Ralph Chill

Gewöhnliche Differentialgleichungen und Integration auf Mannigfaltigkeiten

February 2, 2022

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1
Beispiele gewöhnlicher Differentialgleichungen

1.1 Was ist eine gewöhnliche Differentialgleichung?

Seien $n, m \geq 1$, $D \subseteq \mathbb{R}^{1+mn}$ eine offene Menge und $f : D \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion.

Eine **(explizite) gewöhnliche Differentialgleichung der Ordnung** m ist eine Gleichung der Form

$$x^{(m)}(t) = f(t, x(t), x'(t), ..., x^{(m-1)}(t)) \quad (t \in I). \tag{1.1}$$

Hier ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $x : I \to \mathbb{R}^n$ eine m-mal differenzierbare Funktion. Diese Funktion x ist die Unbekannte in dieser Gleichung. Die Differentialgleichung (1.1) zu lösen heißt, eine m-mal differenzierbare, auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definierte Funktion x zu finden, so daß die Gleichung (1.1) für alle $t \in I$ erfüllt ist. Im Prinzip ist auch das Intervall I unbekannt bzw. nicht vorgegeben.

Bemerkung. Eine **implizite gewöhnliche Differentialgleichung** ist eine Gleichung der Form

$$f(t, x(t), x'(t), ..., x^{(m-1)}(t), x^{(m)}(t)) = 0 \quad (t \in I).$$

Hier steht die Ableitung mit der höchsten Ordnung nicht getrennt auf einer Seite der Gleichung. Diese Differentialgleichung ist allgemeiner als die explizite Differentialgleichung (1.1). Wir werden sie aber in dieser Vorlesung nicht betrachten.

Wenn $n = 1$, dann nennen wir die Differentialgleichung (1.1) eine **skalare Differentialgleichung**. Wenn $n \geq 2$, dann ist die Funktion x eine vektorwertige Funktion, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $f = (f_1, \ldots, f_n)$, und die Differentialgleichung (1.1) ist ein System von n skalaren, gekoppelten Differentialgleichungen. Anstatt der Differentialgleichung (1.1) in $\mathbb{R}^n$ könnte man also auch ein System von n skalaren, gekoppelten Differentialgleichungen schreiben, etwa

$$
\begin{aligned}
x_1^{(m)}(t) &= f_1(t, x_1(t), \ldots, x_n(t), x_1'(t), \ldots, x_n'(t), \ldots, x_1^{(m-1)}(t), \ldots, x_n^{(m-1)}(t)),\\
x_2^{(m)}(t) &= f_2(t, x_1(t), \ldots, x_n(t), x_1'(t), \ldots, x_n'(t), \ldots, x_1^{(m-1)}(t), \ldots, x_n^{(m-1)}(t)),\\
\vdots\; &\;\vdots\\
x_n^{(m)}(t) &= f_n(t, x_1(t), \ldots, x_n(t), x_1'(t), \ldots, x_n'(t), \ldots, x_1^{(m-1)}(t), \ldots, x_n^{(m-1)}(t)).
\end{aligned}
$$

Manchmal werden wir diese Schreibweise verwenden, obwohl die Differentialgleichung der Form (1.1) vielleicht einfacher aussieht.

Oft wird eine Differentialgleichung durch Anfangsbedingungen (oder Randbedingungen) ergänzt, zum Beispiel

$$
\begin{aligned}
x^{(m)}(t) &= f(t, x(t), x'(t), ..., x^{(m-1)}(t)) \quad (t \in I),\\
x(t_0) &= x_0,\\
x'(t_0) &= x_1,\\
&\cdots\\
x^{(m-1)}(t_0) &= x_{m-1}.
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

Hier ist $t_0 \in I$ eine gegebene “Anfangszeit” und $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{m-1} \in \mathbb{R}^n$ sind gegebene Anfangswerte. Das Problem (1.2) heißt auch **Anfangswertproblem** oder **Cauchyproblem**.

Beispiel 1.1 (Exponentielles Wachstum). Sei $I = [0, T]$ ein Intervall (Modell eines *Zeit*intervalls). Für jeden Zeitpunkt $t \in I$ misst man die Anzahl $x(t)$ der Individuen einer Population, wobei “Population” sehr allgemein zu verstehen ist, zum Beispiel eine Population von Zellen oder Bakterien, eine “Population” von radioaktiven Atomen oder ein Kapital.

Wir wollen annehmen (!), daß sich die Individuen vermehren oder absterben, und daß die Zuwachsrate unabhängig vom Zeitpunkt $t \in I$ und daß der Zuwachs proportional zur Anzahl der Individuen zum Zeitpunkt t ist. Die Zuwachsrate ist negativ, wenn Individuen absterben (radioaktive Atome zerfallen). Der infinitesimale Zuwachs der Anzahl der Individuen ist gegeben durch die Ableitung $x'(t)$, er ist proportional zur Anzahl der Individuen $x(t)$, und die Proportionalitätskonstante (Zuwachsrate) ist zeitunabhängig. Wir erhalten unter diesen Annahmen die Differentialgleichung

$$x'(t) = a \cdot x(t).$$

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung. Wir wollen weiter annehmen, daß die Anzahl der Individuen zu einem gegebenen Zeitpunkt $t_0 \in I$ bekannt ist:

$$x(t_0) = x_0.$$

Wir erhalten dann ein Anfangswertproblem.

Beispiel 1.2. Wir betrachten dieselbe Situation wie im Beispiel 1.1, aber wir nehmen jetzt an, daß die Proportionalitätskonstante (Zuwachsrate) von der Zeit abhängen darf (zum Beispiel teilen sich Zellen am Tag häufiger als während der Nacht). Wir erhalten dann die Differentialgleichung

$$x'(t) = a(t)x(t),$$

welche noch mit einer Anfangsbedingung ergänzt werden kann.

Beispiel 1.3 (Das Pendel). Eine in einem Massenpunkt M konzentrierte Masse m hängt an einem masselosen, festen Stab der Länge l. Sei $\varphi(t)$ der Winkel zwischen dem Pendel (dem Stab) und der Vertikalen zum Zeitpunkt t, und sei g die Gravitationskonstante. Dann erfüllt die Funktion φ die Differentialgleichung des physikalischen Pendels:

$$m \cdot l \cdot \varphi''(t) = -mg \cdot \sin \varphi(t).$$

Für kleine Auslenkungen φ kann man den Term $\sin \varphi$ durch φ ersetzen (erster Term der Taylorentwicklung der Sinusfunktion um den Gleichgewichtspunkt 0). Dann erhält man die Differentialgleichung des mathematischen Pendels:

$$l\, \varphi''(t) = -g\varphi(t).$$

Beide Differentialgleichungen sind gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Sie sind eventuell durch die Anfangsbedingungen $\varphi(t_0) = \varphi_0$ (Anfangsauslenkung) und $\varphi'(t_0) = \varphi_1$ (Anfangsgeschwindigkeit) zu ergänzen.

Beispiel 1.4 (Johann Bernoulli[1], 1696). Gegeben seien zwei Punkte A und B in einer vertikalen Ebene. Im Brachystochronenproblem sucht man unter all den Kurven, welche die Punkte A und B verbinden, diejenige optimale Kurve, so daß die Zeit, die ein Massepunkt der Masse m braucht, um sich nur unter dem Einfluß der Gravitation entlang der Kurve von A nach B zu bewegen, minimal wird. Die Kurve ist der Graph einer reellwertigen Funktion x. Johann Bernoulli hat gezeigt, daß die Brachystochrone Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$x'(t) = \sqrt{\frac{a - x(t)}{x(t)}}$$

sein muß. Die Lösung dieses Problems war gleichzeitig Geburtsstunde der Variationsrechnung (hier: Optimierung einer reellwertigen Funktion, die auf einer Menge von Kurven definiert ist).

Einige typische Fragestellungen aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen sind:

- Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen?

[1] Johann Bernoulli (27.7.1667-1.1.1748)

- Stabilität: hängen die Lösungen stetig von den Daten (Funktion f und Anfangswert) ab?
- Explizite Berechnung von Lösungen?
- Numerische Berechnung von Lösungen?
- Qualitatives Verhalten von Lösungen: Langzeitverhalten von Lösungen, "blow up", Existenz von Gleichgewichtspunkten, Existenz von periodischen Lösungen, Stabilität und Instabilität von Gleichgewichtslösungen, Chaos, ...?
- Modellierung?

Im folgenden sei immer $D \subseteq \mathbb{R}^{1+n}$ eine offene Menge und $f : D \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion. Die Differentialgleichung erster Ordnung ist dann die Gleichung

$$x'(t) = f(t, x(t)). \tag{1.3}$$

Sie wird oft durch die Anfangsbedingung

$$x(t_0) = x_0 \tag{1.4}$$

ergänzt, wobei $(t_0, x_0) \in D$.

Definition 1.5 (Lösung). Eine **Lösung** der Differentialgleichung (1.3) (bzw. des Anfangswertproblems (1.3)–(1.4)) ist eine stetig differenzierbare Funktion $x : I \to \mathbb{R}^n$, die auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definiert ist, welches t_0 enthält, und so daß die Differentialgleichung (1.3) für alle $t \in I$ erfüllt ist (bzw. die Differentialgleichung (1.3) für alle $t \in I$ und die Anfangsbedingung (1.4) erfüllt sind).

1.2 Lineare, skalare Differentialgleichungen erster Ordnung

Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbb{R}$ und $a : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wir betrachten zuerst die **lineare, homogene, skalare Differentialgleichung erster Ordnung**:

$$\begin{cases} x'(t) = a(t)x(t), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{1.5}$$

Proposition 1.6. *Das Anfangswertproblem* (1.5) *besitzt eine auf dem ganzen Intervall I definierte, eindeutige Lösung. Diese ist gegeben durch*

$$x(t) = e^{\int_{t_0}^t a(s)\,ds} x_0 \quad (t \in I).$$

Beweis. Existenz. Man prüft leicht nach, daß die in der Aussage gegebene Funktion tatsächlich eine Lösung des Anfangswertproblems (1.5) ist.

Eindeutigkeit. Sei z eine weitere Lösung des Anfangswertproblems (1.5). Setze $v(t) := e^{-\int_{t_0}^t a(s)\,ds} z(t)$. Dann gilt, weil z eine Lösung ist,

$$\begin{aligned} v'(t) &= -a(t)e^{-\int_{t_0}^t a(s)\,ds} z(t) + e^{-\int_{t_0}^t a(s)\,ds} z'(t) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Also ist v konstant (zur Erinnerung: dies ist eine Folgerung aus dem Mittelwertsatz). Nach Definition von v und weil z eine Lösung von (1.5) ist,

$$v(t_0) = z(t_0) = x_0.$$

Also ist $v(t) = x_0$ für alle $t \in I$. Wieder aus der Definition von v folgt

$$z(t) = e^{\int_{t_0}^t a(s)\,ds} x_0 = x(t) \quad (t \in I),$$

d. h. $z = x$.

Seien I, t_0, x_0 und a wie oben, und sei des Weiteren $g : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wir betrachten die **lineare, inhomogene, skalare Differentialgleichung erster Ordnung**:

$$\begin{cases} x'(t) = a(t)x(t) + g(t), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{1.6}$$

Proposition 1.7. *Das Anfangswertproblem* (1.6) *besitzt eine auf dem ganzen Intervall I definierte, eindeutige Lösung. Diese ist gegeben durch*

$$x(t) = e^{\int_{t_0}^t a(s)\,ds} x_0 + \int_{t_0}^t e^{\int_s^t a(r)\,dr} g(s)\,ds \quad (t \in I).$$

Beweis. Existenz. Man prüft leicht nach, daß die in der Aussage gegebene Funktion tatsächlich eine Lösung des Anfangswertproblems (1.6) ist.

Eindeutigkeit. Seien x_1 und x_2 zwei Lösungen des Anfangswertproblems (1.6). Dann ist die Differenz $x(t) := x_1(t) - x_2(t)$ eine Lösung der linearen, homogenen Differentialgleichung (1.5) mit Anfangswert $x(t_0) = 0$. Nach Satz 1.6 ist $x = 0$ die eindeutige Lösung dieses Problems. Also ist $x_1 = x_2$.

1.3 Skalare Differentialgleichungen erster Ordnung mit getrennten Veränderlichen

Wir betrachten die **skalare Differentialgleichungen erster Ordnung mit getrennten Veränderlichen**:

$$\begin{cases} x'(t) = a(t)\,f(x(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{1.7}$$

Hier sind $a : I \to \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $D \subseteq \mathbb{R}$ offen) zwei stetige Funktionen.

Wir wollen zuerst einmal annehmen, daß $x : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung dieser Differentialgleichung ist. Wir nehmen des Weiteren an, daß $f(x(t)) \neq 0$ für alle $t \in I$. Letztere Bedingung ist insbesondere aus Stetigkeitsgründen in einer Umgebung von t_0 erfüllt (d. h. wenn I hinreichend klein gewählt ist), wenn $f(x_0) \neq 0$. Unter diesen Bedingungen sind folgende Umformungen erlaubt, die uns gleichzeitig eine Methode beschreiben, wie Lösungen der Differentialgleichung (1.7) berechnet werden können. Zuerst teilen wir beide Seiten der Differentialgleichung durch $f(x(t))$:

$$\frac{x'(t)}{f(x(t))} = a(t) \text{ für alle } t \in I.$$

Sodann integrieren wir diese Gleichung von t_0 bis t:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{x'(s)}{f(x(s))}\, ds = \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds,$$

Die Substitutionsregel (mit der Substitution $v := x(s)$) ergibt:

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{f(v)}\, dv = \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds.$$

Sei F eine Stammfunktion von $\frac{1}{f}$ auf dem Intervall $[x_0, x(t)]$. Eine solche Stammfunktion existiert nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, weil f stetig und nicht 0 auf diesem Intervall ist. Da f ein Vorzeichen hat, ist F streng monoton, und somit besitzt F eine Umkehrfunktion. Es ist

$$F(x(t)) = F(x_0) + \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds$$

und somit

$$x(t) = F^{-1}(F(x_0) + \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds).$$

Dies ist eine explizite Formel für die Lösung x von (1.7); wenn sie, wie angenommen, existiert, dann ist sie durch diese Formel gegeben, und somit besitzt die Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen (lokal) höchstens eine Lösung, wenn $f(x_0) \neq 0$. Umgekehrt bieten die obigen Schritte einen Algorithmus zur Berechnung einer Lösung, oder einfacher: die obige Formel liefert eine Lösung von (1.7), wie man einfach nachrechnet.

Proposition 1.8 (Lokale Existenz und Eindeutigkeit). *Sei $x_0 \in \mathbb{R}$, so daß $f(x_0) \neq 0$. Dann besitzt das Anfangswertproblem* (1.7) *eine Lösung x auf einer Intervallumgebung I_0 von t_0. Die Lösung ist gegeben durch die Gleichung*

$$\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{f(v)}\, dv \quad (t \in I_0).$$

Sind x_1 und x_2 zwei Lösungen des Anfangswertproblems (1.7)*, dann stimmen sie auf einer Intervallumgebung von t_0 überein.*

1.4 Die Differentialgleichung $x' = f(\frac{at+bx+c}{\alpha t+\beta x+\gamma})$

Wir betrachten zwei Spezialfälle dieser Differentialgleichung.

