\|x_n(t_{j_l}) - x_m(t_{j_l})\| \leq \varepsilon.$$

Soit $t \in I_0$. Alors il existe $l \in \{1, \dots, k\}$ tel que $|t - t_{j_l}| \leq \frac{\varepsilon}{2(M+1)}$. Donc on obtient pour tout $n, m \geq n_0$,

$$\begin{aligned} \|x_n(t) - x_m(t)\| &\leq \|x_n(t) - x_n(t_{j_l})\| + \\ &\quad + \|x_n(t_{j_l}) - x_m(t_{j_l})\| + \\ &\quad + \|x_m(t_{j_l}) - x_m(t)\| \\ &\leq 2(M+1)\,|t - t_{j_l}| + \varepsilon \\ &\leq 3\varepsilon. \end{aligned}$$

On a donc démontré que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, m \geq n_0$ on a

$$\sup_{t \in I_0} \|x_n(t) - x_m(t)\| \leq 3\varepsilon.$$

Ceci implique que $(x_n(t))$ est une suite de Cauchy et donc une suite convergente vers un élément $x(t) \in \mathbb{R}$, quelque soit $t \in I_0$. C'est un exercice de montrer que (x_n) converge même uniformément vers x et comme les fonctions x_n sont continue, la fonction x est continue.

On montre troisièmement que la fonction x est une solution de notre problème. Comme (x_n) converge uniformément vers x et comme f est continue, on obtient

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{t \in I_0} \|f(t, x_n(t)) - f(t, x(t))\| = 0.$$

De plus, comme x_n est une solution ε_n-approchée, on obtient après une intégration

$$\|x_n(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, x_n(s))\, ds\| \leq \varepsilon_n\, \alpha, \quad t \in I_0.$$

Après un passage à la limite on obtient

$$\|x(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds\| = 0, \quad t \in I_0,$$

ce qui implique

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds, \quad t \in I_0.$$

En particulier, $x(t_0) = x_0$. De plus, comme la fonction $s \to f(s, x(s))$ est continue, la fonction x est de classe C^1 et après une différentiation on obtient

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \in I_0.$$

La fonction x est donc une solution du problème (2.1). □

Remarque 2.5. Dans la démonstration ci-dessus, on a montré que quelque soit la suite (ε_n) convergente vers 0, on trouve une sous-suite (notée de nouveau (ε_n)) telle que (x_{ε_n}) converge vers une solution du problème (2.1). On a donc seulement montré existence d'une solution du problème (2.1), mais pas unicité. En effet, on montrera qu'il existe des équations différentielles avec données initiales pour lesquelles il existe plusieurs solutions. Un exemple est l'équation différentielle

$$x'(t) = 2\,\sqrt{|x(t)|}, \quad x(0) = 0.$$

Ce problème admet comme solutions $x(t) \equiv 0$ et $x(t) = t^2 \operatorname{sgn} t$. Ici, la fonction $f(x) = 2\sqrt{|x|}$ est continue. Dans cet exemple, l'équation est une équation différentielle à variables séparées. Pourquoi est que cet exemple ne contredit pas la Proposition 1.8?

2. Le théorème de Cauchy-Lipschitz

Dans cette section, on va étudier l'unicité d'une solution locale. A cause de l'exemple de la Remarque 2.5, la condition que f soit continue ne suffit pas pour garantir l'unicité. On verra dans le théorème de Cauchy-Lipschitz que c'est la condition que f soit localement lipschitzienne (par rapport à la deuxième variable seulement) qui implique unicité.

Pour cela, on aura besoin du lemme de Gronwall[1].

Lemme 2.6 (Gronwall). *Soit $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $\varphi : I \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue et C, $\varepsilon \geq 0$. On suppose que*

$$\varphi(t) \leq C + \int_a^t (L\varphi(s) + \varepsilon)\, ds, \quad t \in I.$$

Alors on a

$$\varphi(t) \leq Ce^{L(t-a)} + \frac{\varepsilon}{L}(e^{L(t-a)} - 1), \quad t \in I.$$

Démonstration. On pose $\psi(t) := C + \int_a^t (L\varphi(s) + \varepsilon)\, ds$ ($t \in I$). Comme φ est continue, la fonction ψ est continûment différentiable. L'hypothèse implique que pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= L\varphi(t) + \varepsilon \\ &\leq L\psi(t) + \varepsilon. \end{aligned}$$

La proposition 1.7 implique que pour tout $t \in I$ on a

$$\psi(t) \leq Ce^{L(t-a)} + \frac{\varepsilon}{L}(e^{L(t-a)} - 1).$$

Comme $\varphi(t) \leq \psi(t)$, le lemme est démontré. □

Théorème 2.7 (Cauchy-Lipschitz. Existence et unicité). *Supposons que la fonction $f : D \to \mathbb{R}^n$ est continue et qu'elle est en (t_0, x_0) localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, c.à.d. il existe un voisinage $U \subset D$ de (t_0, x_0) et une constante $L \geq 0$, tel que pour tout (t, x_1), $(t, x_2) \in U$ on a l'inégalité*

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\|_2 \leq L\,\|x_1 - x_2\|_2.$$

Alors l'équation différentielle (2.1) *admet une solution locale unique. Ceci veut dire qu'il existe un intervalle $I_0 \subset \mathbb{R}$ voisinage de t_0 et une solution $x : I_0 \to \mathbb{R}^n$ du problème* (2.1)*; en plus, si $z : I_1 \to \mathbb{R}^n$ est une deuxième solution de* (2.1)*, alors $x = z$ sur $I_0 \cap I_1$.*

[1]Gronwall ()

Démonstration. Par le théorème de Peano (Théorème 2.4) il existe une solution $x : I_0 \to \mathbb{R}^n$ du problème (2.1). Par continuité de x et en choisissant l'intervalle I_0 plus petit, si nécessaire, on peut supposer que

$$\{(t, x(t)) : t \in I_0\} \subset U,$$

ou U est le voisinage de (t_0, x_0) de l'énoncé.

Soit $z : I_1 \to \mathbb{R}^n$ une deuxième solution du problème (2.1). Pour $t \in I_0 \cap I_1$ on pose $\varphi(t) := \|x(t) - z(t)\|$. Par continuité de z, l'ensemble $\{t \in I_0 \cap I_1 : (t, z(t)) \in U\}$ est un voisinage de t_0. Pour ces t ($t \geq t_0$) on a, par l'hxpothèse sur f,

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \|x(t) - z(t)\| \\
&= \| \int_{t_0}^{t} (f(s, x(s)) - f(s, z(s)))\, ds\| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} \|f(s, x(s)) - f(s, z(s))\|\, ds \\
&\leq L \int_{t_0}^{t} \|x(s) - z(s)\|\, ds \\
&= L \int_{t_0}^{t} \varphi(s)\, ds.
\end{aligned}$$

Par le lemme de Gronwall (Lemme 2.6), on obtient

$$\varphi(t) = 0 \text{ et donc } x(t) = z(t)$$

pour tout $t \in I_0 \cap I_1$, $t \geq t_0$, tel que $(t, z(t)) = (t, x(t)) \in U$. On en déduit que $z(t) = x(t)$ pour tout $t \in I_0 \cap I_1$, $t \geq t_0$. Pour $t \in I_0 \cap I_1$, $t \leq t_0$, on fait un argument similaire en inversant le temps. On a donc démontré que $z = x$ sur $I_0 \cap I_1$. □

Dans la pratique, au lieu de vérifier que la fonction f est localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, on vérifie plutôt que la fonction f est de classe C^1. En fait, on a le lemme suivant.

Lemme 2.8. *Supposons que la fonction $f : D \to \mathbb{R}^n$ est de classe C^1 dans un voisinage de* (t_0, x_0). *Alors f est en* (t_0, x_0) *localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable et le problème* (2.1) *admet une solution locale unique.*

Démonstration. On peut supposer que f est de classe C^1 dans un voisinage de la forme $I_0 \times B(x_0, r)$. Par continuité de f' et en choisissant le voisinage plus petit, si nécessaire, on trouve $L \geq 0$ tel que

$$\|f'(t, x)\| \leq L \text{ pour tout } (t, x) \in I_0 \times B(x_0, r).$$

Soient $(t, x_1), (t, x_2) \in I_0 \times B(x_0, r)$. Alors

$$\begin{aligned}
\|f(t, x_2) - f(t, x_1)\| &= \|\int_0^1 \frac{d}{ds} f(t, x_1 + s(x_2 - x_1))\, ds\| \\
&\leq \int_0^1 \|f'(t, x_1 + s(x_2 - x_1))\,(x_2 - x_1)\|\, ds \\
&\leq \int_0^1 L\,\|x_2 - x_1\|\, ds \\
&= L\,\|x_2 - x_1\|.
\end{aligned}$$

La fonction f est donc en (t_0, x_0) localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable. Le fait que le problème (2.1) admet une solution locale unique est juste le théorème de Cauchy-Lipschitz (Théorème 2.7). □

3. Solutions maximales

Définition 2.9. Une solution $x_{max} : I_{max} \to \mathbb{R}^n$ ($I_{max} \subset \mathbb{R}$ un intervalle) du problème (2.1) est appelée *solution maximale* si toute autre solution $x : I \to \mathbb{R}^n$ du problème (2.1) est une restriction de celle-ci à un intervalle plus petit, c.à.d. $I \subset I_{max}$ et $x = x_{max}$ sur I. En cas d'existence d'une solution maximale, l'intervalle I_{max} est appelé *intervalle (maximale) d'existence* correspondant à la donnée initiale (t_0, x_0).

Lemme 2.10. *On suppose que $f : D \to \mathbb{R}^n$ est continue. La solution maximale du problème* (2.1) *(si elle existe) est unique et l'intervalle d'existence est ouvert.*

Démonstration. L'unicité de la solution maximale est une conséquence immédiate de sa définition: si on a deux solutions maximales, alors l'une est restriction de l'autre et vice versa.