Zuerst betrachten wir die Differentialgleichung

$$\begin{cases} x'(t) = f(\frac{x(t)}{t}), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{1.8}$$

Sei $x : I_0 \to \mathbb{R}$ eine Lösung dieser Differentialgleichung. Wir substituieren $z(t) := \frac{x(t)}{t}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} z'(t) &= \frac{x'(t)}{t} - \frac{x(t)}{t^2} \\ &= \frac{1}{t}(f(z(t)) - z(t)) \end{aligned}$$

und

$$z(t_0) = \frac{x(t_0)}{t_0},$$

d. h. z ist eine Lösung einer Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen. Ist umgekehrt z eine Lösung der Differentialgleichung

$$\begin{cases} z'(t) = \frac{1}{t}(f(z(t)) - z(t)), \\ z(t_0) = \frac{x_0}{t_0}, \end{cases}$$

dann ist $x(t) := t\,z(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung (1.8). Die Substitution $z(t) = \frac{x(t)}{t}$ transformiert also die Differentialgleichung (1.8) in eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen (1.7), für die wir ein Lösungsverfahren kennen, wenn der Anfangswert keine Nullstelle von f ist. In diesem Fall haben wir also Existenz, Eindeutigkeit und eine Lösungsformel für die Differentialgleichung (1.8).

Als nächstes betrachten wir die Differentialgleichung

$$\begin{cases} x'(t) = f(at + bx(t) + c), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{1.9}$$

Sei $x : I_0 \to \mathbb{R}$ eine Lösung dieser Differentialgleichung. Wir substituieren $z(t) := at + bx(t) + c$. Dann gilt

$$\begin{aligned} z'(t) &= a + bx'(t) \\ &= a + bf(z(t)) \end{aligned}$$

und

$$z(t_0) = at_0 + bx_0 + c,$$

d. h. auch in diesem Fall ist z eine Lösung einer Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen. Ist umgekehrt z eine Lösung der Differentialgleichung

$$\begin{cases} z'(t) = a + bf(z(t)), \\ z(t_0) = at_0 + bx_0 + c, \end{cases}$$

dann ist $x(t) := \frac{z(t) - at - c}{b}$ eine Lösung der Differentialgleichung (1.9).

Die allgemeine Differentialgleichung $x' = f(\frac{at+bx+c}{\alpha t+\beta x+\gamma})$ wird in [Heuser (1989), Abschnitt 9] behandelt.

1.5 Vektorfelder

Für zwei Spezialfälle gewöhnlicher Differentialgleichungen kann man das qualitative Verhalten von Lösungen – Existenz und Eindeutigkeit vorausgesetzt – ganz gut mittels sogenannter Vektorfelder erkennen.

Skalare Differentialgleichungen erster Ordnung. Im ersten Fall sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{1.10}$$

wobei $(t_0, x_0) \in D$.

Sei $x : I_0 \to \mathbb{R}$ eine Lösung dieser Differentialgleichung. Man betrachte den Graphen dieser Lösung in einem kartesischen Koordinatensystem mit den Koordinaten t un x. Dann besagt die Differentialgleichung (1.10), daß die Steigung der Tangente an den Graphen von x im Punkt $(t, x(t))$ genau mit dem Funktionswert $f(t, x(t))$ übereinstimmt. Die Tangente im Punkt $(t, x(t))$ zeigt also in Richtung des Vektors $(1, f(t, x))$ (oder auch in Richtung $(c, cf(t, x))$ für eine feste Konstante $c > 0$). Wir tragen also in jedem Punkt (t, x) des Koordinatensystems den Vektor $(1, f(t, x))$ an. Das *Vektorfeld*, welches wir somit erhalten, gibt uns damit eine Idee, wie die Graphen von Lösungen der Differentialgleichung (1.10) aussehen müssen.

Beispiel 1.9. Betrachten wir zum Beispiel die Differentialgleichung

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{\sin t}{1+x(t)}, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

Für diese Differentialgleichung erhalten wir das folgende Vektorfeld. Die Graphen der Lösungen zu den Anfangswerten $x_0 = -0.2$ und $x_0 = 1.2$ sind ebenfalls eingezeichnet.

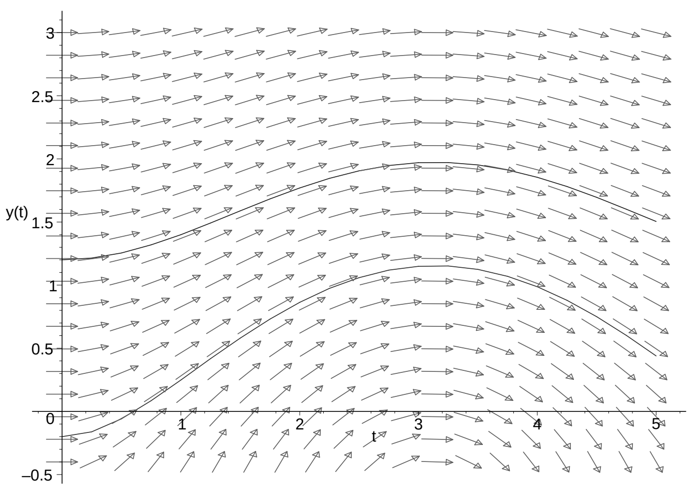

Fig. 1.1 Vektorfeld für $x' = \frac{\sin t}{1+x}$

Autonome Differentialgleichungen erster Ordnung in $\mathbb{R}^2$. Im zweiten Fall sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Menge und $f : D \to \mathbb{R}^2$ eine stetige Funktion. Wir betrachten die *autonome* (d. h. die Funktion f hängt nicht explizit von der Zeit ab) Differentialgleichung

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{1.11}$$

wobei $x_0 \in D$.

Sei $x : I_0 \to \mathbb{R}^2$ eine Lösung dieser Differentialgleichung. Man betrachte das Bild dieser Lösung in $\mathbb{R}^2$ (eine Lösung einer Differentialgleichung kann auch als Parametrisierung einer Kurve aufgefaßt werden, und hier betrachten wir das Bild dieser Kurve). Dann besagt die Differentialgleichung (1.11), daß die Tangente an diese Kurve im Punkt $x(t)$ genau mit dem Funktionswert $f(x(t))$ übereinstimmt.

Wir tragen also in jedem Punkt x eines kartesischen Koordinatensystems mit den Koordinaten x_1 und x_2 den Vektor $f(x)$ an. Das *Vektorfeld*, welches wir somit erhalten, gibt uns damit eine Idee, wie die zu den Lösungen der Differentialgleichung (1.11) gehörigen Kurven aussehen müssen. Da wir eventuell nur an der Richtung der Tangente interessiert sind, könnten wir auch den normalisierten Vektor $f(x)/\|f(x)\|$ ins Vektorfeld eintragen, aber die Länge des Vektors $f(x)$ gibt uns zusätzlich an, wie schnell die Kurve durchlaufen wird. Das zu f gehörige Vektorfeld gibt uns außerdem an, wo wir eventuell Gleichgewichtspunkte finden ($f(x) = 0$), und ob diese Gleichgewichtspunkte stabil oder instabil sind. Des Weiteren können wir eventuell periodische Lösungen finden und entscheiden, ob diese periodischen Lösungen stabil oder instabil sind.

Beispiel 1.10 (Lotka-Volterra, Räuber-Beute-Modell). Betrachten wir zwei Populationen (Räuber- und Beutepopulation). Seien $x(t)$ und $y(t)$ die jeweiligen Anzahlen der Individuen zum Zeitpunkt t. Wir nehmen an, daß die Population x von der Population y abhängt (etwa: die Räuber sind zum Überleben abhängig vom Vorhandensein von Beute), nicht aber umgekehrt. Das folgende einfache Modell wurde von Lotka[2] und Volterra[3] vorgeschlagen:

$$\begin{cases} x'(t) = -\alpha x(t) + \beta x(t)y(t), \\ y'(t) = \gamma y(t) - \delta x(t)y(t). \end{cases}$$

Hier sind α, β, γ und δ positive Konstanten.

Für die Wahl $\alpha = 1.5$, $\beta = 0.5$, $\gamma = 1$ und $\delta = 1.5$ erhält man folgendes Vektorfeld.

Beispiel 1.11 (Lotka-Volterra, Konkurrenzmodell). Wie im vorangegangen Beispiel betrachten wir zwei Populationen. Wie zuvor seien $x(t)$ und $y(t)$ die jeweiligen Anzahlen der Individuen zum Zeitpunkt t. In diesem Beispiel betrachten wir zwei konkurrierende Populationen (etwa: konkurrierend um dieselbe Beute). Ein einfaches Modell ist in diesem Fall die Differentialgleichung

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) - bx(t)y(t) - cx(t)^2, \\ y'(t) = \alpha y(t) - \beta x(t)y(t) - \gamma y(t)^2, \end{cases}$$

wobei a, b, c, α, β und γ positive Konstanten sind.

Für die Wahl $a = 0.8$, $b = 0.5$, $c = 0.7$, $\alpha = 1$, $\beta = 0.4$ und $\gamma = 1.1$ erhält man folgendes Vektorfeld.

---

[2] Lotka ()

[3] Vito Volterra (3.5.1860-11.10.1940)

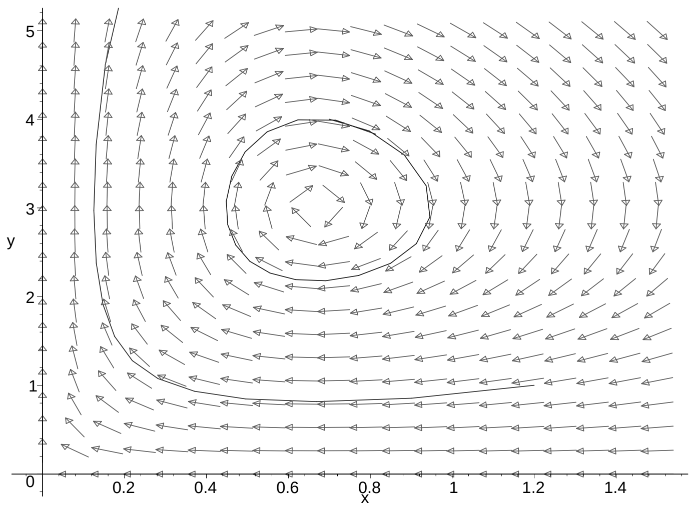

Fig. 1.2 Erstes Räuber-Beute-Modell von Lotka-Volterra

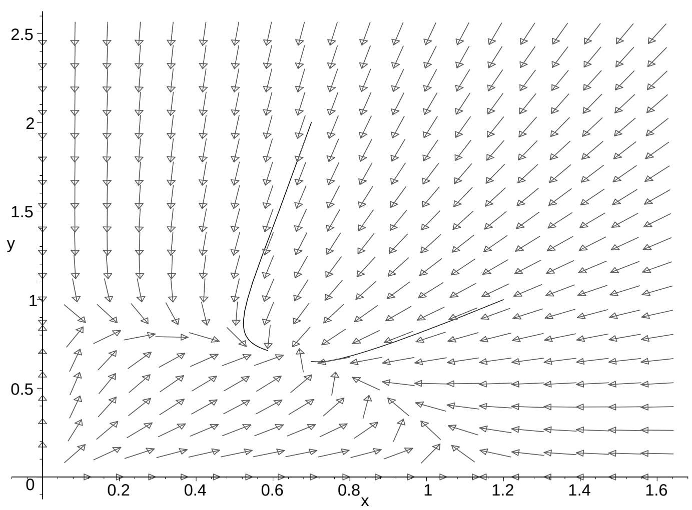

Fig. 1.3 Erstes Kokurrenzmodell von Lotka-Volterra

Kapitel 2
Die Sätze von Peano und Picard-Lindelöf

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^{1+n}$ eine offene Menge, $f : D \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion $(t_0, x_0) \in D$. Wir betrachten die Differentialgleichung erster Ordnung

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Ziel dieses Kapitels ist es Existenz und, wenn möglich, auch Eindeutigkeit von Lösungen dieser Differentialgleichung zu zeigen und einige Folgerungen zu diskutieren.

2.1 Näherungslösungen und das Theorem von Peano

Wir beginnen mit der Existenz von lokalen Lösungen. Eine stetige Funktion $x : I_0 \to \mathbb{R}^n$ heißt **ε-Näherungslösung** der Differentialgleichung (2.1) falls sie stückweise stetig differenzierbar ist, in jedem Punkt rechtsseitig differenzierbar, falls $x(t_0) = x_0$ und falls

$$\sup_{t \in I_0} \|x'(t+) - f(t, x(t))\| \leq \varepsilon.$$

Lemma 2.1. *Unter der Bedingung, daß f stetig ist, existiert eine Intervallumgebung $I_0 \subseteq \mathbb{R}$ von t_0, so daß die Differentialgleichung* (2.1) *für jedes $\varepsilon > 0$ eine ε-Näherungslösung auf I_0 besitzt.*

Beweis. Da D offen ist, findet man $\alpha > 0$ und $r > 0$, so daß

$$D' := [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times \bar{B}(x_0, r) \subseteq D.$$

Da f stetig und D' kompakt ist, existiert ein $M \geq 1$, so daß

$$\|f(t,x)\| \leq M \text{ für alle } (t,x) \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times \bar{B}(x_0, r).$$

Indem man α eventuell kleiner wählt, kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $\alpha \le \frac{r}{M}$, und dann setzt man $I_0 := [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.

Sei $\varepsilon > 0$. Da f stetig auf der kompakten Menge D' ist, ist f auf D' gleichmäßig stetig. Es existiert also ein $\delta > 0$ derart, daß für alle (t_1, x_1), $(t_2, x_2) \in D'$

$$\|(t_1,x_1) - (t_2,x_2)\| \le \delta \quad \Rightarrow \quad \|f(t_1,x_1) - f(t_2,x_2)\| \le \varepsilon.$$

Man wählt nun eine Partition $(\tau_i)_{0 \le i \le m}$ mit $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_m = t_0 + \alpha$ und

$$\sup_i (\tau_{i+1} - \tau_i) \le \frac{\delta}{\sqrt{2}M}.$$

Sodann definieren wir

$$\begin{aligned} x(\tau_0) &:= x_0 \text{ und} \\ x(\tau_{i+1}) &:= x(\tau_i) + (\tau_{i+1} - \tau_i) f(\tau_i, x(\tau_i)) \text{ falls } 0 \le i \le m-1 \text{ und} \\ x(t) &:= x(\tau_i) + (t - \tau_i) f(\tau_i, x(\tau_i)) \text{ falls } t \in [\tau_i, \tau_{i+1}). \end{aligned}$$

Dann ist die Funktion $x : [t_0, t_0 + \alpha] \to \mathbb{R}^n$ stetig, stückweise stetig differenzierbar (sogar stückweise affin), und überall rechtsseitig links- und rechtsseitig differenzierbar. Darüberhinaus gilt aufgrund der Definition $x(t_0) = x_0$.

Wir zeigen durch Induktion, daß $\|x(t) - x_0\| \le r$ für alle $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$. Diese Abschätzung ist wahr für $t = t_0 = \tau_0$, weil $x(t_0) = x_0$. Wir nehmen nun an, daß die Abschätzung auf dem Intervall $[\tau_0, \tau_i]$ für ein $i \in \{0, \ldots, m-1\}$ gilt. Dann gilt für alle $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$

$$\begin{aligned} \|x(t) - x_0\| &\le \int_{t_0}^{t} \|x'(t)\|\, dt \\ &\le \sum_{j=0}^{i} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \|f(\tau_i, x(\tau_i))\|\, dt \\ &\le \alpha M \\ &\le r. \end{aligned}$$

Also ist $\|x(t) - x_0\| \le r$ für alle $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$.