Pour montrer que l'intervalle d'existence est ouvert, supposons le contraire, c.à.d. $x_{max} : I_{max} \to \mathbb{R}^n$ est solution maximale et l'intervalle d'existence I_{max} n'est pas ouvert. Alors I_{max} est de la forme $(\alpha, \beta]$ avec $-\infty \leq \alpha < \beta < \infty$, $[\alpha, \beta)$ avec $-\infty < \alpha < \beta \leq \infty$, ou $[\alpha, \beta]$ avec $-\infty < \alpha < \beta < \infty$. Supposons le premier cas. Dans ce cas, $(\beta, x_{max}(\beta)) \in D$ et on peut résoudre l'équation différentielle

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(\beta) = x_{max}(\beta).$$

Par le théorème de Peano (Théorème 2.4), cette équation différentielle admet une solution locale $x : I_0 \to \mathbb{R}^n$, définie dans un intervalle I_0 qui est voisinage de β. Si on définit maintenant $z(t) = x_{max}(t)$ pour $t \in I_{max}$ et $z(t) = x(t)$ pour $t \geq \beta$, $t \in I_0$, alors on obtient une solution du problème (2.1) qui est définie sur un intervalle strictement plus grand que I_{max}. Ceci contredit la définition de la solution maximale et donc I_{max} ne peut pas être de la forme $(\alpha, \beta]$. Dans les autres cas, on procède d'une manière similaire. L'intervalle I_{max} est donc ouvert. □

Théorème 2.11. *Soit $D \subset \mathbb{R}^{1+n}$ un ouvert et $f : D \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1. Alors pour tout* $(t_0, x_0) \in D$ *le problème* (2.1) *admet une solution maximale.*

Démonstration. On montre que si $x_1 : I_1 \to \mathbb{R}^n$ et $x_2 : I_2 \to \mathbb{R}^n$ sont deux solutions du problème (2.1), alors $x_1 = x_2$ sur $I_1 \cap I_2$. Par le théorème de Cauchy-Lipschitz (Théorème 2.7 et Lemme 2.8) et par l'hypothèse que f est de classe C^1, si $x_1(t) = x_2(t)$, alors $x_1 = x_2$ dans un voisinage de t. En particulier, $x_1 = x_2$ dans un voisinage de t_0. Par continuité des fonctions x_1 et x_2, l'ensemble des $t \in I_1 \cap I_2$ tel que $x_1(t) = x_2(t)$ est fermé dans $I_1 \cap I_2$. On ne trouve donc pas $t_1 \in I_1 \cap I_2$, tel que $x_1(t_1) = x_2(t_1)$ et $x_1 \neq x_2$ dans tout voisinage de t_1. Ainsi $x_1 = x_2$ sur $I_1 \cap I_2$.

Soit $\mathcal{L} := \{(x, I_x) : x : I_x \to \mathbb{R}^n$ est solution de (2.1) $\}$ l'ensemble de toutes les solutions et soit

$$I_{max} := \bigcup_{(x,I_x)\in\mathcal{L}} I_x.$$

Sur l'intervalle I_{max} on définit la solution x_{max} par

$$x_{max}(t) := x(t) \quad \text{si } t \in I_x \text{ et } (x, I_x) \in \mathcal{L}.$$

La fonction x_{max} est bien définie par la première étape. Elle est solution du problème (2.1) (en particulier $(x_{max}, I_{max}) \in \mathcal{L}$), et par définition elle est la solution maximale. □

Remarque 2.12. Par le théorème de Cauchy-Lipschitz (Théorème 2.7), le Théorème 2.11 reste vrai si la fonction f est en tout $(t_0, x_0) \in D$ localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, c.à.d. si pour tout $(t_0, x_0) \in D$ il existe un voisinage $U \subset D$ et une constante $L \geq 0$ tels que pour tout $(t, x_1), (t, x_2) \in U$ on a

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\|_2 \leq L \|x_1 - x_2\|_2.$$

Comparer aussi avec le Lemme 2.8.

Lemme 2.13. *On suppose que $f : D \to \mathbb{R}^n$ est continue. Soit $x_{max} : I_{max} \to \mathbb{R}^n$ une solution maximale du problème* (2.1), *$I_{max} =]\alpha, \beta[$ pour $-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty$. Si $\alpha \neq -\infty$, alors pour tout $K \subset D$ compact il existe $t_K \in]\alpha, t_0[$ tel que $(t, x_{max}(t)) \notin K$ pour $\alpha < t < t_K$. Et si $\beta \neq \infty$, alors pour tout $K \subset D$ compact il existe $t_K \in]t_0, \beta[$ tel que $(t, x_{max}(t)) \notin K$ pour $t_K < t < \beta$.*

Autrement dit, si la solution maximale n'est pas une solution globale, alors le graphe de la solution maximale quitte finalement tout compact de D.

Démonstration. Supposons que $\beta < \infty$ et qu'il existe un compact $K \subset D$ et une suite $(t_n) \nearrow \beta$ telle que $(t_n, x_{max}(t_n)) \in K$. Comme K est compact et D est ouvert, il existe $\delta > 0$ tel que

$$K_\delta := \{(t, x) \in \mathbb{R}^{1+n} : \mathrm{dist}\,((t, x), K) \leq \delta\} \subset D.$$

On notera que K_δ est aussi compact. Comme la fonction f est continue, et comme K_δ est compact, la fonction f est bornée sur K_δ, c.à.d. $\sup_{(t,x)\in K_\delta} \|f(t, x)\| =: M < \infty$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit

$$s_n := \sup\{t \geq t_n : t < \beta \text{ et } (s, x_{max}(s)) \in K_\delta \text{ pour tout } s \in [t_n, t]\} \leq \beta.$$

Comme $(t_n, x(t_n)) \in K$, et par continuité de x_{max}, $s_n > t_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t < s_n$ on a

$$\begin{aligned} \|x_{max}(t) - x_{max}(t_n)\| &\leq \int_{t_n}^{t} \|x'_{max}(s)\|\, ds \\ &= \int_{t_n}^{t} \|f(s, x_{max}(s))\|\, ds \\ &\leq M(t - t_n). \end{aligned}$$

Pour n suffisamment grand, le côté à droite est strictement plus petit que $\delta/2$ et en même temps $\beta - t_n < \delta/2$. Ainsi, pour n suffisamment grand, on a $(t, x_{max}(t)) \in K_\delta$ quelque soit $t \in [t_n, \beta[$.

En plus, la fonction x_{max} est lipschitzienne et donc uniformément continue sur $[t_n, \beta[$. Mais une fonction uniformément continue sur l'intervalle borné $[t_n, \beta[$ admet un prolongement continue sur l'intervalle fermé $[t_n, \beta]$. Soit $x_\beta := \lim_{t\to\beta} x_{max}(t)$. On a $(\beta, x_\beta) \in K_\delta \subset D$.

Par le théorème de Peano (Théorème 2.4), la solution x_{max} peut être prolongée en une solution dans un voisinage de β, mais ceci est une contradiction à la définition de solution maximale. On a démontré que si $\beta < \infty$, alors le graphe $\{(t, x_{max}(t)) : t_0 \leq t < \beta\}$ quitte tout compact de D.

Le cas $\alpha \neq -\infty$ se démontre d'une manière similaire. □

Corollaire 2.14. *Sous les hypothèses du Lemme 2.13 on a:*

(i) *Ou bien $\beta = \infty$ (existence globale pour $t \geq t_0$), ou bien $\beta < \infty$. Si $\beta < \infty$, alors ou bien $\lim_{t\to\beta} \|x(t)\|_2 = \infty$ (explosion en temps fini) ou $\lim_{t\to\beta} \operatorname{dist}((t, x(t)), \partial D) = 0$.*

(ii) *Ou bien $\alpha = -\infty$ (existence globale pour $t \leq t_0$), ou bien $\alpha > -\infty$. Si $\alpha > -\infty$, alors ou bien $\lim_{t\to\alpha} \|x(t)\|_2 = \infty$ (explosion en temps fini) ou $\lim_{t\to\alpha} \operatorname{dist}((t, x(t)), \partial D) = 0$.*

Démonstration. Ceci est une conséquence directe du Lemme 2.13. □

Remarque 2.15. Dans beaucoup de situations, on a $D = \mathbb{R}^{1+n}$. Dans ce cas, $\partial D = \emptyset$ et on n'a que deux cas possibles pour une solution maximale et son comportement près du temps d'existence β: ou bien on a existence globale ($\beta = \infty$), ou bien on a explosion en temps fini ($\beta < \infty$ et $\lim_{t\to\beta} \|x(t)\|_2 = \infty$). La même remarque reste vrai près du temps d'existence α.

Corollaire 2.16. *On suppose que $f : \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}^n$ est de classe C^1 (ou en tout point localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable) et que*

$$\sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^{1+n}} \|f(t, x)\| =: M < \infty.$$

Alors pour tout $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{1+n}$ la solution maximale du problème (2.1) *est en fait une solution globale, c.à.d. l'intervalle d'existence est tout $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Soit $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{1+n}$. Rappelons du Théorème 2.11 que le problème (2.1) admet une solution maximale x. Soit (α,β) l'intervalle d'existence de cette solution maximale. Supposons que $\beta < \infty$. D'après le Corollaire 2.14 et la Remarque 2.15, ça implique que $\lim_{t\to\beta} \|x(t)\| = \infty$. Par contre, pour $t \in [t_0,\beta)$ on a d'après l'hypothèse sur f

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \|x(t) - x(t_0)\| + \|x(t_0)\| \\ &\leq \int_{t_0}^{t} \|x'(s)\|\, ds + \|x_0\| \\ &= \int_{t_0}^{t} \|f(s, x(s))\|\, ds + \|x_0\| \\ &\leq M\,(\beta - t_0) + \|x_0\|, \end{aligned}$$

et ceci contredit à l'explosion en temps fini. Donc, on a démontré que $\beta = \infty$. D'une manière pareil on montre que $\alpha = -\infty$, et donc l'intervalle d'existence est égal à $\mathbb{R}$. □

4. Sensibilité par rapport aux données

Dans ce pararagraphe, on considère le problème (2.1) *et* le problème suivant

$$\begin{cases} z'(t) = g(t, z(t)), \\ z(t_0) = z_0, \end{cases} \tag{2.2}$$

où $g : D \to \mathbb{R}^n$ est continue sur l'ouvert D.

On étudie la question suivante: si les données initiales (t_0, x_0) und (t_0, z_0) sont proches, et si les fonctions f et g sont proches, alors est-ce que les solutions x et z des problèmes (2.1) et (2.2) sont proches? Sous la condition que la fonction f est lipschitzienne, on peut en effet estimer la distance entre x et z.

Théorème 2.17. *Soient x, $z : I \to \mathbb{R}^n$ solutions des problèmes* (2.1) *respectivement* (2.2)*. On suppose qu'il existe une boule $B \subset \mathbb{R}^n$ tel que $I \times B \subset D$ et $(t, x(t))$, $(t, z(t)) \in I \times B$ pour tout $t \in I$. On suppose aussi que la fonction f est sur $I \times B$ lipschitzienne par rapport à la deuxième variable avec constante de Lipschitz $L \geq 0$. Soit $\varepsilon := \sup_{(t,w)\in I\times B} \|f(t, w) - g(t, w)\|_2 < \infty$. Alors pour tout $t \in I$*

$$\|x(t) - z(t)\|_2 \leq e^{L|t-t_0|}\, \|x_0 - z_0\|_2 + \frac{\varepsilon}{L}\,(e^{L|t-t_0|} - 1).$$

Démonstration. Le fait que x et z sont solutions des problèmes (2.1) et (2.2) implique que pour tout $t \in I$ on a

$$\begin{aligned} x(t) - z(t) &= x_0 - z_0 + \int_{t_0}^{t} (f(s, x(s)) - g(s, z(s)))\; ds \\ &= x_0 - z_0 + \int_{t_0}^{t} (f(s, x(s)) - f(s, z(s)))\; ds + \\ &\qquad + \int_{t_0}^{t} (f(s, z(s)) - g(s, z(s)))\; ds. \end{aligned}$$

L'inégalité du triangle implique que pour tout $t \in I$

$$\|x(t) - z(t)\|_2 \le \|x_0 - z_0\|_2 + \left| \int_{t_0}^{t} (L\|x(s) - z(s)\|_2 + \varepsilon) \; ds \right| .$$

Le théorème suit alors du lemme de Gronwall (Lemme 2.6) appliqué à la fonction $\varphi = \|x - z\|_2$. ◻

5. L'équation différentielle d'ordre m

On considère maintenant l'équation différentielle d'ordre $m \ge 2$:

$$\left\{ \begin{aligned} & x^{(m)}(t) = f(t, x(t), x'(t), ..., x^{(m-1)}(t)), \\ & x(t_0) = x_0, \\ & \vdots \\ & x^{(m-1)}(t_0) = x_{m-1}. \end{aligned} \right. \tag{2.3}$$

Ici, $f : D \to \mathbb{R}^n$ est une fonction continue sur l'ouvert $D \subset \mathbb{R}^{1+mn}$ et $(t_0, x_0, \dots, x_{m-1}) \in D$.

On montrera que cette équation différentielle d'ordre m est équivalente à une équation différentielle du premier ordre dans le sens du Lemme 2.18 ci-dessous. Ainsi, tous les résultats de ce chapitre s'appliquent aussi à l'équation différentielle d'ordre m. Par exemple, sous la seule condition que la fonction f est continue, le problème (2.3) admet une solution locale, et si f est en $t - 0, x_0, \dots, x_{m-1})$ de plus localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, alors le problème (2.3) admet une unique solution locale. Si de plus f est localement lipschitzienne en tout point de son domaine de définition, alors le problème (2.3) admet une (unique) solution maximale.

Tout dépend alors du lemme suivant.

Lemme 2.18. *On définit la fonction $g : D \to \mathbb{R}^{mn}$ par*

$$g(t, \eta_0, \dots, \eta_{m-1}) := (\eta_1, \dots, \eta_{m-1}, f(t, \eta_0, \dots, \eta_{m-1}))$$

et on considère l'équation différentielle du premier ordre (dans $\mathbb{R}^{mn}$)

$$\left\{ \begin{aligned} & u'(t) = g(t, u(t)), \\ & u(t_0) = (x_0, \dots, x_{m-1}). \end{aligned} \right. \tag{2.4}$$

Si $u : I \to \mathbb{R}^{mn}$, $u = (u_0, \dots, u_{m-1})$ est une solution du problème (2.4)*, alors $x := u_0 : I \to \mathbb{R}^n$ est une solution du problème* (2.3).

Inversement, si $x : I \to \mathbb{R}^n$ est une solution du problème (2.3)*, alors la fonction $u := (x, x', \dots, x^{(m-1)}) : I \to \mathbb{R}^{mn}$ est une solution du problème* (2.4).

Démonstration. La démonstration de ce lemme est un exercice. ◻

Corollaire 2.19. *Sous la seule condition que la fonction f est continue, le problème* (2.3) *admet une solution locale.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que la fonction g du Lemme 2.18 est continue si et seulement si la fonction f est continue, et puis d'appliquer le théorème de Peano (Théorème 2.4) et le Lemme 2.18. $\square$

Corollaire 2.20. *On suppose que la fonction $f : D \to \mathbb{R}^n$ est continue et qu'elle est de classe C^1 dans un voisinage de* $(t_0, x_0, \ldots, x_{m-1}) \in D$. *Alors le problème* (2.3) *admet une unique solution locale.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que la fonction g du Lemme 2.18 est de classe C^1 dans un voisinage de $(t_0, x_0, \ldots, x_{m-1})$ si et seulement si la fonction f est de classe C^1 dans une voisinage de $(t_0, x_0, \ldots, x_{m-1})$, et puis d'appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz (Théorème 2.7 et Lemme 2.8) et le Lemme 2.18. $\square$

Bien sur, l'hypothèse que f est de classe C^1 peut être remplacée par l'hypothèse plus faible que f est seulement localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable.

CHAPITRE 3

Equations différentielles linéaires

Une équation différentielle linéaire d'ordre m est un problème de la forme

$$\left\{\begin{array}{l} x^{(m)}(t)+A_{m-1}(t)x^{(m-1)}(t)+...+A_0(t)x(t)=f(t), \\ x(t_0)=x_0,\ \dots,\ x^{(m-1)}(t_0)=x_{m-1}, \end{array}\right. \tag{3.1}$$

où les fonctions $A_j : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ $(0 \le j \le m-1)$ et $f : I \to \mathbb{R}^n$ sont continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, et $x_j \in \mathbb{R}^n$ $(0 \le j \le m-1)$.

L'équation différentielle (3.1) est linéaire dans le sens que si le second membre f est nulle, et si x et z sont deux solutions de (3.1) (pour deux données initiales différentes), et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors la combinaison linéaire $\lambda x + z$ est aussi une solution. En fait, toujours pour $f = 0$, l'ensemble des solutions de (3.1) forme un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions continues $I \to \mathbb{R}^n$.

Dans le lemme suivant on montre qu'il suffit en principe d'étudier les équations différentielles linéaires du premier ordre (comparer avec le Lemme 2.18).

Lemme 3.1. *Soit*

$$A(t) := \begin{pmatrix} 0 & I & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & I \\ -A_0(t) & \cdots & -A_{m-2}(t) & -A_{m-1}(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{mn\times mn}$$

où $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est la matrice identité, et soit

$$F(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{mn},$$

Alors le problème (3.1) *et le problème du premier ordre*

$$\left\{\begin{array}{l} u'(t) = Au(t) + F(t), \\ u(t_0) = (x_0, \dots, x_{m-1}) \end{array}\right. \tag{3.2}$$

sont équivalents dans le sens suivant:

(i) *Si $x : I \to \mathbb{R}^n$ est une solution du problème* (3.1)*, alors $u := (x, \dots, x^{(m-1)})$ est une solution du problème* (3.2)*.*

(ii) *Si $u : I \to \mathbb{R}^{mn}$, $u = (u_0, \dots, u_{m-1})$, est une solution du problème* (3.2)*, alors $x := u_0$ est une solution du problème* (3.1)*.*

DÉMONSTRATION. La démonstration est un exercice. □

On remarque aussi que le problème linéaire (3.1) admet toujours une solution qui est définie sur tout l'intervalle I. Pour cela, on introduit une nouvelle norme sur l'espace $\mathbb{R}^{n\times n}$ des matrices.

LEMME 3.2. *Pour tout $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ on définit*

$$\|A\| := \sup_{\|x\|_2 \le 1} \|Ax\|_2.$$

Alors on a:

(i) *L'application $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}_+$ est une norme sur $\mathbb{R}^{n\times n}$.*
(ii) *Pour tout $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ on a $\|AB\| \le \|A\|\,\|B\|$.*
(iii) *Pour tout $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a $\|Ax\| \le \|A\|\,\|x\|$.*

DÉMONSTRATION. La démonstration est un exercice. □

THÉORÈME 3.3 (Existence et unicité de solutions). *Pour tout $x_0, \dots, x_{m-1} \in \mathbb{R}^n$ le problème* (3.1) *admet une unique solution $x : I \to \mathbb{R}^n$.*

DÉMONSTRATION. En fait, par le Lemme 3.1 il suffit de résoudre le problème linéaire du premier ordre (3.2). Pour ce problème, on suppose que $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, pour simplifier un peu la notation.

On suppose d'abord que $I = \mathbb{R}$ et que $\sup_{t\in\mathbb{R}} \|A(t)\| =: L < \infty$. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\|A(t)x_1 - A(t)x_2\| = \|A(t)(x_1 - x_2)\| \le L\,\|x_1 - x_2\|.$$

La fonction $f : \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}^n$, $f(t, x) := -A(t)x + F(t)$, est donc globalement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable. Par le théorème de Cauchy-Lipschitz (Théorème 2.7), le problème (3.2) admet une unique solution locale. Mais comme f est globalement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, on obtient même une unique solution maximale u par le Théorème 2.11 et la Remarque 2.12. Soit (α,β) l'intervalle d'existence. Supposons que $\beta < \infty$. Alors, $\sup_{t\in[t_0,\beta)} \|F(t)\| =: \varepsilon < \infty$ par continuité de F. En plus, par le Corollaire 2.14 et la Remarque 2.15, on obtient que $\lim_{t\to\beta} \|u(t)\| = \infty$. Par contre, pour tout $t \in [t_0,\beta)$ on a

$$\begin{aligned}
\|u(t)\| &\le \|u(t) - u(t_0)\| + \|u(t_0)\| \\
&\le \int_{t_0}^{t} \|u'(s)\|\,ds + \|u(t_0)\| \\
&\le \int_{t_0}^{t} \|A(s)u(s)\|\,ds + \int_{t_0}^{t} \|F(s)\|\,ds + \|u(t_0)\| \\
&\le \int_{t_0}^{t} (L\,\|u(s)\| + \varepsilon)\,ds + \|u(t_0)\|.
\end{aligned}$$

Par le lemme de Gronwall (Lemme 2.6), appliqué à la fonction $\varphi = \|u\|$, ceci implique

$$\|u(t)\| \leq \|u(t_0)\| e^{L(t-t_0)} + \frac{\varepsilon}{L}(e^{L(t-t_0)} - 1), \quad t \in [t_0, \beta),$$

ce qui contredit à l'explosion en temps fini. Donc, nécessairement on a $\beta = \infty$, et d'une manière similaire on montre que $\alpha = -\infty$. On a donc démontré existence et unicité d'une solution globale sous la condition que $I = \mathbb{R}$ et que $\sup_{t\in\mathbb{R}} \|A(t)\| < \infty$.