Für alle $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ gilt zum einen

$$|t - \tau_i| \le \frac{\delta}{\sqrt{2}M} \le \frac{\delta}{\sqrt{2}} \quad (\text{car } M \ge 1)$$

und zum anderen

$$\begin{aligned}\|x(t)-x(\tau_i)\| &= \|\int_{\tau_i}^{t} x'(s)\,ds\| \\ &= \|\int_{\tau_i}^{t} f(\tau_i,x(\tau_i))\,ds\| \\ &\le \frac{\delta}{\sqrt{2}M}M = \frac{\delta}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Daraus folgt für alle $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$

$$\|(t,x(t))-(\tau_i,x(\tau_i))\| \le \delta$$

und somit

$$\|x'(t)-f(t,x(t))\| = \|f(\tau_i,x(\tau_i))-f(t,x(t))\| \le \varepsilon.$$

für alle $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ und alle $0 \le i \le m-1$. Also ist x eine ε-Näherungslösung auf dem Intervall $[t_0, t_0+\alpha]$. Analog konstruiert man eine ε-Näherungslösung auf dem Intervall $[t_0-\alpha, t_0]$. Damit haben wir die Existenz einer ε-Näherungslösung auf I_0 gezeigt.

Bemerkung 2.2. Die ε-Näherungslösungen, die wir im obigen Lemma konstruiert haben, indem wir in der Differentialgleichung die Ableitung $x'(t)$ durch den Differenzenquotienten $(x(\tau_{i+1})-x(\tau_i))/(\tau_{i+1}-\tau_i))$ ersetzt haben, gehören zu den einfachsten ε-Näherungslösungen in der numerischen Analysis von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Das verwendete Verfahren heißt explizites Eulerschema. Falls f stetig differenzierbar ist, dann kann man den Fehler ε in Abhängigkeit von der Feinheit der Partition des Intervalls $[t_0, t_0+\alpha]$ / Anzahl m der Punkte der Partition abschätzen.

Theorem 2.3 (Peano). *Unter der Annahme, daß die Funktion $f : D \to \mathbb{R}^n$ stetig ist, besitzt das Anfangswertproblem* (2.1) *eine lokale Lösung, d. h. es existiert eine auf einer Intervallumgebung $I_0 \subseteq \mathbb{R}$ von t_0 definierte Lösung $x : I_0 \to \mathbb{R}^n$ von* (2.1).

Beweis. Sei I_0 das Intervall aus Lemma 2.1, und sei $(x_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ eine Familie von ε-Näherungslösungen, so daß $\sup_{t\in I_0} \|x_\varepsilon(t)-x_0\| \le r$ und $\sup_{t\in I_0} \|f(t,x_\varepsilon(t))\| \le M$ für Konstanten $r>0$, $M \ge 1$ und für alle $\varepsilon > 0$. Eine solche Familie existiert dank dem Lemma 2.1 und seinem Beweis.

Für alle $\varepsilon > 0$ und alle t, $s \in I_0$ gilt

$$\begin{aligned}\|x_\varepsilon(t)-x_\varepsilon(s)\| &\le \left|\int_s^t \|x_\varepsilon'(r)\|\,dr\right| \\ &\le \left|\int_s^t (\|f(r,x_\varepsilon(r))\|+\varepsilon)\,dr\right| \\ &\le (M+\varepsilon)|t-s|.\end{aligned}$$

Also sind alle Näherungslösungen x_ε Lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante $M+\varepsilon$.

Sei (ε_n) eine Nullfolge. Wir nehmen an, daß $0 < \varepsilon_n \le 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Um die Notation zu vereinfachen, schreiben wir x_n anstelle von x_{ε_n}.

Sei $(t_j) \subseteq I_0$, so daß $\{t_j : j\} = I_0 \cap \mathbb{Q}$ (wir verwenden, daß $\mathbb{Q}$ abzählbar ist). Wir zeigen mit dem Cantorschen Diagonalfolgenverfahren zuerst, daß die Folge (x_n) eine auf $I_0 \cap \mathbb{Q}$ punktweise konvergente Teilfolge besitzt.

Nachdem die Folge $(x_n(t_1))$ in $\mathbb{R}$ beschränkt ist, gibt es eine Teilfolge $(x_{\varphi_1(n)})$, so daß $(x_{\varphi_1(n)}(t_1))$, die konvergiert. Nachdem die Folge $(x_{\varphi_1(n)}(t_2))$ in $\mathbb{R}$ beschränkt ist, gibt es eine Teilfolge $(x_{\varphi_2(n)})$ von $(x_{\varphi_1(n)})$, so daß $(x_{\varphi_2(n)}(t_2))$ konvergiert. Indem man immer weiter so Teilfolgen auswählt, gibt es eine Teilfolge $(x_{\varphi_{k+1}(n)})$ von $(x_{\varphi_k(n)})$, so daß $(x_{\varphi_{k+1}(n)}(t_j))$ für alle $1 \leq j \leq k+1$ konvergiert. Die Cantorsche Diagonalfolge $(x_{\varphi_n(n)})$ ist eine Teilfolge von (x_n) die punktweise in jedem Punkt t_j konvergiert. Sei $x(t_j) \in \mathbb{R}$ der Grenzwert. Um die Notation zu vereinfachen bezeichnen wir die Teilfolge wieder mit (x_n).

Wir zeigen als nächstes, daß die Folge (x_n) gleichmäßig auf I_0 gegen eine Funktion x konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt eine endliche Folge $(t_{j_l})_{l=1}^k \subseteq I_0 \cap \mathbb{Q}$, so daß

$$I_0 \subseteq \bigcup_{l=1}^{k} (t_{j_l} - \frac{\varepsilon}{2(M+1)}, t_{j_l} + \frac{\varepsilon}{2(M+1)}).$$

Für jedes $l \in \{1, \ldots, k\}$ ist die Folge $(x_n(t_{j_l}))$ konvergent, und da die Menge $\{t_{j_1}, \ldots, t_{j_k}\}$ endlich ist, ist die Folge (x_n) auf dieser Menge gleichmäßig konvergent. Es gibt also ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n, m \geq n_0$ und alle $l \in \{1, \ldots, k\}$

$$\|x_n(t_{j_l}) - x_m(t_{j_l})\| \leq \varepsilon.$$

Sei $t \in I_0$. Dann gibt es ein $l \in \{1, \ldots, k\}$, so daß $|t - t_{j_l}| \leq \frac{\varepsilon}{2(M+1)}$. Also gilt für alle $n, m \geq n_0$,

$$\begin{aligned} \|x_n(t) - x_m(t)\| &\leq \|x_n(t) - x_n(t_{j_l})\| + \\ &\quad + \|x_n(t_{j_l}) - x_m(t_{j_l})\| + \\ &\quad + \|x_m(t_{j_l}) - x_m(t)\| \\ &\leq 2(M+1)\,|t - t_{j_l}| + \varepsilon \\ &\leq 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Wir haben gezeigt, daß es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß für alle $n, m \geq n_0$

$$\sup_{t \in I_0} \|x_n(t) - x_m(t)\| \leq 3\varepsilon.$$

Die Folge (x_n) ist also eine Cauchyfolge in $C(I_0)$. Dieser Raum ist vollständig für die Supremumsnorm, und somit konvergiert (x_n) gleichmäßig gegen eine Funktion $x \in C(I_0)$.

Wir zeigen schließlich, daß x eine Lösung unseres Problems ist. Tatsächlich folgt aus der gleichmäßigen Konvergenz und aus der Stetigkeit von f

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{t \in I_0} \|f(t, x_n(t)) - f(t, x(t))\| = 0.$$

Da x_n eine ε_n-Näherungslösung ist, folgt nach Integration

$$\|x_n(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, x_n(s))\, ds\| \leq \varepsilon_n\, \alpha, \quad t \in I_0.$$

Hier gehen wir zum Grenzwert über, d. h.

$$\|x(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds\| = 0, \quad t \in I_0,$$

woraus wiederum folgt, daß

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds, \quad t \in I_0.$$

Insbesondere ist also $x(t_0) = x_0$. Da die Funktion $s \to f(s, x(s))$ stetig ist, ist die Funktion x schließlich stetig differenzierbar, und aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \in I_0.$$

Also ist die Funktion x eine Lösung von (2.1).

Bemerkung 2.4. Der obige Beweis zeigt, daß jede Folge (x_{ε_n}) von ε_n-Näherungslösungen (wobei (ε_n) eine Nullfolge ist) eine Teilfolge besitzt, die lokal gleichmäßig gegen eine Lösung des Anfangswertproblems (2.1) konvergiert. Dies ergibt Existenz von Lösungen, aber nicht unbedingt Eindeutigkeit. Tatsächlich kann man im Allgemeinen keine Eindeutigkeit erwarten kann. Ein Beispiel ist das Anfangswertproblem

$$x'(t) = 2\sqrt{|x(t)|}, \quad x(0) = 0.$$

Die Funktionen $x(t) \equiv 0$ und $x(t) = t^2 \operatorname{sgn} t$ sind beide Lösungen dieses Anfangswertproblems. Die Funktion $f(x) = 2\sqrt{|x|}$ ist stetig. Das Anfangswertproblem enthält eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen. Warum widerspricht dieses Beispiel nicht dem Satz 1.8?

2.2 Das Theorem von Picard-Lindelöf

In diesem Abschnitt untersuchen wir Eindeutigkeit von lokalen Lösungen. Aufgrund des Beispiels in Bemerkung 2.4 reicht die Stetigkeit der Funktion f im Allgemeinen nicht aus, um Eindeutigkeit zu garantieren. Wir sehen im folgenden Theorem von Picard-Lindelöf, daß die lokale Lipschitzstetigkeit von f bezüglich der zweiten Variablen Eindeutigkeit garantiert.

Für den Beweis benötigen wir das Lemma von Gronwall[1].

[1] Gronwall ()

Lemma 2.5 (Gronwall). *Sei $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $\varphi : I \to \mathbb{R}_+$ eine stetige Funktion und seien C, $\varepsilon \geq 0$. Wir nehmen an, daß*

$$\varphi(t) \leq C + \int_a^t (L\varphi(s) + \varepsilon)\, ds \quad \textit{für alle } t \in I.$$

Dann ist

$$\varphi(t) \leq Ce^{L(t-a)} + \frac{\varepsilon}{L}(e^{L(t-a)} - 1) \quad \textit{für alle } t \in I.$$

Beweis. Setze

$$\psi(t) := C + \int_a^t (L\varphi(s) + \varepsilon)\, ds \quad (t \in I).$$

Weil die Funktion φ stetig ist, ist die Funktion ψ stetig differenzierbar. Nach Voraussetzung ist für alle $t \in I$

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= L\varphi(t) + \varepsilon \\ &\leq L\psi(t) + \varepsilon, \end{aligned}$$

bzw.

$$\frac{d}{dt}(\psi(t) + \frac{\varepsilon}{L}) \leq L\,(\psi(t) + \frac{\varepsilon}{L}).$$

Indem man ähnlich wie in der Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen beide Seiten dieser Ungleichung durch $\psi(t) + \frac{\varepsilon}{L}$ teilt, das Ergebnis auf beiden Seiten über dem Intervall $[a,t]$ integriert, und auf der linken Seite die Substitutionsregel anwendet, erhält man für alle $t \in I$

$$\psi(t) + \frac{\varepsilon}{L} \leq (C + \frac{\varepsilon}{L})e^{L(t-a)}.$$

Indem man noch einmal die Voraussetzung $\varphi(t) \leq \psi(t)$ anwendet, erhält man daraus die Aussage des Lemmas.

Theorem 2.6 (Picard-Lindelöf). *Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}^n$ sei stetig und in einer Umgebung des Punktes $(t_0,x_0) \in D$ lokal Lipschitzstetig bezüglich der zweiten Variablen, d. h. es gibt eine Umgebung $U \subseteq D$ von (t_0,x_0) und eine Konstante $L \geq 0$, so daß für alle (t,x_1), $(t,x_2) \in U$*

$$\|f(t,x_1) - f(t,x_2)\|_2 \leq L\,\|x_1 - x_2\|_2.$$

Dann besitzt das Anfangswertproblem (2.1) *eine lokal eindeutige Lösung, d. h. es gibt eine Intervallumgebung $I_0 \subseteq \mathbb{R}$ von t_0 und eine Lösung $x : I_0 \to \mathbb{R}^n$ des Anfangswertproblems* (2.1)*, und wenn $z : I_1 \to \mathbb{R}^n$ eine weitere Lösung ist, dann gilt $x = z$ auf $I_0 \cap I_1$.*

Beweis. Nach dem Theorem von Peano (Theorem 2.3) besitzt das Anfangswertproblem (2.1) eine Lösung $x : I_0 \to \mathbb{R}^n$. Aufgrund der Stetigkeit von x, und indem man das Intervall I_0 möglicherweise verkleinert, können wir annehmen, daß

$$\{(t,x(t)) : t \in I_0\} \subseteq U,$$

wobei hier U eine Umgebung von (t_0,x_0) ist, auf der f Lipschitzstetig (mit Konstante $L \geq 0$) bezüglich der zweiten Variablen ist.

Sei $z : I_1 \to \mathbb{R}^n$ eine zweite Lösung des Anfangswertproblems (2.1). Für alle $t \in I_0 \cap I_1$ setzen wir $\varphi(t) := \|x(t) - z(t)\|$. Aufgrund der Stetigkeit von z ist die Menge $\{t \in I_0 \cap I_1 : (t, z(t)) \in U\}$ eine Umgebung von t_0. Für t in dieser Umgebung und $t \geq t_0$ gilt nach Voraussetzung an f,

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \|x(t) - z(t)\| \\
&= \|\int_{t_0}^{t} (x'(s) - z'(s))\, ds\| \\
&= \|\int_{t_0}^{t} (f(s,x(s)) - f(s,z(s)))\, ds\| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} \|f(s,x(s)) - f(s,z(s))\|\, ds \\
&\leq L \int_{t_0}^{t} \|x(s) - z(s)\|\, ds \\
&= L \int_{t_0}^{t} \varphi(s)\, ds.
\end{aligned}$$

Aus dem Lemma von Gronwall (Lemma 2.5) folgt

$$\varphi(t) = 0 \text{ und somit } x(t) = z(t)$$

für alle $t \in I_0 \cap I_1$, so daß $t \geq t_0$ und $(t, z(t)) = (t, x(t)) \in U$. Daraus folgt $z(t) = x(t)$ für alle $t \in I_0 \cap I_1$, $t \geq t_0$. Die Gleichheit $z(t) = x(t)$ für $t \in I_0 \cap I_1$ mit $t \leq t_0$ zeigt man ähnlich. Wir haben also $z = x$ auf $I_0 \cap I_1$ gezeigt.

Jede stetig differenzierbare Funktion f ist lokal Lipschitzstetig, und damit auch lokal Lipschitzstetig bezüglich der zweiten Variablen.

Lemma 2.7. *Sei $f : D \to \mathbb{R}^n$ in einer offenen Umgebung von $(t_0,x_0) \in D$ stetig differenzierbar. Dann ist f in einer Umgebung von (t_0,x_0) lokal Lipschitzstetig bezüglich der zweiten Variablen. Insbesondere besitzt das Anfangswertproblem* (2.1) *eine lokal eindeutige Lösung.*

Beweis. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß f stetig differenzierbar in einer Umgebung der Form $I_0 \times B(x_0, r)$ ist. Aus der Stetigkeit von f' und aus dem Theorem von Weierstraß (eventuell man die Umgebung noch einmal verkleinern, wenn nötig) folgt, daß es ein $L \geq 0$ gibt, so daß

$$\|f'(t,x)\| \leq L \text{ für alle } (t,x) \in I_0 \times B(x_0, r).$$

Seien (t, x_1), $(t, x_2) \in I_0 \times B(x_0, r)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\|f(t,x_2)-f(t,x_1)\| &= \|\int_0^1 \frac{d}{ds} f(t,x_1+s(x_2-x_1))\,ds\| \\ &\le \int_0^1 \|f'(t,x_1+s(x_2-x_1))\,(x_2-x_1)\|\,ds \\ &\le \int_0^1 L\,\|x_2-x_1\|\,ds \\ &= L\,\|x_2-x_1\|.\end{aligned}$$

Also ist die Funktion f in einer Umgebung von (t_0,x_0) lokal Lipschitzstetig bezüglich der zweiten Variablen. Die lokale Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung des Anfangswertproblems (2.1) folgt aus dem Theorem von Picard-Lindelöf (Theorem 2.6).

2.3 Maximale Lösungen

Definition 2.8. Eine Lösung $x_{max} : I_{max} \to \mathbb{R}^n$ ($I_{max} \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall) der Differentialgleichung (2.1) heißt *maximale Lösung*, falls sie keine Fortsetzung zu einer Lösung auf einem echt größeren Intervall besitzt, d. h. wenn für jede andere Lösung $x : I \to \mathbb{R}^n$ der Differentialgleichung (2.1) mit $I_{max} \subseteq I$ und $x|_{I_max} = x_{max}$ schon $I_{max} = I$ gilt. Das Intervall I_{max} heißt dann *maximales Existenzintervall*.

Lemma 2.9. *Sei $f : D \to \mathbb{R}^n$ stetig ($D \subseteq \mathbb{R}^{1+n}$ offen). Dann besitzt das Anfangswertproblem* (2.1) *für jedes* $(t_0,x_0) \in D$ *eine maximale Lösung. Jedes maximale Existenzintervall ist offen.*

Beweis. Die Existenz einer maximalen Lösung ist eine Konsequenz aus dem Lemma von Zorn angewandt auf die Menge

$$\begin{aligned}M := \{(x,I) | I \subseteq \mathbb{R} \text{ Intervallumgebung von } t_0 \text{ und} \\ x : I \to \mathbb{R}^n \text{ Lösung von (2.1)}\}\end{aligned}$$

zusammen mit der Halbordnung

$$(x,I) \le (\tilde{x},\tilde{I}) :\Leftrightarrow I \subseteq \tilde{I} \text{ und } \tilde{x}|_I = x.$$

Die Menge M ist nichtleer dank dem Theorem von Peano.

Angenommen, das Existenzintervall einer maximalen Lösung wäre nicht offen. Dann ist I_{max} von der Form $(\alpha,\beta]$ mit $-\infty \le \alpha < \beta < \infty$, $[\alpha,\beta)$ mit $-\infty < \alpha < \beta \le \infty$, oder $[\alpha,\beta]$ mit $-\infty < \alpha < \beta < \infty$. Nehmen wir den ersten Fall an. In diesem Fall ist $(\beta, x_{max}(\beta)) \in D$. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$x'(t) = f(t,x(t)), \quad x(\beta) = x_{max}(\beta).$$

Dieses Anfangswertproblem besitzt eine lokale Lösung $x : I_0 \to \mathbb{R}^n$, wobei I_0 eine Intervallumgebung von β ist (Theorem von Peano). Wir definieren nun $z(t) = x_{max}(t)$

für $t \in I_{max}$ und $z(t) = x(t)$ für $t \geq \beta$, $t \in I_0$. Dann ist z eine Lösung des Anfangswertproblems (2.1), die auf einem Intervall definiert ist, welches echt größer als I_{max} ist. Das ist ein Widerspruch dazu, daß x_{max} eine maximale Lösung ist, und somit ist I_{max} nicht von der Form $(\alpha, \beta]$. Die anderen Fälle sind aus ähnlichen Gründen nicht möglich, und somit ist I_{max} offen.

Theorem 2.10. *Sei $f : D \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar ($D \subseteq \mathbb{R}^{1+n}$ offen). Dann besitzt das Anfangswertproblem* (2.1) *für jedes $(t_0, x_0) \in D$ genau eine maximale Lösung.*

Beweis. Seien $x_1 : I_1 \to \mathbb{R}^n$ und $x_2 : I_2 \to \mathbb{R}^n$ zwei maximale Lösungen des Anfangswertproblems (2.1). Aufgrund der Stetigkeit beider Lösungen ist die Menge

$$A := \{t \in I_1 \cap I_2 | x_1(t) = x_2(t)\}$$

abgeschlossen in $I_1 \cap I_2$. Außerdem ist A nichtleer ($t_0 \in A$). Aufgrund des Theorems von Picard-Lindelöf (Theorem 2.6) ist A außerdem offen in $I_1 \cap I_2$. Also ist $A = I_1 \cap I_2$ (!!), d. h. $x_1 = x_2$ auf $I_1 \cap I_2$. Setzt man $z(t) := x_1(t)$ für $t \in I_1$ und $z(t) = x_2(t)$ für $t \in I_2$, dann ist z wohldefiniert und eine Lösung des Anfangswertproblems (2.1) auf $I_1 \cup I_2$. Da x_1 und x_2 maximale Lösungen sind, folgt daraus $I_1 = I_2$.

Bemerkung 2.11. Für den Beweis des vorigen Lemmas reicht es natürlich, daß die Funktion f in jedem Punkt $(t_0, x_0) \in D$ lokal Lipschitzstetig bezüglich der zweiten Variable ist (siehe die Anwendung des Theorems von Picard-Lindelöf).

Lemma 2.12. *Sei $f : D \to \mathbb{R}^n$ stetig ($D \subseteq \mathbb{R}^{1+n}$ offen), und sei $x_{max} : I_{max} \to \mathbb{R}^n$ eine maximale Lösung des Anfangswertproblems* (2.1). *Sei $I_{max} =]\alpha, \beta[$ pour $-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty$. Dann existieren für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq D$ zwei Zeiten s_K, $t_K \in]\alpha, \beta[$ mit $s_K < t_K$, so daß $(t, x_{max}(t)) \notin K$ für alle $t \in]\alpha, s_K] \cup [t_K, \beta[$. Mit anderen Worten: der Graph jeder maximalen Lösung verläßt* schließlich *jede kompakte Teilmenge von D.*

Beweis. Sei $K \subseteq D$ kompakt. Wir beweisen nur die Existenz einer Zeit $t_K \in]\alpha, \beta[$, so daß $(t, x_{max}(t)) \notin K$ für alle $t \in [t_K, \beta[$. Falls $\beta = +\infty$, dann folgt die Existenz eines solchen t_K aus der Beschränktheit von K und aus der Unbeschränktheit der ersten Komponente der Funktion $t \mapsto (t, x_{max}(t))$. Nehmen wir also an, daß $\beta < +\infty$. Angenommen, ein solches t_K existiert nicht. Dann gibt es eine Folge $(t_n) \nearrow \beta$, so daß $(t_n, x_{max}(t_n)) \in K$ für jedes n.

Da K kompakt und D offen ist, so existiert ein $\delta > 0$, so daß

$$K_\delta := \{(t,x) \in \mathbb{R}^{1+n} : \operatorname{dist}((t,x), K) \leq \delta\} \subseteq D.$$

Man bemerke, daß die Menge K_δ ebenfalls kompakt ist. Aus der Stetigkeit von f und aus dem Satz von Weierstraß folgt die Beschränktheit der Funktion f auf K_δ, d. h. $\sup_{(t,x) \in K_\delta} \|f(t,x)\| =: M < \infty$.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$\tau_n := \sup\{t \geq t_n : t < \beta \text{ und } (s, x_{max}(s)) \in K_\delta \text{ für alle } s \in [t_n, t]\} \leq \beta.$$

Wegen $(t_n, x(t_n)) \in K$, wegen $\delta > 0$ und wegen Stetigkeit der maximalen Lösung x_{max}, gilt $\tau_n > t_n$, und weil β endlich ist, ist auch τ_n endlich. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und für jedes $t_n \leq s < t < \tau_n$ gilt

$$\begin{aligned} \|x_{max}(t) - x_{max}(s)\| &\leq \int_s^t \|x'_{max}(r)\| \, dr \\ &= \int_s^t \|f(r, x_{max}(r))\| \, dr \\ &\leq M(t-s), \end{aligned}$$

d. h. die maximale Lösung x_{max} ist auf jedem Intervall $[t_n, \tau_n[$ Lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante M. Insbesondere ist x_{max} auf das Intervall $[t_n, \tau_n]$ stetig fortsetzbar. Wir können oben also $s = t_n$ und $t \in [t_n, \tau_n]$ wählen. Dann gilt für alle n,

$$\begin{aligned} \|x_{max}(t) - x_{max}(t_n)\| &\leq M(t - t_n) \\ &\leq M(\beta - t_n). \end{aligned}$$

Insbesondere ist für alle n groß genug

$$\|(t, x_{max}(t)) - (t_n, x_{max}(t_n))\| \leq \delta/2,$$

d. h. der Graph der Lösung x_{max} eingeschränkt auf das Intervall $[t_n, \tau_n]$ verläßt die Menge K_δ nicht. Aus der Definition von τ_n folgt damit $\tau_n = \beta$ für alle n groß genug.

Wie im Beweis von Lemma 2.9 können wir nun mit dem Theorem von Peano die Lösung x_{max} auf ein echt größeres Intervall als $]\alpha, \beta]$ fortsetzen, ein Widerspruch dazu, daß x_{max} eine maximale Lösung ist. Die Widerspruchsannahme war also falsch, und die Existenz eines t_K ist gezeigt. Die Existenz eines s_K folgt analog.

Korollar 2.13. *Unter den Voraussetzungen des Lemmas 2.12 gilt:*

(a) *Entweder ist $\beta = \infty$ (globale Existenz einer Lösung für $t \geq t_0$), oder es ist $\beta < \infty$. Falls $\beta < \infty$, dann gilt entweder $\lim_{t\to\beta-} \|x(t)\|_2 = \infty$ (blow-up in endlicher Zeit) oder $\lim_{t\to\beta-} \operatorname{dist}((t, x(t)), \partial D) = 0$.*

(b) *Entweder ist $\alpha = -\infty$ (globale Existenz einer Lösung für $t \leq t_0$), oder $\alpha > -\infty$. Falls $\alpha > -\infty$, dann gilt entweder $\lim_{t\to\alpha+} \|x(t)\|_2 = \infty$ (blow-up in endlicher Zeit) oder $\lim_{t\to\alpha+} \operatorname{dist}((t, x(t)), \partial D) = 0$.*

Beweis. Folgt direkt aus Lemma 2.12.

Bemerkung 2.14. In vielen Anwendungsbeispielen ist die Funktion f stetig auf $D = \mathbb{R}^{1+n}$. In diesem Fall ist $\partial D = \emptyset$, und man hat nur zwei Möglichkeiten für maximale Lösungen in der Nähe von β: entweder hat man globale Existenz einer Lösung für $t \geq t_0$ ($\beta = \infty$), oder eine maximale Lösung bläht in endlicher Zeit auf ($\beta < \infty$ und $\lim_{t\to\beta} \|x(t)\|_2 = \infty$). Ähnliches gilt in der Nähe von α.

Korollar 2.15. *Sei $f : \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar (oder stetig und in jedem Punkt von $\mathbb{R}^{1+n}$ lokal Lipschitzstetig bezüglich der zweiten Variable). Sei f außerdem beschränkt, d. h.*

$$\sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^{1+n}} \|f(t,x)\| =: M < \infty.$$

Dann ist für jedes $(t_0,x_0) \in \mathbb{R}^{1+n}$ *die eindeutige maximale Lösung des Anfangswertproblems* (2.1) *eine globale Lösung, d. h. sie existiert auf ganz* $\mathbb{R}$.

Beweis. Wie im Beweis von Lemma 2.12 zeigt man, daß jede (maximale) Lösung des Anfangswertproblems Lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante M ist. Die Lipschitzstetigkeit schließt es aus, daß eine maximale Lösung in endlicher Zeit aufbläht. Also ist jede maximale Lösung eine globale Lösung.

2.4 Stetige Abhängigkeit von den Daten

In diesem Abschnitt betrachten wir sowohl das Problem (2.1) *und* das folgende Problem

$$\begin{cases} z'(t) = g(t,z(t)), \\ z(t_0) = z_0, \end{cases} \tag{2.2}$$

in dem $g : D \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion ist ($D \subseteq \mathbb{R}^{1+n}$ offen).

Wir stellen hier die Frage nach der stetigen Abhängigkeit der Lösungen von den Daten: wenn die Anfangsbedingungen (t_0,x_0) und (t_0,z_0) nahe beieinander liegen, und wenn auch die Funktionen f und g nahe beieinander liegen, liegen dann auch die Lösungen x und z der Probleme (2.1) und (2.2) nahe beieinander, und kann man die Abhängigkeit irgendwie quantifizieren? Unter der Bedingung, daß wenigstems die Funktion f (global) Lipschitzstetig ist, kann man den Abstand zwischen x und z bezüglich der Supremumsnorm abschätzen.

Theorem 2.16. *Seien* x, $z : I \to \mathbb{R}^n$ *Lösungen der Anfangswertprobleme* (2.1) *bzw.* (2.2)*. Wir nehmen an, daß es eine Kugel* $B \subseteq \mathbb{R}^n$ *gibt, so daß* $I \times B \subseteq D$ *und* $(t,x(t))$, $(t,z(t)) \in I \times B$ *für alle* $t \in I$*. Wir nehmen zudem an, daß die Funktion* f *auf* $I \times B$ *Lipschitzstetig bezüglich der zweiten Variablen ist, mit einer Lipschitzkonstante* $L \geq 0$*. Sei* $\varepsilon := \sup_{(t,w)\in I\times B} \|f(t,w) - g(t,w)\|_2 < \infty$*. Dann gilt für alle* $t \in I$

$$\|x(t) - z(t)\|_2 \leq e^{L|t-t_0|} \|x_0 - z_0\|_2 + \frac{\varepsilon}{L} (e^{L|t-t_0|} - 1).$$

Beweis. Die Aussage folgt aus dem Lemma von Gronwall. Unter den Voraussetzungen des Theorems gilt für alle $t \in I$

$$\begin{aligned} x(t) - z(t) &= x_0 - z_0 + \int_{t_0}^t (f(s,x(s)) - g(s,z(s)))\, ds \\ &= x_0 - z_0 + \int_{t_0}^t (f(s,x(s)) - f(s,z(s)))\, ds + \\ &\quad + \int_{t_0}^t (f(s,z(s)) - g(s,z(s)))\, ds. \end{aligned}$$

Aus der Dreiecksungleichung und der Lipschitzstetigkeit von f folgt für alle $t \in I$

$$\|x(t) - z(t)\|_2 \leq \|x_0 - z_0\|_2 + \left| \int_{t_0}^{t} (L\|x(s) - z(s)\|_2 + \varepsilon) \ ds \right|.$$

Aus dem Lemma von Gronwall (Lemma 2.5) angewandt auf die Funktion $\varphi = \|x - z\|_2$.