Dans le cas général, on choisit un intervalle $I_0 \subset I$ tel que I_0 est compact, et on considère la fonction $A(t)$ sur I_0, prolongée d'une manière constante et continue en déhors de I_0. Alors on se ramène au cas considéré ci-dessous et on trouve une unique solution sur l'intervalle I_0. Comme I_0 est arbitraire, ceci démontre le lemme. □

Corollaire 3.4 (Espace des solutions). *Soit $\mathcal{L} \subset C(I; \mathbb{R}^n)$ l'ensemble de toutes les solutions de l'équation différentielle*

$$x^{(m)}(t) + A_{m-1}(t)x^{(m-1)}(t) + ... + A_0(t)x(t) = 0, \quad t \in I.$$

Alors $\mathcal{L}$ est un sous-espace vectoriel de $C(I; \mathbb{R}^n)$, de dimension nm.

Démonstration. Le fait que $\mathcal{L}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $C(I; \mathbb{R}^n)$ est une conséquence immédiate de la linéarité des $A_j(t)$. Soit $t_0 \in I$ arbitraire. Alors l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L} & \to & \mathbb{R}^{nm}, \\ x & \mapsto & (x(t_0), \dots, x^{m-1}(t_0)) \end{array}$$

est linéaire, injectif (par l'unicité des solutions) et surjectif (par l'existence de solutions). □

1. L'équation différentielle du premier ordre. La fonction exponentielle

Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice. Dans la suite on va identifier toute matrice dans $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ avec une application linéaire sur $\mathbb{R}^n$.

On considère l'équation différentielle linéaire, non-homogène, du premier ordre, à coefficients constants:

$$\text{(3.3)} \qquad \begin{cases} x'(t) = Ax(t) + f(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

où en plus $f : I \to \mathbb{R}^n$ est une fonction continue sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$t, $t_0 \in I$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Si $n = 1$, alors on a déjà résolu le problème (3.3) en donnant même une formule explicite de la solution (voir Proposition 1.7). On veut montrer dans la suite que cette formule reste vraie dans le cas $n \geq 2$ si on définit bien l'exponentielle d'une matrice.

Proposition 3.5 (Fonction exponentielle). *Pour toute matrice* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *la série*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

est absolument convergente, et donc convergente vers une matrice notée e^A *ou* $\exp(A)$. *La fonction* $\exp : A \mapsto \exp(A)$ *est appelée* fonction exponentielle.

Démonstration. Le Lemme 3.2 implique que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|\frac{A^k}{k!}\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} \leq e^{\|A\|} < \infty.$$

Alors la série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ est absolument convergente. L'espace $\mathbb{R}^{n\times n}$ des matrices étant complet (c.à.d. toute suite de Cauchy converge), on en déduit que la série converge dans $\mathbb{R}^{n\times n}$. □

Proposition 3.6 (Propriétés de la fonction exponentielle). *Les assertions suivantes sont vraies:*

(i) *La fonction exponentielle* exp *est continue (et même de classe* C^∞*).*
(ii) *Pour tout* $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *tel que* $AB = BA$ *on a*

$$e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A.$$

(iii) *Pour tout* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *la fonction* $t \mapsto e^{tA}$ *est de classe* C^1 *(même de classe* C^∞*) et*

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA} = e^{tA} A.$$

Démonstration. (i) Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Alors pour $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ on a

$$\begin{aligned} \|e^{A+H} - e^A\| &= \|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A+H)^k}{k!} - \frac{A^k}{k!}\| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} \|A\|^{k-j} \|H\|^j \\ &\to 0 \quad H \to 0. \end{aligned}$$

Donc, exp est continue. Le fait que la fonction exponentielle est même de classe C^∞ est un exercice. (ii) Soient $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tel que $AB = BA$. Alors

$$\begin{aligned} e^{A+B} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A+B)^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A^j B^{k-j} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=j}^{\infty} \frac{1}{j!(k-j)!} A^j B^{k-j} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!} \\ &= e^A e^B. \end{aligned}$$

Cette égalité et l'égalité $e^{A+B} = e^{B+A}$ impliquent (ii).
(iii) Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, et soient $t, h \in \mathbb{R}$. Comme les matrices tA et hA commutent, on obtient avec (ii) que

$$\begin{aligned} \frac{e^{(t+h)A} - e^{tA}}{h} &= \frac{e^{tA}e^{hA} - e^{tA}}{h} \\ &= e^{tA} \frac{e^{hA} - I}{h} \\ &= e^{tA} \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^k A^k}{k!} \\ &= e^{tA} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^{k-1} A^k}{k!} \\ &\to e^{tA} A \quad (h \to 0). \end{aligned}$$

Le fait que $e^{tA}A = Ae^{tA}$ est un simple exercice. □

Proposition 3.7. *Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$ le problème* (3.3) *admet une unique solution $x : I \to \mathbb{R}^n$. Cette solution est donnée par*

$$x(t) = e^{(t-t_0)A} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} f(s)\, ds, \quad t \in I.$$

Démonstration. Dans le Théorème 3.3 on a déjà établit l'existence et l'unicité d'une solution $x : I \to \mathbb{R}^n$ à l'aide du théorème de Cauchy-Lipschitz (Théorème 2.7). Il reste donc seulement à vérifier directement que la fonction x de l'énoncé *est* une solution. Ceci est un exercice pour lequel on utilise la Proposition 3.6. □

La Proposition 3.7 donne une formule explicite pour la solution du problème (3.3). Afin de pouvoir l'utiliser, il faut pouvoir calculer l'exponentielle d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Pour cela, on aura besoin d'un peu d'algèbre linéaire. Dans deux cas simples, c.à.d. si A est une matrice diagonale et si A est un bloc de Jordan, on peut calculer e^{tA} directement en utilisant la définition de la fonction exponentielle. L'algèbre linéaire nous dit ensuite qu'il suffit de connaître ces deux cas parce que toute matrice A est similaire à une matrice de Jordan, c.à.d. une matrice diagonale avec sur la diagonale des blocs de Jordan.

1$^{\text{er}}$ **cas:** On considère d'abord le cas d'une matrice D qui est *diagonale*, c.à.d.

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

pour des valeurs propres $\lambda_i \in \mathbb{C}$. Ceci est le cas le plus simple. Les puissances D^k sont diagonales aussi, $D^k = \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$, et donc

$$e^{tD} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k D^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{diag}\left(\frac{t^k \lambda_1^k}{k!}, \dots, \frac{t^k \lambda_n^k}{k!}\right) = \operatorname{diag}\left(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n^k}\right).$$

2$^{\text{ème}}$ **cas:** On considère ensuite le cas d'une matrice A qui est *diagonalisable*, c.à.d. il existe une matrice diagonale $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ $(\lambda_i \in \mathbb{C})$ et une matrice inversible $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tel que $A = S^{-1}DS$. Dans ce cas on a

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k (S^{-1}DS)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k S^{-1} D^k S}{k!} = S^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k D^k}{k!} S = S^{-1} e^{tD} S.$$

La matric e^{tD} a ètè calculée dans le premier cas. Toujours, la diagonale de D contient les valeurs propres de A.

3$^{\text{ème}}$ **cas:** Plus généralement, si

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k \end{pmatrix}$$

pour des matrices $J_1, \dots, J_k$, alors

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{tJ_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{tJ_k} \end{pmatrix}.$$

et si $A = S^{-1}JS$ pour une matrice J comme ci-dessus et une matrice inversible S, alors

$$e^{tA} = S^{-1} e^{tJ} S.$$

4**ème** **cas:** On considère le cas d'un bloc de Jordan[1] J_λ ($\lambda \in \mathbb{C}$), c.à.d. une matrice de la forme

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

Une telle matrice n'a qu'une valeur propre (qui est λ). En utilisant la définition de la fonction exponentielle on montre que

$$e^{tJ_\lambda} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & te^{t\lambda} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{t\lambda} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & te^{t\lambda} \\ & & & e^{t\lambda} \end{pmatrix}.$$

5**ème** **cas:** Le cas d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ arbitraire est réduit aux cas 3 et 4. En fait, pour toute matrice A il existe une matrice de Jordan

$$J = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{\lambda_k} \end{pmatrix}$$

où les J_{λ_i} sont des blocs de Jordan, λ_i les valeurs propres de A, et il existe une matrice S inversible tel que $A = S^{-1}JS$. Dans ce cas on a donc

$$e^{tA} = S^{-1} \begin{pmatrix} e^{tJ_{\lambda_1}} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{tJ_{\lambda_k}} \end{pmatrix} S,$$

et on utilise le 4$^{\grave{}\text{eme}}$cas pour calculer $e^{tJ_{\lambda_i}}$.

2. L'équation différentielle d'ordre m à coefficients constants

On considère l'équation différentielle d'ordre m à coefficients constants:

$$x^{(m)}(t) + a_{m-1}x^{(m-1)}(t) + \cdots + a_0 x(t) = 0. \tag{3.4}$$

On suppose que $a_j \in \mathbb{R}$ ($0 \leq j \leq m-1$).

D'après le Lemme 3.1, cette équation d'ordre m est équivalent à l'équation différentielle du premier ordre

$$u'(t) = Au(t)$$

[1]Camille Jordan (5.1.1838-22.1.1922)

où

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -a_0 & \cdots & -a_{m-2} & -a_{m-1} \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

On peut donc essayer de résoudre cette équation du premier ordre (en calculant l'exponentielle e^{tA}) et puis d'en déduire les solutions de (3.4). On verra dans cette section qu'il suffit de faire ça une fois dans le cadre abstrait et on va trouver un autre moyen plus direct pour trouver les solutions de (3.4).

On calcul d'abord le spectre de la matrice A.

Lemme 3.8 (Polynome caractéristique). *Soit p le polynome caractéristique de la matrice A. Alors*

$$p(\lambda) = (\lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + a_0), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Démonstration. On démontre le lemme par récurrence.

Si $m = 1$, alors l'assertion est vraie; la matrice A est dans ce cas égale à $-a_0$.