2.5 Differentialgleichungen höherer Ordnung

Wir betrachten nun die Differentialgleichung m-ter Ordnung:

$$\begin{cases} x^{(m)}(t) = f(t, x(t), x'(t), ..., x^{(m-1)}(t)), \\ x(t_0) = x_0, \\ \vdots \\ x^{(m-1)}(t_0) = x_{m-1}. \end{cases} \tag{2.3}$$

Hier ist $f : D \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion auf einer offenen Menge $D \subseteq \mathbb{R}^{1+mn}$ und $(t_0, x_0, \ldots, x_{m-1}) \in D$. Die Unbekannte ist eine Funktion $x : I \to \mathbb{R}^n$.

Wir zeigen, daß die Differentialgleichung m-ter Ordnung in einem gewissen Sinne äquivalent zu einer Differentialgleichung erster Ordnung (im höherdimensionalen Raum $\mathbb{R}^{mn}$ ist (Lemma 2.17). Viele Resultate aus diesem Kapitel lassen sich damit direkt auf die Differentialgleichung m-ter Ordnung anwenden. So gilt zum Beispiel für die Differentialgleichung m-ter Ordnung die Existenz lokaler Lösungen und die Existenz maximaler Lösungen unter der Voraussetzung, daß die Funktion f stetig ist. Falls f zusätzlich lokal Lipschitzstetig bezüglich der zweiten Variable ist, dann hat man sogar lokale Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen. Eine maximale, nicht globale Lösung muß allerdings nicht zwingend aufblasen; allerdings bläst mindestens eine der Ableitungen bis zur Ordnung $m-1$ auf, wie man auch aus dem folgenden Lemma ablesen kann.

Lemma 2.17. *Sei $f : D \to \mathbb{R}^n$ stetig ($D \subseteq \mathbb{R}^{1+mn}$ offen). Definiere die Funktion $g : D \to \mathbb{R}^{mn}$ durch*

$$g(t, \eta_0, \ldots, \eta_{m-1}) := (\eta_1, \ldots, \eta_{m-1}, f(t, \eta_0, \ldots, \eta_{m-1})),$$

und betrachte die Differentialgleichung erster Ordnung (in $\mathbb{R}^{mn}$)

$$\begin{cases} u'(t) = g(t, u(t)), \\ u(t_0) = (x_0, \ldots, x_{m-1}). \end{cases} \tag{2.4}$$

Ist dann $u : I \to \mathbb{R}^{mn}$, $u = (u_0, \ldots, u_{m-1})$ *eine Lösung der Differentialgleichung erster Ordnung* (2.4)*, dann ist die erste Komponente* $x := u_0 : I \to \mathbb{R}^n$ *eine Lösung der Differentialgleichung m-ter Ordnung* (2.3)*.*

Ist umgekehrt $x : I \to \mathbb{R}^n$ *eine Lösung der Differentialgleichung m-ter Ordnung* (2.3)*, dann ist die Funktion* $u := (x, x', \ldots, x^{(m-1)}) : I \to \mathbb{R}^{mn}$ *eine Lösung der Differentialgleichung erster Ordnung* (2.4)*.*

Beweis. Nachrechnen.

Korollar 2.18. *Ist die Funktion* $f : D \to \mathbb{R}^n$ *stetig (*$D \subseteq \mathbb{R}^{1+mn}$ *offen), dann besitzt die Differentialgleichung m-ter Ordnung* (2.3) *für jede Anfangsbedingung* $(t_0, x_0, \ldots, x_{m-1}) \in D$ *eine lokale Lösung, und damit auch eine maximale Lösung.*

Beweis. Es genügt festzustellen, daß die Funktion g aus dem Lemma 2.17 genau dann stetig ist, wenn die Funktion f stetig ist, um dann das Theorem von Peano (Theorem 2.3) und das Lemma 2.17 zu bemühen.

Korollar 2.19. *Ist die Funktion* $f : D \to \mathbb{R}^n$ *stetig und in* $(t_0, x_0, \ldots, x_{m-1}) \in D$ *lokal Lipschitzstetig bezüglich der zweiten Variable, d. h. es gibt eine Umgebung* $U \subseteq D$ *von* $(t_0, x_0, \ldots, x_{m-1})$ *und eine Konstante* $L \geq 0$*, so daß für alle* (t, u_1)*,* $(t, u_2) \in U$

$$\|f(t, u_1) - f(t, u_2)\| \leq L \|u_1 - u_2\|,$$

dann besitzt die Differentialgleichung m-ter Ordnung (2.3) *eine lokal eindeutige Lösung.*

Beweis. Es genügt gegenüber dem vorigen Korollar noch festzustellen, daß die Funktion g aus dem Lemma 2.17 genau dann bezüglich der zweiten Variablen lokal Lipschitzstetig ist, wenn die Funktion f es ist, um dann das Theorem von Picard-Lindelöf (Theorem 2.6) und das Lemma 2.17 zu bemühen.

Kapitel 3
Lineare Differentialgleichungen

3.1 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

Seien $A : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ und $b : I \to \mathbb{R}^n$ stetig auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Wir betrachten die lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + b(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{3.1}$$

wobei $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$.

Theorem 3.1. *Die Differentialgleichung* (3.1) *besitzt für jedes* $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ *genau eine globale Lösung* $x : I \to \mathbb{R}^n$.

Beweis. Sei $D := I \times \mathbb{R}^n$. Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}^n$, $f(t,x) := A(t)x + b(t)$ ist stetig, und somit besitzt die Differentialgleichung (3.1) eine maximale Lösung $x : I_{max} \to \mathbb{R}^n$ (Lemma 2.9). Sei $J \subseteq I$ ein kompaktes Teilintervall, welches gleichzeitig eine Intervallumgebung von t_0 ist. Dann ist die Funktion A auf J beschränkt (Theorem von Weierstraß), d. h. es gibt eine Konstante $L \geq 0$, so daß $\|A(t)\| \leq L$ für alle $t \in J$; hier ist die Norm eine geeignete Matrixnorm. Also gilt für alle (t,x_1), $(t,x_2) \in J \times \mathbb{R}^n$,

$$\|f(t,x_1) - f(t,x_2)\| = \|A(t)(x_1 - x_2)\| \leq L\,\|x_1 - x_2\|,$$

d. h. die Funktion f ist auf $J \times \mathbb{R}^n$ bezüglich der zweiten Variable Lipschitzstetig. Da J eine beliebige kompakte Intervallumgebung von t_0 ist, ist die maximale Lösung damit eindeutig (Lemma 2.10).

Es bleibt also nur zu zeigen, daß $I_{max} = I$. Wir nehmen der Einfachheit halber an, daß I ein offenes Intervall ist (der Fall eines halboffenen oder abgeschlossenen Intervalls kann ähnlich diskutiert werden). Sei also $I =]\alpha, \beta[$ und $I_{max} =]\alpha_{max}, \beta_{max}[$. Aus den Eigenschaften von maximalen Lösungen folgt entweder $\beta_{max} = \infty$ oder $\beta_{max} < \infty$. Im ersten Fall ist notwendigerweise $\beta_{max} = \beta$. Falls $\beta_{max} < \infty$, dann gilt entweder $\lim_{t\to\beta_{max}-} \operatorname{dist}((t,x(t)), \partial D) = 0$ oder $\lim_{t\to\beta_{max}-} \|x(t)\| = \infty$. Aufgrund er speziellen Struktur von $D =]\alpha,\beta[\times\mathbb{R}^n$ folgt im ersten Fall wieder $\beta_{max} = \beta$. Wäre nun $\beta_{max} < \beta$, dann hätte man notwendigerweise $\lim_{t\to\beta_{max}-} \|x(t)\| = \infty$. Im Fall $\beta_{max} < \beta$ ist aber $J = [t_0, \beta_{max}]$ ein kompaktes Teilintervall von I (wenn auch keine Intervallumgebung von t_0). Sei $L := \sup_{t\in J} \|A(t)\|$ und $C := \sup_{t\in J} \|b(t)\|$. Dann gilt für alle $t \in [t_0, \beta_{max}[$

$$\begin{aligned}
\|x(t)\| &\leq \|x_0\| + \|x(t) - x_0\| \\
&\leq \|x_0\| + \int_{t_0}^{t} \|x'(s)\|\, ds \\
&= \|x_0\| + \int_{t_0}^{t} \|A(s)x(s) + b(s)\|\, ds \\
&\leq \|x_0\| + \int_{t_0}^{t} (L\|x(s)\| + C)\, ds \\
&\leq C' + L \int_{t_0}^{t} \|x(s)\|\, ds,
\end{aligned}$$

mit $C' := \|x_0\| + C(\beta_{max} - t_0)$. Aus dem Lemma von Gronwall folgt

$$\|x(t)\| \leq C'\, e^{L(t-t_0)} \text{ für alle } t \in [t_0, \beta_{max}[,$$

was ein Aufblähen der Lösung in der Nähe von $\beta_{max} < \beta$ ausschließt. Also muß $\beta_{max} = \beta$ gelten. Analog zeigt man $\alpha_{max} = \alpha$.

Lemma 3.2. *Seien $A : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ und $b : I \to \mathbb{R}^n$ stetig auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Die Menge aller Lösungen der linearen, homogenen Differentialgleichung*

$$x'(t) = A(t)x(t)$$

ist ein n-dimensionaler, linearer Unterraum von $C^1(I;\mathbb{R}^n)$. Die Menge aller Lösungen der linearen, inhomogenen Differentialgleichung

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$$

ist ein n-dimensionaler, affiner Unterraum von $C^1(I;\mathbb{R}^n)$. Ist x_p eine spezielle Lösung dieser inhomogenen Differentialgleichung, dann erhält man jede weitere Lösung dieser inhomogenen Differentialgleichung, indem man zu dieser speziellen Lösung eine Lösung der homogenen Gleichung addiert.

Beweis. Nachrechnen.

3.2 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Die Matrixexponentialfunktion

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix (wir identifizieren möglicherweise Matrizen mit linearen Abbildungen auf $\mathbb{R}^n$).

Wir betrachten die lineare, inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung mit konstantem Koeffizienten:

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + b(t), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Hier ist $b : I \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, $t_0 \in I$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Im Fall $n = 1$ handelt es sich bei der Gleichung (3.2) um die skalare, lineare Differentialgleichung, die wir schon gelöst haben (siehe Proposition 1.7). Wir zeigen hier, daß die Formel aus diesem Satz ein Analogon in höherer Dimension besitzt. Dafür definieren wir die Matrixexponentialfunktion.

Proposition 3.3 (Exponentialfunktion). *Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist die Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

absolut konvergent in $\mathbb{R}^{n\times n}$, und somit konvergent gegen eine Matrix, die wir mit e^A oder $\exp(A)$ *bezeichnen. Die Funktion* $\exp : A \mapsto \exp(A)$ *heißt* Matrixexponentialfunktion *oder einfach* Exponentialfunktion.

Beweis. Wir betrachten auf $\mathbb{R}^{n\times n}$ eine beliebige *Matrix*norm. Absolute Konvergenz einer Reihe ist bezüglich einer gegebenen Norm zu verstehen, aber auf $\mathbb{R}^{n\times n}$ sind je zwei Normen äquivalent, und somit wir die Norm frei wählen. Dann gilt für jedes $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} \le e^{\|A\|} < \infty.$$

Also ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ absolut konvergent. Da der Raum $\mathbb{R}^{n\times n}$ der Matrizen vollständig ist (jede Cauchyfolge konvergiert), ist die Reihe damit konvergent in $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Proposition 3.4 (Eigenschaften der Matrixexponentialfunktion). *Es gilt:*

(a) *Die Matrixexponentialfunktion* exp *ist beliebig oft differenzierbar.*

(b) *Für jedes $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $AB = BA$ ist*

$$e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A.$$

(c) *Für jedes $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist die Funktion $t \mapsto e^{tA}$ beliebig oft differenzierbar und*

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} = e^{tA}A.$$

Beweis. (a) Wir zeigen nur die Stetigkeit der Matrixexponentialfunktion. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Für jedes $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist

$$\begin{aligned}
\|e^{A+H} - e^{A}\| &= \| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A+H)^k}{k!} - \frac{A^k}{k!} \| \\
&\le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} \|A\|^{k-j} \|H\|^{j} \\
&\to 0 \quad H \to 0.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt die Stetigkeit der Matrixexponentialfunktion in A. Also ist exp stetig. Die Differenzierbarkeit der Matrixexponentialfunktion folgt aus einer ähnlichen Überlegung (Weierstraßsche Zerlegungsformel) und ist eine Übung, ebenso wie die Tatsache $\exp \in C^{\infty}$. (b) Seien A, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so daß $AB = BA$. Dann ist

$$\begin{aligned}
e^{A+B} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A+B)^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A^j B^{k-j} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=j}^{\infty} \frac{1}{j!(k-j)!} A^j B^{k-j} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!} \\
&= e^{A}\, e^{B}.
\end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung und aus der offensichtlichen Gleichung $e^{A+B} = e^{B+A}$ folgt (b).
(c) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, und seien $t, h \in \mathbb{R}$. Da die Matrizen tA und hA kommutieren, erhält man aus (b)

$$\begin{aligned}\frac{e^{(t+h)A}-e^{tA}}{h} &= \frac{e^{tA}e^{hA}-e^{tA}}{h}\\ &= e^{tA}\frac{e^{hA}-I}{h}\\ &= e^{tA}\frac{1}{h}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{h^kA^k}{k!}\\ &= e^{tA}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{h^{k-1}A^k}{k!}\\ &\to e^{tA}A \quad (h\to 0).\end{aligned}$$

Die Gleichung $e^{tA}A = Ae^{tA}$ ist eine einfache Übung.

Proposition 3.5. *Für alle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ besitzt die lineare, inhomogene Differentialgleichung* (3.2) *genau eine Lösung $x : I \to \mathbb{R}^n$. Die Lösung ist gegeben durch*

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}b(s)\,ds, \quad t \in I.$$

Beweis. Die Existenz und Eindeutigkeit einer globalen Lösung wurde schon in Theorem 3.1 gezeigt. Es bleibt also nur zu zeigen, daß die Funktion x von der Aussage eine Lösung ist. Dies ist aber eine einfache Übung, wenn man die Proposition 3.4 anwendet.

Der Satz 3.5 löst die lineare Differentialgleichung mit konstantem Koeffizient (3.2) explizit. Es bleibt nur noch, die Exponentialfunktion e^{tA} für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zu berechnen. Dafür benötigen wir nur lineare Algebra. Die einfachsten Fälle sind die Fälle einer Diagonalmatrix und einer diagonalisierbaren Matrix. Auch die Exponentialfunktion eines Jordanblocks ergibt sich einfach aus der Exponentialreihe. Der allgemeine Fall ergibt sich aus dem Satz über die Jordannormalform, der es erlaubt, sich auf den Fall einer blockdiagonalen Matrix mit Jordanblöcken auf der Diagonale zurückzuziehen.

1. **Fall:** Die Matrix $A = D$ ist diagonal, d. h.