Supposons que l'assertion est vraie pour toutes les matrices de dimension $m \times m$ étant de la forme (3.5). Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ on a

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(\lambda I - A) \\ &= \begin{vmatrix} \lambda & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & -1 \\ a_0 & \cdots & a_{m-1} & \lambda + a_m \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

On développe la déterminante par rapport à la première colonne. On obtient

$$p(\lambda) = \lambda \cdot \begin{vmatrix} \lambda & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & -1 \\ a_1 & \cdots & a_{m-1} & \lambda + a_m \end{vmatrix} + (-1)^m a_0 \begin{vmatrix} -1 & & & \\ \lambda & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & -1 \end{vmatrix}.$$

Les deux déterminantes sont des déterminantes de matrices de dimension m. Comme l'assertion est vraie dans ce cas, on obtient

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda(\lambda^m + a_m\lambda^{m-1} + \cdots + a_1) + a_0 \\ &= (\lambda^{m+1} + a_m\lambda^m + \cdots + a_1\lambda + a_0). \end{aligned}$$

□

Proposition 3.9 (Solutions complexes de (3.4)). *Soit p le polynome caractéristique de la matrice A. Soient $\lambda_j \in \mathbb{C}$ ($1 \le j \le k$) les racines complexes de p et soient $m(\lambda_j)$ leurs multiplicités, c.à.d.*

$$p(\lambda) = \prod_{j=1}^{k} (\lambda - \lambda_j)^{m(\lambda_j)}.$$

Alors les fonctions

$$t^l e^{\lambda_j t} \quad 1 \le j \le k,\ 0 \le l \le m(\lambda_j) - 1,$$

sont m solutions (complexes) linéairement indéndentes du problème (3.4). *Toute solution de* (3.4) *est combinaison linéaire de ces solutions élémentaires.*

Démonstration. On vérifie que les fonctions de l'énoncé sont vraiement des solutions de (3.4). En plus, on voit facilement que ces fonctions sont linéairement indépendentes.

D'autre part, d'après la Proposition 3.4, l'espace de toutes les solutions de (3.4) est un sous-espace de $C(\mathbb{R})$ de dimension m. Ainsi, les fonctions de l'énoncé forment une base vectorielle de ce sous-espace et toute solution est donc combinaison linéaire des solutions élémentaires. □

Corollaire 3.10 (Solutions réelles de (3.4)). *Soit p le polynome caractéristique de la matrice A. Soient $\lambda_j \in \mathbb{C}$ ($1 \le j \le k_1$) les racines réelles de p, et soient $\mu_j = \alpha_j + i\beta_j$ et $\overline{\mu_j} = \alpha_j - i\beta_j$ ($1 \le j \le k_2$) les racines purement complexes de p (on remarquera que comme la matrice A est réelle, si μ est valeur propre de A, alors $\bar{\mu}$ l'est aussi). Soient $m(\lambda_j)$ resp. $m(\mu_j)$ les multiplicités de ces racines, c.à.d.*

$$p(\lambda) = \prod_{j=1}^{k_1} (\lambda - \lambda_j)^{m(\lambda_j)} \prod_{j=1}^{k_2} ((\lambda - \alpha_j)^2 + \beta_j^2)^{m(\mu_j)}.$$

Alors les fonctions

$$t^l\, e^{\lambda_j t} \quad 1 \le j \le k_1,\ 0 \le l \le m(\lambda_j) - 1,$$

et

$$t^l\, e^{\alpha_j t}\, \sin(\beta_j t) \text{ und } t^l\, e^{\alpha_j t}\, \cos(\beta_j t) \quad 1 \le j \le k_2,\ 0 \le l \le m(\mu_j) - 1,$$

sont m solutions (réelles) linéairement indéndentes du problème (3.4). *Toute solution de* (3.4) *est combinaison linéaire de ces solutions élémentaires.*

Démonstration. Dans la Proposition 3.9 on a déjà vu m solutions linéairement indépendentes. Si, dans la Proposition 3.9, λ_j est une racine réelle, alors les solutions correspondantes sont déjà réelles. Elles se retrouvent dans l'énoncé.

Si, par contre $\lambda_j = \mu_j = \alpha_j + i\beta_j$ est une racine purement complexe de p ($\beta_j \neq 0$), alors $\bar{\mu}$ est aussi racine (avec la même multiplicité!), parce que la matrice A est une matrice réelle. En remplaçant les deux solutions $t^l\, e^{\mu_j t}$ et $t^l\, e^{\bar{\mu}_j t}$ par leurs combinaisons linéaires

$$\frac{1}{2}(t^l\, e^{\mu_j t} + t^l\, e^{\bar{\mu}_j t}) = t^l\, e^{\alpha_j t}\, \cos(\beta_j t)$$

et

$$\frac{1}{2i}(t^l\, e^{\mu_j t} - t^l\, e^{\bar{\mu}_j t}) = t^l\, e^{\alpha_j t}\, \sin(\beta_j t)$$

on trouve finalement m solutions élémentaires à valeurs dans $\mathbb{R}$, linéairement indépendentes. Toute solution de (3.4) est combinaison linéaire de ces solutions élémentaires. □

3. Stabilité et instabilité. Premier théorème de Liapunov

Dans ce paragraphe nous commençons à étudier le comportement asymptotique des solutions et le comportement qualitatif du point d'équilibre 0 de léquation différentielle linéaire du premier ordre

$$x'(t) = Ax(t), \tag{3.6}$$

où $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Sous comportement asymptotique nous comprenons le comportement des solutions lorsque $t \to \infty$, en particulier la convergence (exponentielle ou non) vers 0, la bornitude des solutions ou l'explosion (exponentielle) en temps infini. Ces questions sont liées à la stabilité, la stabilité asymptotique, la stabilité exponentielle et l'instabilité du point d'équilibre 0 qui est le point d'équilibre canonique du système linéaire (3.6).

Dans le cas $n = 1$ la question du comportement asymptotique des solutions est très simple. Les solutions de (3.6) sont de la forme $x(t) = e^{At}x_0$. On voit donc que si $A > 0$, alors toutes solutions (sauf la solution constante 0) explosent en temps infini; en particulier, elles sont non bornées. On dira dans ce cas que le point d'équilibre 0 est *instable*. Si $A < 0$, alors toutes les solutions converges, lorsque $t \to \infty$, vers le point d'équilibre 0; on dira que le point 0 est *exponentiellement stable* ou, plus faiblement, *asymptotiquement stable*. Si $A = 0$, alors toutes les solutions sont constantes. Toutes les solutions avec donnée initiale dans un voisinage de 0 restent dans ce voisinage; on dira que 0 est *stable*.

Dans le cas $n \geq 2$, la question du comportement asymptotique des solutions (ou de la stabilité du point 0) n'est pas aussi simple et plusieurs cas sont possibles. On verra dans ce paragraphe que le comportement asymptotique des solutions dépend du spectre de la matrice A.

Afin d'illustrer le comportement asymptotique des solutions de l'équation différentielle (3.6) on considère d'abord le cas $n = 2$.

Dans le cas $n = 2$ on peut dessiner le champs de vecteurs associé à la matrice A. Ce champs de vecteurs nous montrera les différents comportements possibles, selon la position des valeurs propres de A. Dans la suite on considère toujours le spectre de A dans le plan complexe. La matrice A a donc soit deux valeurs propres distincts, ou une valeur propre qui est racine de mulitiplicité 2 du polynome caractéristique.

1^er^ **cas:** Les deux valeurs propres de A sont toutes les deux réelles, et soit elles sont toutes les deux positives, soit elles sont toutes les deux négatives. Exemples:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A_2 = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de A_1 sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$ et les vecteurs propres correspondants sont $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Toutes les solutions de l'équation différentielle (3.6) explosent exponentiellement à l'infini. On dit que le point d'équilibre 0 est *instable*.

Les valeurs propres de A_2 sont $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = -3$ et les vecteurs propres correspondants sont $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Toutes les solutions de l'équation différentielle (3.6) convergent (exponentiellement) vers 0. On dit que le point d'équilibre 0 est *asymptotiquement stable* ou ici même *exponentiellement stable*.

FIGURE 1. Champs de vecteurs pour les matrices A_1 et A_2

$2^{\text{ème}}$ **cas:** Les valeurs propres de la matrice A sont toutes les deux réelles, une est strictement positive et l'autre et strictement négative. Exemple:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice A_3 a les valeurs propres $\lambda_1 = -2$ et $\lambda_2 = 3$, et les vecteurs propres correspondants sont $x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Il y a des solutions qui convergent exponentiellement vers 0 (notamment celles avec donnée initiale dans l'espace propre engendré par x_1) et il y a des solutions qui explosent exponentiellement à l'infini (en fait, toutes les autres solutions). On dit que le point d'équilibre 0 est *hyperbolique* (voir le champs de vecteurs!). En particulier, il est instable.

$3^{\text{ème}}$ **cas:** Les deux valeurs propres de A sont complexes conjuguées, c.à.d. $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 = \alpha + i\beta$. Selon le cas, si $\alpha > 0$, $\alpha < 0$ ou $\alpha = 0$, le point d'équilibre 0 est instable, asymptotiquement stable ou stable. Exemples:

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de la matrice A_4 sont $\lambda_1 = i$ et $\lambda_2 = -i$. Toutes les solutions de l'équation différentielle (3.6) sont périodiques; dans ce cas le point d'équilibre 0 est *stable* dans le sens qu'il existe deux voisinages bornés U et V de 0 tels que toute solution avec donnée initiale dans U reste dans V.

FIGURE 2. Champs de vecteurs pour la matrice A_3

Les valeurs propres de la matrice A_5 sont $\lambda_1 = -\frac{1}{2} + i\sqrt{\frac{3}{4}}$ et $\lambda_2 = -\frac{1}{2} - i\sqrt{\frac{3}{4}}$. Comme la partie réelle de λ_1 et λ_2 est négative, toutes les solutions de l'équation différentielle (3.6) convergent (exponentiellement) vers 0. Le point d'équilibre 0 est asymptotiquement stable.

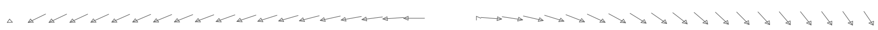

FIGURE 3. Champs de vecteurs pour les matrices A_4 et A_5

4[ème] **cas:** La matrice A n'a qu'une valeur propre réelle, et elle n'est pas diagonalisable. Exemple:

$$A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'unique valeur propre de la matrice A_6 est $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, et A n'est pas diagonalisable. Comme la valeur propre est strictement positive, toutes les solutions de l'équation différentielle (3.6) explosent exponentiellement à l'infini. Le point d'équilibre 0 est instable.

Essentiellement, les cas considérés ci-dessus sont tous les cas possibles dans $\mathbb{R}^2$. Les exemples ci-dessus servent pour illustration comment le *spectre* $\sigma(A)$ (c.à.d. l'ensemble des valeurs propres de A) permet de caractériser le comportement asymptotique des solutions de l'équation différentielle (3.6) et ainsi la stabilité ou instabilité du point d'équilibre 0.

Notre premier théorème *caractérise* dans le cas général la stabilité asymptotique (ou exponentielle) du point d'équilibre 0.

Figure 4. Champs de vecteurs pour la matrice A_6

Théorème 3.11 (Liapunov[2]). *Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) *Il existe des constantes $M, \omega > 0$, tel que pour tout $x_0 \in \mathbb{C}^n$*

$$\|e^{tA}x_0\|_2 \le M\, e^{-\omega t}\,\|x_0\|_2,$$

c.à.d. 0 *est* exponentiellement stable.

(ii) *Pour tout $x_0 \in \mathbb{C}^n$ on a*

$$\lim_{t\to\infty}\|e^{tA}x_0\| = 0,$$

c.à.d. 0 *est* asymptotiquement stable.

(iii) *Si $\sigma(A)$ est le spectre de A, alors la* borne spectrale

$$s(A) := \sup_{\lambda\in\sigma(A)} \operatorname{Re}\lambda < 0,$$

c.à.d. toutes les valeurs propres ont partie réelle strictement négative.

Démonstration. L'implication (i)⇒(ii) est triviale.

On montre l'implication (ii)⇒(iii) avec un raisonnement par contraposition, c.à.d. on montre que si $s(A) \ge 0$, alors 0 n'est pas asymptotiquement stable. En fait, si $s(A) \ge 0$, alors il existe une valeur propre $\lambda \in \sigma(A)$ telle que $\operatorname{Re}\lambda \ge 0$. Soit $x_0 \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé. Alors

$$\|e^{tA}x_0\| = \|\sum_{k\ge 0}\frac{t^kA^kx_0}{k!}\| = \|\sum_{k\ge 0}\frac{t^k\lambda^kx_0}{k!}\| = \|e^{\lambda t}x_0\| = e^{\operatorname{Re}\lambda\, t}\,\|x_0\| \not\to 0.$$

On a donc montré que 0 n'est pas asymptotiquement stable.

(iii)⇒(i). Finalement, on suppose que $s(A) < 0$. Soit S une matrice inversible telle que $A = S^{-1}JS$ pour une matrice de Jordan $J = \operatorname{diag}(J_{\lambda_1},\dots,J_{\lambda_k})$. Alors

$$\begin{aligned}\|e^{tA}x_0\|_2 &= \|S^{-1}e^{tJ}S\,x_0\|_2\\ &\le \|S^{-1}\|\,\|e^{tJ}\|\,\|S\|\,\|x_0\|_2.\end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer que $\|e^{tJ}\| \le M\,e^{-\omega t}$ pour des constantes $M, \omega > 0$ et pour tout $t \ge 0$. Mais $e^{tJ} = \operatorname{diag}(e^{tJ_{\lambda_1}},\dots,e^{tJ_{\lambda_k}})$, et la formule explicite pour $e^{tJ_{\lambda_j}}$ (voir

[2]Aleksandr Mikhailovich Liapunov (6.6.1857-3.11.1918)

page 33) nous montre que pour tout $\omega \in (0, -s(A))$ il existe une constante $M \geq 0$ tel que

$$\|e^{tJ}\| \leq Me^{-\omega t}, \quad t \geq 0.$$

Ceci montre donc que (i) est une conséquence de (iii). □

DÉMONSTRATION ALTERNATIVE POUR L'IMPLICATION (III)⇒(I) DU THÉORÈME 3.11. On suppose que $s(A) < 0$ et on suppose en plus que

$$(Ax, x) \leq -\omega^2 \|x\|_2^2$$

pour un $\omega > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$ (ici $(\cdot, \cdot)$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$). Cette condition en plus est en particulier satisfait si A est une matrice symétrique négative.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$, et soit $x(t) := e^{tA}x_0$. Alors pour tout $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|x(t)\|^2 &= 2(x'(t), x(t)) \\ &= 2(Ax(t), x(t)) \\ &\leq -2\omega \|x(t)\|_2^2. \end{aligned}$$

Cette inégalité implique

$$\|x(t)\|_2 \leq e^{-\omega t} \|x_0\|_2, \quad t \geq 0,$$

ce qui est l'assertion (i). □

La démonstration du théorème suivant est un exercice (utiliser de nouveau les formules explicites pour e^{tA}).

THÉORÈME 3.12. *Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tel que (au moins) une valeur propre a partie réelle strictement positive, c.à.d $s(A) > 0$. Alors le point* 0 *est* instable *dans le sens qu'il existe des solutions non-bornées.*

4. Développement en séries entières

Dans ce dernier paragraphe sur les équations linéaires on considère l'équation linéaire non-autonome d'ordre m

$$x^{(m)}(t) + a_{m-1}(t)x^{(m-1)}(t) + \cdots + a_0(t)x(t) = 0. \tag{3.7}$$

On suppose que les coefficients a_j sont continue sur l'intervalle $(-r, r)$, et on suppose même que toute fonction a_j admet en 0 en développement illimité en série entiere avec rayon de convergence $\geq r$, c.à.d.

$$a_j(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{kj} t^k, \quad t \in (-r, r).$$

Dans ce cas, on a la proposition suivante.

PROPOSITION 3.13. *Soit x une solution de l'équation différentielle* (3.7)*. Alors*

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k t^k, \quad t \in (-r, r),$$

la série étant absolument convergente.

On ne va pas démontrer cette proposition mais plutôt l'illustrer dans l'exemple suivant.

Exemple 3.14 (Equation d'Airy). On considère *l'équation différentielle d'Airy*[3]

$$x''(t) - tx(t) = 0. \tag{3.8}$$

On suppose que la solution de cette équation différentielle admet un développement illimité de la forme

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k t^k,$$

la série étant absolument convergente pour $|t| < r$.

En remplaçant la solution x dans (3.8) par cette série entière on obtient

$$\sum_{k=2}^{\infty} \eta_k k(k-1)t^k - \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k t^{k+1} = 0,$$

ou

$$2\eta_2 + \sum_{k=1}^{\infty} (\eta_{k+2}(k+2)(k+1) - \eta_{k-1})\, t^k = 0.$$

Le théorème d'unicité pour les séries entières dit que tous les coefficients dans cette série sont nécessairement 0. En particulier,

$$\eta_2 = 0.$$

Sinon, le coefficients η_0 et η_1 peuvent être choisis arbitrairement. Si η_0 et η_1 sont fixes, alors pour tout $k \geq 1$

$$\eta_{k+2} = \frac{1}{(k+2)(k+1)} \eta_{k-1}.$$

Ceci implique que pour tout $k \geq 1$

$$\begin{aligned} \eta_{3k} &= \frac{1}{3k(3k-1)} \eta_{3k-3}, \\ \eta_{3k+1} &= \frac{1}{(3k+1)3k} \eta_{3k-2}, \\ \eta_{3k+2} &= 0. \end{aligned}$$

Les solutions x de l'équation d'Airy sont alors complètement déterminées dès qu'on connaît les conditions initiales $x(0) = \eta_0$ et $x'(0) = \eta_1$.

[3]George Biddell Airy (27.7.1801-2.1.1892)

CHAPITRE 4

Stabilité

Dans ce chapitre, on va étudier la stabilité et l'instabilité des points d'équilibre de l'équation différentielle *autonome*

$$x'(t) = f(x(t)), \tag{4.1}$$

où $f : D \to \mathbb{R}^n$ est une fonction continue sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^n$; la fonction f ne dépend donc pas explicitement de la variable t.

DÉFINITION 4.1. Un point $x_0 \in D$ est appelé *point d'équilibre* (ou: *point stationnaire*, *solution stationnaire*, *point critique*) de l'équation (4.1) si $f(x_0) = 0$.

Cette définition s'explique par la simple observation que si $f(x_0) = 0$ alors la fonction constante $x(t) \equiv x_0$ est solution du problème (4.1).

Dans le chapitre précèdent sur les équations différentielles linéaires on a déjà utilisé la notion de point d'équilibre. En fait, le point 0 est toujours point d'équilibre de l'équation linéaire $x'(t) = Ax(t)$, et si le noyau de A est reduit à $\{0\}$ (c.à.d. si A est inversible), alors 0 est le seul point d'équilibre pour cette équation.

DÉFINITION 4.2. Soit x_0 un point d'équilibre de l'équation (4.1).

(a) On dit que x_0 est *(positivement) stable* si pour tout voisinage $U \subset D$ de x_0 il existe un voisinage $V \subset D$ tel que toute solution x de (4.1) de donnée initiale $x(0) \in V$ existe globalement pour tout $t \geq 0$ et $x(t) \in U$ pour tout $t \geq 0$.

(b) On dit que x_0 est *asymptotiquement stable* s'il existe un voisinage $U \subset D$ de x_0 tel que toute solution x de (4.1) de donnée initiale $x(0) \in U$ existe globalement pour tout $t \geq 0$ et $\lim_{t\to\infty} x(t) = x_0$.

(c) On dit que x_0 est *exponentiellement stable* s'il existe un voisinage $U \subset D$ de x_0 et des constantes $M, \omega > 0$ tel que toute solution x de (4.1) de donnée initiale $x(0) \in U$ existe globalement pour tout $t \geq 0$ et $\|x(t) - x_0\| \leq M\, e^{-\omega t} \|x(0) - x_0\|$.

(d) On dit que x_0 est *(positivement) instable* si x_0 n'est pas (positivement) stable.

Dans la suite on va tout simplement dire qu'un point d'équilibre est stable s'il est positivement stable. En fait, un point d'équilibre est *négativement stable* s'il est positivement stable pour l'équation $x'(t) = -f(x(t))$, ce qui revient à un remplacement du temps t par $-t$. Dans la suite, on ne va considérer que des solutions globales définies pour tout $t \geq 0$ et on ne s'intéresse pas explicitement aux temps négatives.

LEMME 4.3. *Soit x_0 un point d'équilibre de l'équation* (4.1). *Alors les implications suivantes sont vraies:*

$$\begin{array}{c} x_0 \textit{ est stable} \\ \Downarrow \\ x_0 \textit{ est asymptotiquement stable} \\ \Downarrow \\ x_0 \textit{ est exponentiellement stable .} \end{array}$$

On rappelle du premier théorème de Liapunov (Téorème 3.11) que dans le cas linéaire, stabilité asymptotique et stabilité exponentielle sont des propriétés équivalentes. Cette équivalence n'est plus vraie dans le cas général.