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$$

für Eigenwerte $\lambda_i \in \mathbb{C}$. In diesem Fall sind die Potenzen wiederum diaginal. Genauer ist $D^k = \operatorname{diag}(\lambda_1^k,\dots,\lambda_n^k)$, und somit

$$e^{tD} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^kD^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\operatorname{diag}\left(\frac{t^k\lambda_1^k}{k!},\dots,\frac{t^k\lambda_n^k}{k!}\right) = \operatorname{diag}\left(e^{t\lambda_1},\dots,e^{t\lambda_n^k}\right).$$

2. **Fall:** Die Matrix A ist diagonalisierbar (über $\mathbb{C}$), d. h. es gibt eine Diagonalmatrix $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ($\lambda_i \in \mathbb{C}$) und eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$, so daß $A = S^{-1}DS$. Dann ist

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k (S^{-1}DS)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k S^{-1} D^k S}{k!} = S^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k D^k}{k!} S = S^{-1} e^{tD} S.$$

Die Matrix e^{tD} wurde schon im ersten Fall betrachtet. Auf der Diagonalen von D stehen die Eigenwerte von A.

3. **Fall:** Ist allgemeiner $A = J$ blockdiagonal, d. h.

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k \end{pmatrix}$$

für gewissen Matrizen $J_1, \dots, J_k$, dann ist

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{tJ_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{tJ_k} \end{pmatrix}.$$

Allgemeiner, falls $A = S^{-1}JS$ für eine blockdiagonale Matrix J wie oben und für eine invertierbare Matrix S, dann ist

$$e^{tA} = S^{-1} e^{tJ} S.$$

4. **Fall:** Sei $A = J_\lambda$ ein Jordanblock[1] zu einem Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$, d. h.

$$A = J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I + \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} =: \lambda I + B.$$

Dann ist (Eigenschaften der Matrixexponentialfunktion)

$$e^{tA} = e^{\lambda t} e^{tB}$$

Die Matrix B ist aber nilpotent ($B^n = 0$, wobei n die Dimension der Matrix ist), so daß die Exponentialreihe in der Definition von e^{tB} in der Tat eine endliche Summe wird: nur die ersten n Summanden, von $k = 0$ bis $k = n - 1$, sind ungleich 0. Es ist

[1] Camille Jordan (5.1.1838-22.1.1922)

$$e^{tB} = \begin{pmatrix} 1 & t & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & t \\ & & & 1 \end{pmatrix},$$

und somit

$$e^{tJ_\lambda} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & te^{t\lambda} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{t\lambda} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & te^{t\lambda} \\ & & & e^{t\lambda} \end{pmatrix}.$$

5. **Fall:** Nach dem Satz über die Jordannormalform existiert für jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine blockdiagonale Matrix

$$J = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{\lambda_k} \end{pmatrix},$$

in der die J_{λ_i} Jordanblöcke zu Eigenwerten λ_i von A sind, und eine invertierbare Matrix S, so daß $A = S^{-1}JS$. In diesem Fall ist

$$e^{tA} = S^{-1} \begin{pmatrix} e^{tJ_{\lambda_1}} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{tJ_{\lambda_k}} \end{pmatrix} S,$$

und man benutzt den vierten Fall um die Einträge $e^{tJ_{\lambda_i}}$ zu berechnen.

Eine andere Möglichkeit, um die Exponentialfunktion e^{tA} zu berechnen, ist der *Putzeralgorithmus*. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ die Eigenwerte von A, eventuell mit Vielfachheit mehrfach gezählt. Setze dann rekursiv

$$P_0 := I \text{ und}$$
$$P_j := (A - \lambda_j I)P_{j-1} \quad (j = 1, \ldots, n-1).$$

Tatsächlich könnte man auch noch $P_n = (A - \lambda_n I) \cdot \ldots \cdot (A - \lambda_1 I)$ berechnen, aber $P_n = 0$ nach dem Satz von Cayley-Hamilton (A ist eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms). Des Weiteren seien die Funktionen $w_1, \ldots, w_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die Lösungen der linearen, skalaren Differentialgleichungen

$$\begin{cases} w_1'(t) = \lambda_1 w_1(t), \\ w_1(0) = 1, \end{cases}$$

und, für $j = 2, \ldots, n$,

$$\begin{cases} w_j'(t) = \lambda_j w_j(t) + w_{j-1}(t), \\ w_j(0) = 0. \end{cases}$$

Dann gilt

$$e^{tA} = \sum_{j=1}^{n} w_j(t) P_{j-1}. \tag{3.3}$$

In der Tat: ist $X(t)$ die rechte Seite dieser Gleichung, dann rechnet man leicht nach, daß $X'(t) = AX(t)$ (sic!) und $X(0) = I$. Die Gleichheit folgt also aus der eindeutigen Lösbarkeit dieses Anfangswertproblems und daraus, daß $t \mapsto e^{tA}$ eine Lösung dieses Anfangswertproblems *ist*.

3.3 Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung

Eine lineare Differentialgleichung m-ter Ordnung ist eine Differentialgleichung der Form

$$\begin{cases} x^{(m)}(t) + A_{m-1}(t) x^{(m-1)}(t) + \ldots + A_0(t) x(t) = f(t), \\ x(t_0) = x_0, \ldots, x^{(m-1)}(t_0) = x_{m-1}. \end{cases} \tag{3.4}$$

Die Funktionen $A_j : I \to \mathbb{R}^{n \times n}$ $(0 \leq j \leq m-1)$ und $r : I \to \mathbb{R}^n$ sind stetig auf einem Intervall$I \subseteq \mathbb{R}$, und $x_j \in \mathbb{R}^n$ $(0 \leq j \leq m-1)$.

Dieses Anfangswertproblem ist in folgendem Sinne äquivalent zu einem linearen Anfangswertproblem erster Ordnung (vergleiche mit Lemma 2.17).

Lemma 3.6. *Sei*

$$A(t) := \begin{pmatrix} 0 & I & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & 0 & I \\ -A_0(t) & \cdots & & -A_{m-2}(t) & -A_{m-1}(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{mn \times mn},$$

wobei $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Einheitsmatrix ist, und sei

$$b(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{mn},$$

Dann sind das Anfangswertproblem (3.4) *und das Anfangswertproblem erster Ordnung*

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + b(t), \\ u(t_0) = (x_0, \dots, x_{m-1}) \end{cases} \tag{3.5}$$

im folgenden Sinne äquivalent:

(a) *Ist* $x : I \to \mathbb{R}^n$ *eine Lösung des Anfangswertproblems* (3.4)*, dann ist* $u := (x, \dots, x^{(m-1)})$ *eine Lösung des Anfangswertproblem* (3.5)*.*

(b) *Ist umgekehrt* $u : I \to \mathbb{R}^{mn}$*,* $u = (u_0, \dots, u_{m-1})$*, eine Lösung des Anfangswertproblems* (3.5)*, dann ist* $x := u_0$ *eine Lösung des Anfangswertproblems* (3.4)*.*

Beweis. Nachrechnen.

Daraus und aus Theorem 3.1 folgt

Theorem 3.7 (Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen). *Für alle* $x_0, \dots, x_{m-1} \in \mathbb{R}^n$ *besitzt das Anfangswertproblem* (3.4) *genau eine Lösung* $x : I \to \mathbb{R}^n$*.*

Die Menge aller Lösungen der homogenen Gleichung ist ein mn-dimensionaler Unterraum von $C^1(I;\mathbb{R}^n)$*.*

3.4 Lineare, skalare Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Nachdem wir das allgemeine Anfangswertproblem höherer Ordnung nicht explizit lösen können, betrachten wir hier einen Spezialfall, nämlich die lineare, skalare, homogene Differentialgleichung m-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$x^{(m)}(t) + a_{m-1}x^{(m-1)}(t) + \cdots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = 0. \tag{3.6}$$

Hier ist $a_j \in \mathbb{R}$ $(0 \le j \le m-1)$.

Nach dem Lemma 3.6 ist die Differentialgleichung äquivalent zur Differentialgleichung

$$u'(t) = Au(t),$$

wobei

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 \\ -a_0 & \cdots & & -a_{m-2} & -a_{m-1} \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

Man könnte versuchen, diese Differentialgleichung zu lösen, indem wir e^{tA}) berechnen. Dafür berechnen wir zuerst die Eigenwerte von A.

Lemma 3.8 (Charakteristisches Polynom). *Sei p das charakteristische Polynom der Matrix A. Dann ist*

$$p(\lambda) = \lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + a_0, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Beweis. Wir beweisen das Lemma durch vollständige Induktion nach der Dimension m.

Im Fall $m = 1$ ist die Behauptung wahr: die Matrix A ist in diesem Fall gleich der Konstanten $-a_0$.

Nehmen wir an, daß die Behauptung richtig in Dimension m ist. Sei nun A eine Matrix der Dimension $(m+1) \times (m+1)$ und von der Form (3.7). Per Definition ist für alle $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(\lambda I - A) \\ &= \begin{vmatrix} \lambda & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \lambda & -1 \\ a_0 & \cdots & a_{m-1} & \lambda + a_m \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Wir entwickeln die Determinante nach der ersten Spalte:

$$p(\lambda) = \lambda \cdot \begin{vmatrix} \lambda & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & -1 \\ a_1 & \cdots & a_{m-1} & \lambda + a_m \end{vmatrix} + (-1)^m a_0 \begin{vmatrix} -1 & & & \\ \lambda & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & -1 \end{vmatrix}.$$

Die zwei Determinanten sind Determinanten von $m \times m$-Matrizen. Nach Induktionsvoraussetzung ist

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda(\lambda^m + a_m\lambda^{m-1} + \cdots + a_1) + a_0 \\ &= (\lambda^{m+1} + a_m\lambda^m + \cdots + a_1\lambda + a_0). \end{aligned}$$

Theorem 3.9 (Komplexe Lösungen von (3.6)**).** *Sei p das charakteristische Polynom der Matrix A. Seien die $\lambda_j \in \mathbb{C}$ $(1 \le j \le k)$ die paarweise verschiedenen, komplexen Nullstellen von p und seien die $m(\lambda_j)$ ihre Vielfachheiten, d. h.*

$$p(\lambda) = \prod_{j=1}^{k} (\lambda - \lambda_j)^{m(\lambda_j)}.$$

Dann sind die Funktionen

$$t^l e^{\lambda_j t} \quad 1 \le j \le k, 0 \le l \le m(\lambda_j) - 1,$$

m linear unabhängige, komplexe Lösungen der homogenen Differentialgleichung (3.6). *Jede Lösung von* (3.6) *ist Linearkombination dieser Lösungen.*

Beweis. Man prüft leicht nach, daß die angegebenen Funktionen Lösungen der homogenen Differentialgleichung (3.6) sind. Außerdem prüft man leicht, daß diese Funktionen linear unabhängig sind. Wir wissen vom Theorem 3.7, daß der Lösungsraum m-dimensional ist (skalare Differentialgleichung $\to n = 1!$). Also bilden die angegebenen Funktionen zusammen eine Basis des Lösungsraums. Jede andere Lösung ist also eine Linearkombination dieser Basis.

Korollar 3.10 (Reelle Lösungen von (3.6)**).** *Sei p das charakteristische Polynom der Matrix A. Seien die $\lambda_j \in \mathbb{R}$ ($1 \leq j \leq k_1$) die paarweise verschiedenen, reellen Nullstellen von p, und seien $\mu_j = \alpha_j + i\beta_j$ und $\overline{\mu_j} = \alpha_j - i\beta_j$ ($1 \leq j \leq k_2$) die paarweise verschiedenen, echt komplexen Nullstellen von p (die Matrix A ist reell, und somit ist für jeden Eigenwert μ von A die komplex Konjugierte $\bar{\mu}$ ebenfalls Eigenwert). Seien $m(\lambda_j)$ bzw. $m(\mu_j)$ die Vielfachheiten dieser Nullstellen, d. h.*

$$p(\lambda) = \prod_{j=1}^{k_1} (\lambda - \lambda_j)^{m(\lambda_j)} \prod_{j=1}^{k_2} ((\lambda - \alpha_j)^2 + \beta_j^2)^{m(\mu_j)}.$$

Dann sind die Funktionen

$$t^l \, e^{\lambda_j t} \quad 1 \leq j \leq k_1, 0 \leq l \leq m(\lambda_j) - 1,$$

und

$$t^l \, e^{\alpha_j t} \sin(\beta_j t) \text{ und } t^l \, e^{\alpha_j t} \cos(\beta_j t) \quad 1 \leq j \leq k_2, 0 \leq l \leq m(\mu_j) - 1,$$

m reelle, linear unabhängige Lösungen der homogenen Differentialgleichung (3.6)*. Jede Lösung dieser Differentialgleichung* (3.6) *ist Linearkombination dieser Lösungen.*

3.5 Stabilität und Instabilität. Erstes Lyapunovsches Theorem

In diesem Abschnitt studieren wir das asymptotische Verhalten / Langzeitverhalten von Lösungen und Stabilität / Instabilität des Gleichgewichtspunkts 0 des linearen Gleichungssystems erster Ordnung

$$x'(t) = Ax(t), \tag{3.8}$$

wobei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

Unter dem asymptotischen Verhalten verstehen wir das Verhalten der Lösungen für große Zeiten ($t \to \infty$), hier insbesondere die exponentielle Konvergenz der Lösungen gegen 0, die Beschränktheit von Lösungen oder das Aufblasen der Lösungen für große Zeiten. Anders ausgedrückt geht es hier um die exponentielle Stabilität, einfache Stabilität oder Instabilität des Nullpunktes, der in jeder linearen

Differentialgleichung der ausgezeichnete Gleichgewichtspunkt ist.

In Dimension $n = 1$ ist die Frage nach dem asymptotischen Verhalten sehr einfach. Die Lösungen der Gleichung (3.8) sind Exponentialfunktionen der Form $x(t) = e^{At}x_0$. Falls $A > 0$, dann blasen alle Lösungen (außer der konstanten Nulllösung) für große Zeiten auf. Insbesondere sind sie nicht beschränkt; der Nullpunkt ist *instabil*. Falls $A < 0$, dann konvergieren alle Lösungen exponentiell gegen 0; der Nullpunkt ist *exponentiell stabil*. Falls $A = 0$, dann sind alle Lösungen konstant und insbesondere beschränkt; der Nullpunkt ist *stabil*.

In Dimension $n \geq 2$ ist die Frage nach dem asymptotischen Verhalten der Lösungen bzw. nach der Stabilität des Nullpunktes etwas komplizierter. Wir zeigen in diesem Abschnitt, daß das asymptotische Verhalten vom Spektrum der Matrix A abhängt.

Zur Illustration betrachten wir zuerst die Dimension $n = 2$. In diesem Fall können wir die Vektorfelder der zugehörigen linearen Abbildung angeben. Aus diesen Vektorfeldern können wir das asymptotische Verhalten ablesen, je nach Lage der Eigenwerte von A. Selbst wenn die Matrix A reell ist, werden wir das Spektrum immer über den komplexen Zahlen betrachten. Die Matrix A hat dann immer entweder zwei verschiedene Eigenwerte, oder einen doppelten Eigenwert.

1. **Fall:** Die Matrix A hat zwei reelle Eigenwerte, und beide Eigenwerte sind strikt positiv oder beide sind strikt negativ. Beispiel:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A_2 = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte von A_1 sind $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 3$, und die zugehörigen Eigenvektoren sind $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Alle Lösungen der Differentialgleichung (3.8) blasen für große Zeiten exponentiell auf. Der Gleichgewichtspunkt 0 ist *instabil*.