Stabilité exponentielle pour l'équation linéaire $x'(t) = Ax(t)$ est caractérisée par la propriété que $s(A) < 0$, $s(A)$ étant la borne spectrale. Si $s(A) > 0$, alors le point 0 est instable. On note ici que si $s(A) = 0$, alors on ne peut rien dire sur la stabilité ou instabilité du point d'équilibre 0.

1. Stabilité linéarisée. Deuxième théorème de Liapunov

Le théorème suivant est une conséquence du premier théorème de Liapunov (et du lemme de Gronwall). Il donne une condition suffisante pour qu'un point d'équilibre est exponentiellement stable.

THÉORÈME 4.4 (Lyapunov). *Soit $x_0 \in D$ un point d'équilibre de l'équation* (4.1). *On suppose que la fonction f est de classe C^1 dans un voisinage de x_0 et on suppose que les valeurs propres de la dérivée $f'(x_0) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ont toutes une partie réelle strictement négative.*

Alors x_0 est exponentiellement stable.

DÉMONSTRATION. En remplaçant la fonction f par la fonction translatée $f(\cdot - x_0)$ et en remplaçant la solution x par $x - x_0$ nous pouvons sans perte de généralité supposer que $x_0 = 0$.

Soit $A := f'(0) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Par définition de la dérivée (ou par le théorème de Taylor)

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + r(x) \\ &= Ax + r(x), \quad x \in D, \end{aligned}$$

où le reste r est sous-linéaire dans le sens que $\lim_{\|x\|_2 \to 0} \frac{\|r(x)\|}{\|x\|_2} = 0$. L'équation (4.1) devient donc l'équation différentielle

$$x'(t) = Ax(t) + r(x(t)).$$

Par l'hypothèse sur A et par le premier théorème de Liapunov (Théorème 3.11) le point 0 est un point d'équilibre exponentiellement stable pour l'équation linéaire $x'(t) = Ax(t)$, c.à.d. il existe des constantes $M, \omega > 0$ tels que pour tout $x_1 \in \mathbb{R}^n$

$$\|e^{tA}x_1\|_2 \leq Me^{-\omega t}\|x_1\|_2, \quad t \geq 0.$$

On choisit $\delta > 0$ tel que $\|r(x)\|_2 \leq \frac{\omega}{2M}\|x\|_2$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_2 \leq \delta$. Un tel δ existe par la sous-linéarité de la fonction r.

Soit $x_1 \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x_1\|_2 \leq \frac{\delta}{2M}$ et soit $x : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ une solution locale de l'équation (4.1) pour la donnée initiale $x(0) = x_1$. On choisit l'intervalle $[0,T]$ tel que $\|x(t)\| \leq \delta$ pour tout $t \in [0,T]$.

Le Théorème 3.7 implique que

$$x(t) = e^{tA}x_1 + \int_0^t e^{(t-s)A}r(x(s))\,ds, \quad t \in [0,T].$$

Ainsi, par l'inégalité du triangle

$$\|x(t)\|_2 \leq Me^{-\omega t}\|x_1\|_2 + \int_0^t Me^{-\omega(t-s)}\frac{\omega}{2M}\|x(s)\|_2\,ds$$

ou

$$e^{\omega t}\|x(t)\|_2 \leq M\|x_1\|_2 + \int_0^t \frac{\omega}{2}e^{\omega s}\|x(s)\|_2\,ds.$$

Le lemme de Gronwall (Lemme 2.6) implique que

$$e^{\omega t}\|x(t)\|_2 \leq Me^{\frac{\omega}{2}t}\|x_1\|_2, \quad t \in [0,T].$$

Par le choix de x_1, cette inégalité implique premièrement $\|x(t)\| \leq \frac{\delta}{2}$ pour tout $t \in [0,T]$ et donc la solution x ne peut pas quitter la boule $B(0,\delta)$. Ceci implique deuxièmement que la solution maximale associée est une solution globale (elle existe pour tout $t \geq 0$). Finalement, l'estimation ci-dessus implique alors que $\|x(t)\| \leq Me^{-\frac{\omega}{2}}\|x_1\|$ pour tout $t \geq 0$, et comme ceci est vrai pour tout x_1 dans un petit voisinage de 0, le point 0 est exponentiellement stable. □

On peut aussi démontrer le théorème suivant qui correspond au Théorème 3.12 dans le cas linéaire.

Théorème 4.5. *Soit $x_0 \in D$ un point d'équilibre de l'équation* (4.1). *On suppose que la fonction f est de classe C^1 dans un voisinage de x_0 et on suppose que la dérivée $f'(x_0) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a (au moins) une valeur propre avec partie réelle strictement positive.*

Alors x_0 est instable.

On note ici que comme dans le cas linéaire, si toutes les valeurs propres de $f'(x_0)$ ont partie réelle strictement négative ou nulle (!), alors on ne peut rien dire sur la stabilité ou instabilité du point d'équilibre x_0.

2. Fonctions de Liapunov

On considère toujours l'équation différentielle autonome (4.1) où $f : D \to \mathbb{R}^n$ est maintenant une fonction de classe C^1 (pour simplicité) sur un ouvert $D \subset \mathbb{R}^n$.

Définition 4.6 (Fonction de Liapunov). (a) Une fonction $V : D \to \mathbb{R}$ s'appelle *fonction de Liapunov (au sens large)* pour l'équation (4.1) si V est de classe C^1 et

$$\dot{V}(x) := \langle V'(x), f(x)\rangle \leq 0 \quad \text{pour tout } x \in D.$$

(b) Une fonction $V : D \to \mathbb{R}$ s'appelle *fonction de Liapunov stricte* pour l'équation (4.1) si V est fonction de Liapunov au sens large et si pour tout $x \in D$ on a

$$\dot{V}(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = 0.$$

Une fonction de Liapunov est caractérisée par la propriété importante suivante.

Lemme 4.7. (a) *Une fonction $V : D \to \mathbb{R}$ de classe C^1 est fonction de Liapunov au sens large pour l'équation* (4.1) *si et seulement si pour toute solution x de* (4.1) *la composée $V(x)$ est décroissante.*

(b) *Si $V : D \to \mathbb{R}$ est une fonction de Liapunov au sens stricte pour l'équation* (4.1) *alors si la composée $V(x)$ est constante pour une solution x de* (4.1), *alors la solution x est constante.*

Démonstration. (a) Soit x une solution de (4.1). Alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(x(t)) &= \langle V'(x(t)), x'(t)\rangle \\ &= \langle V'(x(t)), f(x(t))\rangle \\ &= \dot{V}(x(t)) \leq 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Donc, $V(x)$ est décroissante.

L'inverse se démontre de la même façon, en utilisant (4.2).

(b) Soit V une fonction de Liapunov stricte. Alors elle est fonction de Liapunov, et si pour une solution x de (4.1) la composée $V(x)$ est constante, alors, d'après (4.2), $\dot{V}(x(t)) = 0$ pour tout t. Ceci implique que $f(x(t)) = 0$ pour tout t, et puis $x'(t) = 0$. Donc, x est constante. □

Exemples 4.8. (a) Systèmes gradients: Soit $F : D \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur l'ouvert $D \subset \mathbb{R}^n$. Alors $V = F$ est fonction de Liapunov stricte pour le *système gradient*

$$x'(t) + \nabla F(x(t)) = 0,$$

où ∇F est le gradient de F. En effet, si $x : I \to \mathbb{R}^n$ est solution de cette équation différentielle, alors

$$\begin{aligned} \dot{F}(x(t)) &= \frac{d}{dt}F(x(t)) \\ &= \langle \nabla F(x(t)), x'(t)\rangle \\ &= -\|x(t)\|_2^2 \quad \leq \quad 0, \end{aligned}$$

c.à.d. la fonction $t \mapsto F(x(t))$ est décroissante, et elle est constante si et seulement si x est constante.

(b) Systèmes hamiltoniens: Soit $H : D \to \mathbb{R}$, $H = H(x, p)$ une fonction de classe C^2 sur l'ouvert $D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Alors H est fonction de Liapunov pour le *système hamiltonien*

$$\begin{aligned} x'(t) &= \nabla_p H(x(t), p(t)), \\ p'(t) &= -\nabla_x H(x(t), p(t)). \end{aligned}$$

En effet, si $(x, p) : I \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ est solution de cette équation différentielle, alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H(x(t), p(t)) &= \langle \nabla H(x(t), p(t)), (x'(t), p'(t)) \rangle_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \\ &= \langle \nabla_x H(x(t), p(t)), x'(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} + \left\langle \nabla_p H(x(t), p(t)), p'(t) \right\rangle_{\mathbb{R}^n} \\ &= -\langle p'(t), x'(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle x'(t), p'(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} \\ &= 0, \end{aligned}$$

c.à.d. la fonction $t \mapsto H(x(t), p(t))$ est constante.

(c) Pendule mathématique: Pour $\alpha \geq 0$ on considère l'équation différentielle du pendule mathématique

$$x''(t) + \alpha x'(t) + x(t) = 0.$$

Cette équation différentielle est équivalente au problème

$$u'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\alpha \end{pmatrix} u(t).$$

La fonction $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$V(u_0, u_1) := \frac{1}{2} \|u_0\|_2^2 + \frac{1}{2} \|u_1\|_2^2$$

est fonction de Liapunov pour ce système. En effet, si $x : I \to \mathbb{R}$ est solution de l'équation du pendule mathématique, alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x(t), x'(t)) &= \langle x(t), x'(t) \rangle + \langle x'(t), x''(t) \rangle \\ &= -\alpha \|x'(t)\|_2^2 \leq 0. \end{aligned}$$

(d) Système gradient du second ordre: Soit F comme dans l'exemple (a) et soit $\alpha \geq 0$. On considère l'équation différentielle

$$x''(t) + \alpha x'(t) + \nabla F(x(t)) = 0.$$

Si $x : I \to \mathbb{R}^n$ est solution de ce problème, alors

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|x'(t)\|_2^2 + F(x(t)) \right) = -\alpha \|x'(t)\|_2^2 \leq 0,$$

c.à.d. la fonction $V(u_0, u_1) := \frac{1}{2} \|u_1\|_2^2 + F(u_1)$ est une fonction de Liapunov.

Définition 4.9 (Ensemble ω-limite). Soit $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ une solution globale, bornée (c.à.d. $\sup \|x(t)\| < \infty$) de l'équation différentielle (4.1). On appelle

$$\omega(x) := \{ z \in D : \exists (t_j) \nearrow \infty \text{ t.q. } x(t_j) \to z \, (j \to \infty) \}$$

l'ensemble ω-limite de x.