Die Eigenwerte von A_2 sind $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = -3$, und die zugehörigen Eigenvektoren sind $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Alle Lösungen der der Differentialgleichung (3.8) konvergieren (exponentiell) gegen 0. Der Gleichgewichtspunkt 0 ist *asymptotisch stabil* oder hier sogar *exponentiell stabil*.

2. **Fall:** Die Matrix A hat zwei reelle Eigenwerte, wovon einer strikt positiv und der andere strikt negativ ist. Beispiel:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix A_3 hat die Eigenwerte $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = 3$, und die zugehörigen Eigenvektoren sind $x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Es gibt Lösungen, die exponentiell

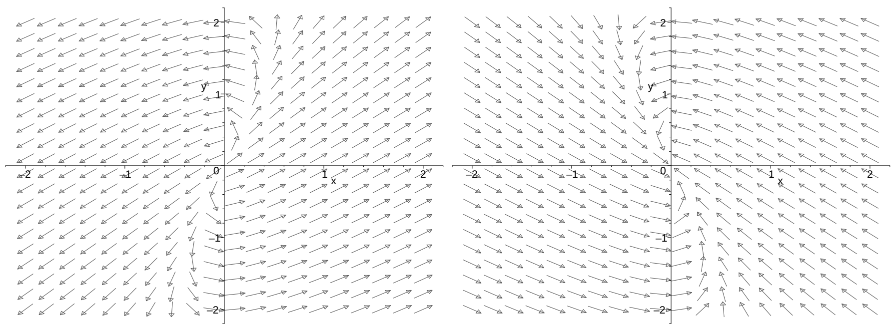

Fig. 3.1 Vektorfelder der Matrizen A_1 und A_2

gegen 0 konvergieren (nämlich die Lösungen, die im von x_1 aufgespannten Eigenraum starten), aber es gibt auch Lösungen, die für große Zeiten exponentiell aufblasen (alle anderen Anfangsbedingungen!). Der Gleichgewichtspunkt 0 heißt *hyperbolisch* (siehe das zugehörige Vektorfeld!). Insbesondere ist der Gleichgewichtspunkt 0 instabil.

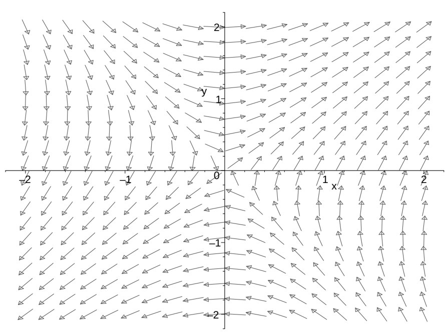

Fig. 3.2 Vektorfeld der Matrix A_3

3. **Fall:** Die beiden Eigenwerte der Matrix A sind nicht reell und damit aufgrund der Dimension $n = 2$ zueinander komplex konjugiert, d. h. $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 = \alpha + i\beta$. Je nachdem, ob $\alpha > 0$, $\alpha < 0$ oder $\alpha = 0$, ist der Punkt instabil, exponentiell stabil oder stabil. Beispiele:

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ und } A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte der Matrix A_4 sind $\lambda_1 = i$ und $\lambda_2 = -i$. Alle Lösungen der Differentialgleichung (3.8) sind periodisch; in diesem Fall ist der Gleichgewichtspunkt 0 *stabil* in dem Sinne, daß es zwei Nullumgebungen U und V gibt, so daß alle Lösungen zu Anfangswerten in U für alle Zeiten in V bleiben.

Die Eigenwerte der Matrix A_5 sind $\lambda_1 = -\frac{1}{2} + i\sqrt{\frac{3}{4}}$ und $\lambda_2 = -\frac{1}{2} - i\sqrt{\frac{3}{4}}$. Da der Realteil der beiden Eigenwerte λ_1 und λ_2 negativ ist, konvergieren alle Lösungen der Differentialgleichung (3.8) (exponentiell) gegen 0. Der Nullpunkt ist asymptotisch bzw. sogar exponentiell stabil.

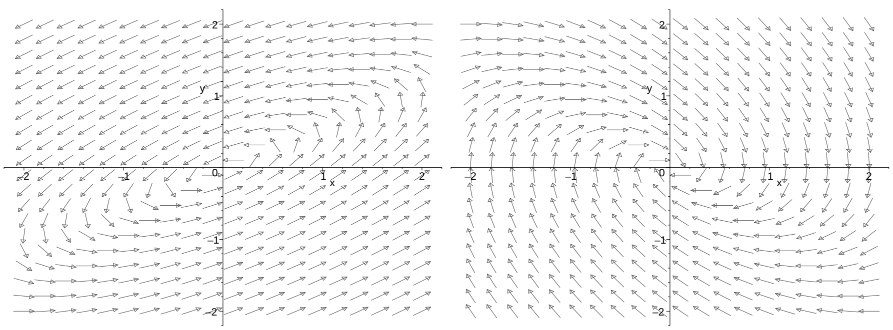

Fig. 3.3 Vektorfelder der Matrizen A_4 und A_5

4. **Fqall:** Die Matrix A hat nur einen reellen Eigenwert, ist aber nicht diagonalisierbar. Beispiel:

$$A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Der einzige Eigenwert dieser Matrix A_6 ist $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, und als Jordanblock ist A nicht diagonalisierbar. Da der einzige Eigenwert positiv ist, blasen alle Lösungen der Differentialgleichung (3.8) exponentiell auf. Der Gleichgewichtspunkt 0 ist instabil.

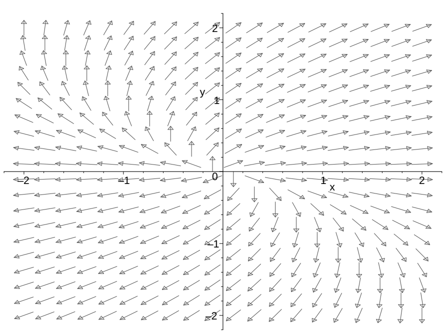

Fig. 3.4 Vektorfeld der Matrix A_6

Im Wesentlichen sind die oben betrachteten Fälle alle möglichen Fälle in $\mathbb{R}^2$. Die Beispiele illustrieren, wie das *Spektrum* $\sigma(A)$ (d. h. die Menge der Eigenwerte A) das asymptotische Verhalten der Lösungen der Differentialgleichung (3.8) und damit die Stabilität bzw. Instabilität des Gleichgewichtspunktes 0 beeinflußt.

Unser erstes Theorem *charakterisiert* asymptotische / exponentielle Stabilität des Gleichgewichtspunkts 0. Wir erlauben in diesem Theorem sogar komplexe Matrizen.

Theorem 3.11 (Liapunov[2]). *Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *Es gibt Konstanten $M \geq 1$, $\omega > 0$, so daß für alle $x_0 \in \mathbb{C}^n$*

$$\|e^{tA}x_0\|_2 \leq M\, e^{-\omega t}\, \|x_0\|_2,$$

d. h. der Gleichgewichtspunkt 0 *ist* exponentiell stabil.

(ii) *Für alle $x_0 \in \mathbb{C}^n$ gilt*

$$\lim_{t\to\infty} \|e^{tA}x_0\| = 0,$$

d. h. der Gleichgewichtspunkt 0 *ist* asymptotisch stabil.

(iii) *Wenn $\sigma(A)$ das Spektrum der Matrix A bezeichnet, dann ist die* Spektralschranke

$$s(A) := \sup_{\lambda\in\sigma(A)} \operatorname{Re}\lambda < 0,$$

d. h. alle Eigenwerte von A haben einen strikt negativen Realteil.

Beweis. Die Implikation (i)⇒(ii) ist klar.

Wir zeigen die Implikation (ii)⇒(iii) durch Kontraposition. Wir nehmen also an, daß $s(A) \geq 0$. Dann existiert ein Eigenwert $\lambda \in \sigma(A)$ mit $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$. Sei $x_0 \in \mathbb{C}^n$ ein zugehöriger Eigenvektor. Dann gilt

$$\|e^{tA}x_0\| = \|\sum_{k\geq 0}\frac{t^kA^kx_0}{k!}\| = \|\sum_{k\geq 0}\frac{t^k\lambda^kx_0}{k!}\| = \|e^{\lambda t}x_0\| = e^{\operatorname{Re}\lambda\, t}\,\|x_0\| \not\to 0.$$

Also konvergieren nicht alle Lösungen gegen 0; der Gleichgewichtspunkt 0 ist nicht asymptotisch stabil.

(iii)⇒(i). Wir nehmen schließlich an, daß $s(A) < 0$. Aus dem Satz über die Jordannormalform folgt, daß es eine invertierbare Matrix S und eine blockdiagonale Matrix D gibt, so daß $A = S^{-1}JS$. Auf der Diagonalen der Matrix J stehen Jordanblöcke zu den Eigenwerten von A, d. h. $J = \operatorname{diag}(J_{\lambda_1},\ldots,J_{\lambda_k})$. Es gilt

$$\begin{aligned}\|e^{tA}\| &= \|S^{-1}e^{tJ}S\| \\ &\leq \|S^{-1}\|\,\|e^{tJ}\|\,\|S\|.\end{aligned}$$

Es genügt also zu zeigen, daß $\|e^{tJ}\| \leq M\,e^{-\omega t}$ für Konstanten $M \geq 1$, $\omega > 0$ und für alle $t \geq 0$. Es gilt $e^{tJ} = \operatorname{diag}(e^{tJ_{\lambda_1}},\ldots,e^{tJ_{\lambda_k}})$, und die explizite Formel für $e^{tJ_{\lambda_j}}$ (siehe

[2] Aleksandr Mikhailovich Liapunov (6.6.1857-3.11.1918)

Seite 32) zeigt, daß es für alle $\omega \in (0, -s(A))$ eine Konstante $M \geq 1$ gibt, so daß

$$\|e^{tJ}\| \leq M e^{-\omega t}, \quad t \geq 0.$$

Wir haben gezeigt, daß die Aussage (i) aus (iii) folgt.

Der Beweis des folgenden Theorems ist eine Übung: man benutze wieder die expliziten Formeln für e^{tA}.

Theorem 3.12. *Die Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ habe wenigstens einen Eigenwert mit strikt positiven Realteil, d. h. $s(A) > 0$. Dann ist der Gleichgewichtspunkt* 0 instabil *in dem Sinne, daß es nicht beschränkte Lösungen gibt.*

3.6 Reihenentwicklung von Lösungen

Dans ce dernier paragraphe sur les équations linéaires on considère l'équation linéaire non-autonome d'ordre m

$$x^{(m)}(t) + a_{m-1}(t)x^{(m-1)}(t) + \cdots + a_0(t)x(t) = 0. \tag{3.9}$$

On suppose que les coefficients a_j sont continue sur l'intervalle $(-r, r)$, et on suppose même que toute fonction a_j admet en 0 en développement illimité en série entiere avec rayon de convergence $\geq r$, c.à.d.

$$a_j(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{kj} t^k, \quad t \in (-r, r).$$

Dans ce cas, on a la proposition suivante.

Proposition 3.13. *Soit x une solution de l'équation différentielle* (3.9)*. Alors*

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k t^k, \quad t \in (-r, r),$$

la série étant absolument convergente.

On ne va pas démontrer cette proposition mais plutôt l'illustrer dans l'exemple suivant.

Beispiel 3.14 (Equation d'Airy). On considère *l'équation différentielle d'Airy*[3]

$$x''(t) - tx(t) = 0. \tag{3.10}$$

On suppose que la solution de cette équation différentielle admet un développement illimité de la forme

[3] George Biddell Airy (27.7.1801-2.1.1892)

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k t^k,$$

la série étant absolument convergente pour $|t| < r$.

En remplaçant la solution x dans (3.10) par cette série entière on obtient

$$\sum_{k=2}^{\infty} \eta_k k(k-1)t^k - \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k t^{k+1} = 0,$$

ou

$$2\eta_2 + \sum_{k=1}^{\infty} (\eta_{k+2}(k+2)(k+1) - \eta_{k-1})\, t^k = 0.$$

Le théorème d'unicité pour les séries entières dit que tous les coefficients dans cette série sont nécessairement 0. En particulier,

$$\eta_2 = 0.$$

Sinon, le coefficients η_0 et η_1 peuvent être choisis arbitrairement. Si η_0 et η_1 sont fixes, alors pour tout $k \geq 1$

$$\eta_{k+2} = \frac{1}{(k+2)(k+1)} \eta_{k-1}.$$

Ceci implique que pour tout $k \geq 1$

$$\begin{aligned}
\eta_{3k} &= \frac{1}{3k(3k-1)} \eta_{3k-3}, \\
\eta_{3k+1} &= \frac{1}{(3k+1)3k} \eta_{3k-2}, \\
\eta_{3k+2} &= 0.
\end{aligned}$$

Les solutions x de l'équation d'Airy sont alors complètement déterminées dès qu'on connaît les conditions initiales $x(0) = \eta_0$ et $x'(0) = \eta_1$.

Kapitel 4
Stabiliät

In diesem Kapitel betrachten wir die nichtlineare, *autonome* Differentialgleichung

$$x'(t) = f(x(t)), \tag{4.1}$$

wobei $f : D \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion auf einer offenen Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ist; die Funktion f hängt nicht explizit von der Variable t ab (autonom = zeitunabhängig).

Definition 4.1. Ein Punkt $x_0 \in D$ heißt *Gleichgewichtspunkt* (oder *stationärer Punkt*, *stationäre Lösung*, *kritischer Punkt*) der Differentialgleichung (4.1) falls $f(x_0) = 0$.

Diese Definition, die eine Nullstelle einer Funktion anders benennt, erklärt sich durch die Beobachtung, daß die konstante Funktion $x(t) \equiv x_0$ Lösung der Differentialgleichung (4.1) ist.

Im vorigen Abschnitt haben wir schon verschiedene Arten von Gleichgewichtspunkten betrachtet, zumindest bei linearen Differentialgleichungen. Hier geben wir eine formale Definition für den allgemeinen Fall.

Definition 4.2. Sei x_0 ein Gleichgewichtspunkt für die Differentialgleichung (4.1).

(a) Wir sagen, daß der Gleichgewichtspunkt x_0 *stabil* ist, falls es für jede Umgebung $U \subseteq D$ von x_0 eine andere Umgebung $V \subseteq D$ von x_0 gibt, so daß jede Lösung x der Differentialgleichung (4.1) mit Anfangsbedingung $x(0) \in V$ global (auf dem Intervall $[0,\infty[$) existiert und $x(t) \in U$ für alle $t \geq 0$.

(b) Wir sagen, daß der Gleichgewichtspunkt x_0 *asymptotisch stabil* ist, falls es eine Umgebung $U \subseteq D$ von x_0 gibt, so daß jede Lösung x der Differentialgleichung (4.1) mit Anfangsbedingung $x(0) \in U$ global (auf dem Intervall $[0,\infty[$) existiert und $\lim_{t\to\infty} x(t) = x_0$.

(c) Wir sagen, daß der Gleichgewichtspunkt x_0 *exponentiell stabil* ist, falls es eine Umgebung $U \subseteq D$ von x_0 und Konstanten $M \geq 1$, $\omega > 0$ gibt, so daß jede Lösung x der Differentialgleichung (4.1) mit Anfangsbedingung $x(0) \in U$ global (auf dem Intervall $[0,\infty[$) existiert und $\|x(t) - x_0\| \leq M\, e^{-\omega t} \|x(0) - x_0\|$.