L'ensemble ω-limite est l'ensemble des points d'accumulation de la solution x, lorsque $t \to \infty$. Une autre description de $\omega(x)$ est donnée dans le lemme suivant.

LEMME 4.10. *Soit* $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ *une solution globale, bornée. Alors*

$$\omega(x) = \bigcap_{t\geq 0} \overline{\{x(s) : s \geq t\}}.$$

DÉMONSTRATION. Soit $z \in \omega(x)$. Alors, par définition, il existe une suite $(t_j) \nearrow \infty$ tel que $\lim_{j\to\infty} x(t_j) = z$. Comme la suite (t_j) est non-bornée, $z \in \overline{\{x(s) : s \geq t\}}$ quelque soit $t \geq 0$. Donc, $z \in \bigcap_{t\geq 0} \overline{\{x(s) : s \geq t\}}$.

Inversement, soit $z \in \bigcap_{t\geq 0} \overline{\{x(s) : s \geq t\}}$. Alors $z \in \overline{\{x(s) : s \geq t\}}$ quelque soit $t \geq 0$. Ceci implique que pour tout $j \in \mathbb{N}$ il existe $t_j \geq j$ tel que $\|x(t_j) - z\| \leq 1/j$. Pour la suite $(t_j) \nearrow \infty$ ainsi obtenu on a $\lim_{j\to\infty} x(t_j) = z$. Donc, $z \in \omega(x)$. □

LEMME 4.11. *Soit* $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ *une solution globale, bornée. Alors:*

(i) *L'ensemble* ω*-limite* $\omega(x)$ *est non-vide, compact et connexe.*
(ii) *Si* $z_0 \in \omega(x)$ *et si* z *est la solution maximale de* (4.1) *pour la donnée initiale* $z(0) = z_0$*, alors* z *est solution globale, bornée et* $z(t) \in \omega(x)$*, c.à.d.* $\omega(x)$ *est* invariant *par l'équation différentielle.*
(iii) *On a* $\lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}(x(t), \omega(x)) = 0$.
(iv) *On a* $\omega(x) = \{z\}$ *(c.à.d. l'ensemble* ω*-limite est reduit à un point) si et seulement si* $\lim_{t\to\infty} x(t) = z$.

DÉMONSTRATION. (i) Comme la solution x est bornée, les ensembles

$$\overline{\{x(s) : s \geq t\}}$$

sont non-vides, compacts, connexes (cette propriété vient de la continuité de x), et décroissant en t. C'est un exercice de démontrer qu'alors $\omega(x)$ est aussi non-vide, compact et connexe.

(ii) Soit $z_0 \in \omega(x)$, et soit z la solution maximale de (4.1) pour cette donnée initiale. Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Par définition, il existe une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \nearrow \infty$, telle que

$$\lim_{n\to\infty} x(t_n) = z_0.$$

Par la sensibilité par rapport aux données initiales, et comme x est bornée, on obtient alors

$$\lim_{n\to\infty} x(t + t_n) = z(t).$$

En particulier, z est solution globale et bornée. En plus, par la définition de $\omega(x)$, $z(t) \in \omega(x)$.

(iii) Par le théorème de Bolzano, pour toute suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \nearrow \infty$ il existe une sous-suite $(t_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\lim_{k\to\infty} x(t_{n_k}) = z \in \omega(x).$$

En particulier, pour cette sous-suite,

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{dist} x(t_{n_k}), \omega(x)) = 0.$$

Comme (t_n) était arbitraire, on obtient l'assertion.

L'assertion (iv) est une conséquence directe de (iii) et de la définition de $\omega(x)$. □

THÉORÈME 4.12 (Principe d'invariance de La Salle[1]). *Soit V une fonction de Liapunov pour l'équation différentielle* (4.1)*, et soit $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ une solution globale, bornée (c.à.d.* $\sup \|x(t)\| < \infty$*) de cette équation différentielle telle que* $\overline{\{x(t) : t \geq 0\}} \subset D$*. Alors:*

(i) *La limite* $\lim_{t\to\infty} V(x(t)) =: V_\infty$ *existe.*
(ii) *La fonction V est constante* $= V_\infty$ *sur* $\omega(x)$*.*
(iii) *Si V est fonction de Liapunov stricte, alors tout élément $z \in \omega(x)$ est point d'équilibre.*

DÉMONSTRATION. (i) L'image $\{x(t) : t \geq 0\}$ de la solution est bornée par hypothèse. Son adhérence est donc compact, et par hypothèse inclus dans D. Comme V est continue sur D, la fonction $t \mapsto V(x(t))$ est bornée. Mais comme V est fonction de Liapunov, cette fonction est aussi décroissante. Donc, $\lim_{t\to\infty} V(x(t))$ existe.

(ii) Soit $z \in \omega(x_0)$ arbitraire. Alors il existe $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \nearrow \infty$ tel que $\lim_{n\to\infty} x(t_n) = z$. La continuité de V implique

$$V(z) = \lim_{n\to\infty} V(x(t_n)) = V_\infty.$$

(iii) On suppose en plus que V est fonction de Liapunov stricte. Si z est solution de l'équation différentielle (4.1) telle que $z(0) \in \omega(x)$, alors la fonction $t \to V(z(t))$ est constante d'après (ii) et le lemme 4.11. Par la caractérisation d'une fonction de Liapunov stricte, la solution z est ainsi constante et donc $z(0) \in \omega(x)$ est point d'équilibre. □

Dans la suite, on suppose que $f : D \to \mathbb{R}^n$ est définie dans un voisinage de 0 et que 0 est point d'équilibre. En fait, on peut toujours se ramener à cette situation.

Afin d'appliquer le principe d'invariance de La Salle à l'étude de la stabilité (asymptotique) du point d'équilibre 0, on fait la définition suivante.

DÉFINITION 4.13. On dit qu'une fonction $V : D \to \mathbb{R}$ est *définie positive* (en 0) et on note $V > 0$ s'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in D$, $\|x\| \leq \delta$,

$$\begin{aligned} &V(x) \geq 0 \text{ et si} \\ &V(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0. \end{aligned}$$

On dit qu'une fonction $V : D \to \mathbb{R}$ est *définie négative* (en 0) et on note $V < 0$ si $-V$ est définie positive.

EXEMPLE 4.14. Les fonctions $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ et $V(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4$ sont définies positives.

REMARQUE 4.15. Si $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est telle que $\dot{V} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est définie négative ($\dot{V} < 0$), alors V est fonction de Liapunov stricte dans un voisinage de 0. Si on a seulement $\dot{V} \leq 0$ (dans un voisinage de 0), alors V est fonction de Liapunov.

THÉORÈME 4.16. *Soit $V : D \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et définie positive.*

[1] La Salle ()

(i) *Si* $\dot{V} \leq 0$ *(c.à.d. si* V *est une fonction de Liapunov), alors le point* 0 *est stable.*

(ii) *Si en plus* $\dot{V} < 0$ *(c.à.d. si* V *est définie négative), alors* 0 *est asymptotiquement stable.*

Démonstration. (i) Par hypothèse, V est définie positive et une fonction de Liapunov au sens large. Soit δ comme dans la Définition 4.13. On suppose que δ est assez petit tel que la boule fermé $\bar{B}(0, \delta)$ est inclus dans D. Par continuité de V,

$$m := \inf\{V(x) : \|x\| = \delta\} > 0.$$

Soit $0 < c < m$. On pose

$$U_c := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq \delta \text{ et } V(x) \leq c\}.$$

Alors U_c est un voisinage compact de 0. Soit $x_1 \in U_c$ et soit x la solution maximale de (4.1) pour la donnée initiale $x(0) = x_1$. Comme V est une fonction de Liapunov, $V(x)$ est décroissante, et donc, par définition de U_c et de m, la solution maximale reste dans U_c pour tout t de l'intervalle d'existence. L'ensemble U_c étant compact, la solution x ne peut donc pas exploser en temps fini. Par conséquent, elle est globale, et comme elle reste dans U_c, elle est aussi bornée.

Pour montrer que 0 est stable, soit U un voisinage de 0. Alors, comme V est définie positive et continue, il existe $c > 0$ tel que $U_c \subset U$. On vient de démontrer que pour toute donnée initiale $x_1 \in U_c$, la solution maximale correspondante est globale et reste dans U_c. A fortiori, elle reste dans U. Donc, 0 est stable.

(ii) Soient $\delta > 0$ et $m > 0$ comme ci-dessus. En choisissant δ assez petit, et par hypothèse, on a $\dot{V}(x) \leq 0$ pour tout $x \in \bar{B}(0, \delta)$ (c.à.d. V est fonction de Liapunov) et V est stricte dans $\bar{B}(0, \delta)$. L'hypothèse que $\dot{V}$ soit définie négative implique même que 0 est le seul point d'équilibre dans $\bar{B}(0, \delta)$.

On fixe $0 < c < m$ et on définit U_c comme ci-dessus. On a vu que pour $x_1 \in U_c$ la solution maximale de (4.1) pour la donnée initiale $x(0) = x_1$ est globale et reste dans $U_c \subset \bar{B}(0, \delta)$. Comme V est fonction de Liapunov stricte, et par le principe d'invariance de La Salle (Théorème 4.12), tout élément de $\omega(x) \subset \bar{B}(0, \delta)$ est un point d'équilibre. Comme 0 est le seul point d'équilibre dans $\bar{B}(0, \delta)$, on obtient donc $\omega(x) = \{0\}$. Ceci implique que $\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$ (Lemme 4.11). Ainsi, le point 0 est asymptotiquement stable. □

Bibliographie

1. J.-M. Arnaudiès, *Equations différentielles de fonctions de variable réelle ou complexe*, Ellipses, Paris, 2000.
2. A. Avez, *Calcul différentiel*, Collection Maitrise de mathématiques pures, Masson, Paris, New York, Barcelone, 1983.
3. F. Ayres Jr., *Théorie et applications des équations différentielles*, McGraw Hill, Paris, 1986.
4. D. Azé, G. Constans, and J.-B. Hiriart-Urruty, *Calcul différentiel et équations différentielles*, Dunod, Paris, 2002.
5. H. Cartan, *Calcul différentiel*, Hermann, Paris, 1967.
6. H. Heuser, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, B. G. Teubner, Stuttgart, 1989.
7. N. Rouche and J. Mawhin, *Equations différentielles ordinaires. Tome I: Théorie générale*, Masson et Cie., Editeurs, Paris, 1973.
8. ———, *Equations différentielles ordinaires. Tome II: Stabilité et solutions périodiques*, Masson et Cie., Editeurs, Paris, 1973.