(d) Wir sagen, daß der Gleichgewichtspunkt x_0 *instabil* ist, falls x_0 nicht stabil ist.

Wir betrachten hier asymptotisches Verhalten von Lösungen und Stabilität von Gleichgewichtspunkten nur für große Zeiten ($t \to \infty$). Genauer wäre es etwa, von positiv stabilen Gleichgewichtspunkten zu sprechen, und einen Gleichgewichtspunkt negativ stabil zu nennen, wenn eine analoge Eigenschaft für Zeiten $t \to -\infty$ gilt. Eine Inversion der Zeit entspricht aber genau einem Ersetzen der Nichtlinearität f durch $-f$. Insofern genügt es, das asymptotische Verhalten für Zeiten $t \to \infty$ zu studieren.

Lemma 4.3. *Sei x_0 ein Gleichgewichtspunkt der Differentialgleichung* (4.1). *Dann gilt:*

$$\begin{gathered} x_0 \textit{ ist exponentiell stabil} \\ \Downarrow \\ x_0 \textit{ ist asymptotisch stabil} \\ \Downarrow \\ x_0 \textit{ ist stabil} \,. \end{gathered}$$

Dank des ersten Theorems von Lyapunov (Theorem 3.11) sind asymptotische Stabilität und exponentielle Stabilität bei linearen Differentialgleichungen äquivalent. Im Allgemeinen gilt eine solche Äquivalenz aber nicht. Es gibt Gleichungen, in denen ein Gleichgewichtspunkt asymptotisch stabil, aber nicht exponentiell stabil ist (etwa der Nullpunkt für die skalare Gleichung $x'(t) = -x(t)^3$).

4.1 Linearisierte Stabilität. Das zweite Theorem von Lyapunov

Das folgende zweite Theorem von Lyapunov ist eine Folgerung aus dem ersten Theorem von Lyapunov (und aus dem Lemma von Gronwall). Es gibt eine hinreichende Bedingung für exponentielle Stabilität.

Theorem 4.4 (Lyapunov; linearisierte Stabilität). *Sei $x_0 \in D$ ein Gleichgewichtspunkt für die Differentialgleichung* (4.1). *Die Funktion f sei stetig differenzierbar. Falls $s(f'(x_0)) < 0$, dann ist x_0 exponentiell stabil.*

Beweis. Indem man die Funktion f durch die verschobene Funktion $f(\cdot - x_0)$ (auf einem verschobenen Definitionsbereich) und die Lösung x durch $x - x_0$ ersetzt, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $x_0 = 0$.

Sei $A := f'(0) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Nach der Weierstraßschen Zerlegungsformel ist

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + r(x) \\ &= Ax + r(x), \quad x \in D, \end{aligned}$$

wobei der Rest die Bedingung $\lim_{\|x\|_2 \to 0} \frac{\|r(x)\|}{\|x\|_2} = 0$ erfüllt. Die Differentialgleichung (4.1) wird also umgeschrieben zur Differentialgleichung

$$x'(t) = Ax(t) + r(x(t)).$$

Nach Voraussetzung an die Spektralschranke von A und nach dem ersten Theorem von Lyapunov (Theorem 3.11) existieren Konstanten $M \geq 1$ und $\omega > 0$, so daß

$$\|e^{tA}\| \leq Me^{-\omega t}, \quad t \geq 0.$$

Wir wählen nun $\delta > 0$ so klein, daß die abgeschlossene Kugel $\bar{B}(0,\delta)$ ganz in D liegt und $\|r(x)\|_2 \leq \frac{\omega}{2M}\|x\|_2$ für alle $x \in \bar{B}(0,\delta)$. Ein solches δ existiert, weil D offen ist und aufgrund der Eigenschaft des Rests r.

Sei $x_1 \in \mathbb{R}^n$, so daß $\|x_1\|_2 \leq \frac{\delta}{2M}$ und sei $x : [0,\beta[\to \mathbb{R}^n$ eine maximale Lösung der Differentialgleichung (4.1) zur Anfangsbedingung $x(0) = x_1$. Sei $\beta' := \sup\{t \in [0,\beta[| u(s) \in \bar{B}(0,\delta)$ für alle $s \in [0,t]\}$.

Aus dem Theorem 3.5 folgt die Gleichung

$$x(t) = e^{tA}x_1 + \int_0^t e^{(t-s)A} r(x(s))\, ds, \quad t \in [0,\beta'[.$$

Aus der Dreiecksungleichung folgt, daß für alle $t \in [0,\beta'[$

$$\|x(t)\|_2 \leq Me^{-\omega t}\|x_1\|_2 + \int_0^t Me^{-\omega(t-s)} \frac{\omega}{2M}\|x(s)\|_2\, ds$$

bzw.

$$e^{\omega t}\|x(t)\|_2 \leq M\|x_1\|_2 + \int_0^t \frac{\omega}{2} e^{\omega s}\|x(s)\|_2\, ds.$$

Indem wir das Lemma von Gronwall (Lemma 2.5) auf die Funktion $\varphi(t) := e^{\omega t}\|x(t)\|_2$ anwenden, erhalten wir die Abschätzung

$$e^{\omega t}\|x(t)\|_2 \leq Me^{\frac{\omega}{2}t}\|x_1\|_2, \quad t \in [0,T].$$

Aus der Bedingung $\|x_1\| \leq \frac{\delta}{2M}$v folgt zuerst, daß $\|x(t)\| \leq \frac{\delta}{2}$ für alle $t \in [0,\beta'[$. Die maximale Lösung verläßt auf dem Intervall $[0,\beta''[$ die kompakte Kugel mit Mittelpunkt 0 und Radius $\frac{\delta}{2}$ also nicht. Nach Definition von β' folgt daraus zuerst $\beta' = \beta$ und schließlich, aufgrund der Eigenschaften von maximalen Lösungen, $\beta = \infty$. Die maximale Lösung ist also eine globale Lösung, womit wir hier meinen, daß sie auf dem Intervall $[0,\infty[$ existiert. Die obige Abschätzung zeigt dann aber $\|x(t)\| \leq Me^{-\frac{\omega}{2}}\|x_1\|$ für alle $t \geq 0$. Der Punkt 0 ist also exponentiell stabil.

Man kann auch das folgende Theorem beweisen, welches aus dem entsprechenden Theorem 3.12 im linearen Fall folgt.

Theorem 4.5. *Sei $x_0 \in D$ ein Gleichgewichtspunkt für die Differentialgleichung* (4.1). *Die Funktion f sei stetig differenzierbar. Falls $s(f'(x_0)) > 0$, d. h. falls $f'(x_0)$ einen Eigenwert mit strikt positiven Realteil besitzt, dann ist x_0 instabil.*

Wenn alle Eigenwerte der Linearisierung $f'(x_0)$ Realteil kleiner oder gleich 0 haben, dann kann man im Allgemeinen nichts über die (asymptotische) Stabilität oder Instabilität des Gleichgewichtspunktes aussagen. Betrachte dazu die Differentialgleichungen $x'(t) = -x(t)^3$ (der Gleichgewichtspunkt $x_0 = 0$ ist asymptotisch stabil) und $x'(t) = x(t)^3$ (der Gleichgewichtspunkt $x_0 = 0$ ist instabil). In beiden Fällen ist $f'(x_)=0$.

4.2 Lyapunovfunktionen

Wir betrachten die autonome (= zeitunabhängige) Differentialgleichung (4.1), nun mit einer stetig differenzierbaren Funktion $f : D \to \mathbb{R}^n$ auf einer offenen Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$.

Definition 4.6 (Lyapunovfunktion).

(a) Eine Funktion $V : D \to \mathbb{R}$ heißt *Lyapunovfunktion* für die Differentialgleichung (4.1), falls V stetig differenzierbar ist und

$$\dot{V}(x) := \langle V'(x), f(x) \rangle \leq 0 \quad \text{für alle } x \in D.$$

(b) Eine Funktion $V : D \to \mathbb{R}$ heißt *strikte Lyapunovfunktion* für die Differentialgleichung (4.1), falls V Lyapunovfunktion ist und falls für alle $x \in D$

$$\dot{V}(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = 0.$$

Die Bedeutung von Lyapunovfunktionen zeichnet sich durch das folgende Lemma aus.

Lemma 4.7. (a) *Eine stetig differenzierbare Funktion $V : D \to \mathbb{R}$ ist genau dann eine Lyapunovfunktion für die Differentialgleichung* (4.1)*, wenn für jede Lösung x der Differentialgleichung* (4.1) *die Verknüpfung $V(x) = V \circ x$ monoton fallend ist.*

(b) *Ist $V : D \to \mathbb{R}$ eine strikte Lyapunovfunktion für die Differentialgleichung* (4.1) *und ist die Verknüpfung $V(x)$ für eine gegebene Lösung x von* (4.1) *konstant, dann ist die Lösung x konstant.*

Beweis. (a) Sei x eine Lösung von (4.1). Dann giltg

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x(t)) &= \langle V'(x(t)), x'(t) \rangle \\ &= \langle V'(x(t)), f(x(t)) \rangle \\ &= \dot{V}(x(t)) \leq 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Also ist $V(x)$ monoton fallend.

Die Umkehrung beweist sich unter der Benutzung von (4.2) ganz analog.

(b) Sei nun V eine strikte Lyapunovfunktion, und sei x eine Lösung, so daß die Verknüpfung $V(x)$ konstant ist. Nach (4.2) ist dann $\dot{V}(x(t)) = 0$ für alle t, d. h. $f(x(t)) = 0$ für alle t. Mithin ist $x'(t) = 0$, h. h. x ist konstant.

Beispiele 4.8. (a) GRADIENTENSYSTEME: Sei $F : D \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar auf einer offenen Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann ist $V = F$ strikte Lyapunovfunktion für das *Gradientensystem*

$$x'(t) + \nabla F(x(t)) = 0,$$

in dem ∇F der Gradient von F ist. In der Tat, ist $x : I \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung dieser Differentialgleichung, dann gilt

$$\begin{aligned}\dot{F}(x(t)) &= \frac{d}{dt} F(x(t)) \\ &= \langle \nabla F(x(t)), x'(t) \rangle \\ &= -\|x(t)\|_2^2 \quad \leq \quad 0,\end{aligned}$$

d. h. die Verknüpfung $t \mapsto F(x(t))$ ist monoton fallend, und die Verknüpfung ist genau dann konstant, wenn die Lösung x konstant ist.

(b) HAMILTONSCHE SYSTEME: Sei $H : D \to \mathbb{R}$, $H = H(x,p)$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion auf einer offenen Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Dann ist H Lyapunovfunktion für das *Hamiltonsche System*

$$\begin{aligned}x'(t) &= \nabla_p H(x(t), p(t)), \\ p'(t) &= -\nabla_x H(x(t), p(t)).\end{aligned}$$

In der Tat, ist $(x,p) : I \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ eine Lösung dieser Differentialgleichung, dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} H(x(t), p(t)) &= \big\langle \nabla H(x(t), p(t)), (x'(t), p'(t)) \big\rangle_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \\ &= \big\langle \nabla_x H(x(t), p(t)), x'(t) \big\rangle_{\mathbb{R}^n} + \big\langle \nabla_p H(x(t), p(t)), p'(t) \big\rangle_{\mathbb{R}^n} \\ &= -\langle p'(t), x'(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle x'(t), p'(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} \\ &= 0,\end{aligned}$$

d. h. die Funktion $t \mapsto H(x(t), p(t))$ ist konstant (und damit monoton fallend).

(c) DAS MATHEMATISCHE PENDEL: Für $\alpha \geq 0$ betrachten wir die Differentialgleichung des mathematischen Pendels

$$x''(t) + \alpha x'(t) + x(t) = 0.$$

Diese Differentialgleichung zweiter Ordnung ist äquivalent zur Differentialgleichung erster Ordnung

$$u'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\alpha \end{pmatrix} u(t).$$

Die Funktion $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$V(u_0, u_1) := \frac{1}{2} \|u_0\|_2^2 + \frac{1}{2} \|u_1\|_2^2$$

ist Lyapunovfunktion dieses Systems. In der Tat, ist $x : I \to \mathbb{R}$ Lösung der Gleichung des mathematischen Pendels, dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V(x(t),x'(t)) &= \langle x(t),x'(t)\rangle + \langle x'(t),x''(t)\rangle \\ &= -\alpha\|x'(t)\|_2^2 \le 0.\end{aligned}$$

(d) EIN GRADIENTENSYSTEM ZWEITER ORDNUNG: Sei F wie im Beispiel (a) und sei $\alpha \ge 0$. Wir betrachten die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$x''(t) + \alpha x'(t) + \nabla F(x(t)) = 0.$$

Sei $x : I \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung dieses Problems. Dann gilt

$$\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}\|x'(t)\|_2^2 + F(x(t))) = -\alpha\|x'(t)\|_2^2 \le 0,$$

d. h. die Funktion $V(u_0,u_1) := \frac{1}{2}\|u_1\|_2^2 + F(u_1)$ ist eine Lyapunovfunktion.

Sei $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion. Dann heißt die Menge

$$\omega(x) := \{z \in D : \exists (t_j) \nearrow \infty \text{ mit } x(t_j) \to z\,(j \to \infty)\}$$

ω-Limesmenge von x.

Die ω-Limesmenge ist die Menge aller Häufungswerte der Funktion x für $t \to \infty$. Eine andere Definition der Menge $\omega(x)$ ergibt sich aus dem folgenden Lemma.

Lemma 4.9. *Sei $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion. Dann ist*

$$\omega(x) = \bigcap_{t\ge 0} \overline{\{x(s) : s \ge t\}}.$$

Beweis. Sei $z \in \omega(x)$. Nach Definition gibt es dann eine Folge $(t_j) \nearrow \infty$, so daß $\lim_{j\to\infty} x(t_j) = z$. Da die Folge (t_j) unbeschränkt ist, ist $z \in \overline{\{x(s) : s \ge t\}}$ für alle $t \ge 0$. Also gilt $z \in \bigcap_{t\ge 0} \overline{\{x(s) : s \ge t\}}$.

Sei umgekehrt $z \in \bigcap_{t\ge 0} \overline{\{x(s) : s \ge t\}}$. Dann ist $z \in \overline{\{x(s) : s \ge t\}}$ für alle $t \ge 0$. Also gibt es für jedes $j \in \mathbb{N}$ il ein $t_j \ge j$ mit $\|x(t_j) - z\| \le 1/j$. Die Folge $(t_j) \nearrow \infty$, die man so erhält, divergiert bestimmt und $\lim_{j\to\infty} x(t_j) = z$. Also gilt $z \in \omega(x)$.

Lemma 4.10. *Sei $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ eine stetige, beschränkte Funktion. Dann gilt:*

(a) *Die ω-Limesmenge $\omega(x)$ ist nichtleer, kompakt und zusammenhängend.*

(b) $\lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}(x(t), \omega(x)) = 0$.

(c) *Es ist $\omega(x) = \{z\}$ (d. h. die ω-Limesmenge besitzt nur ein Element) genau dann, wenn* $\lim_{t\to\infty} x(t) = z$.

(d) *Ist x eine globale, beschränkte Lösung der Differentialgleichung* (4.1) *und ist $\omega(x) \subseteq D$, dann ist $\omega(x)$* invariant *unter dieser Differentialgleichung, d. h. jede*

Lösung $z : [0,\beta[\to \mathbb{R}^n$ *der Differentialgleichung mit* $z(0) \in \omega(x)$ *erfüllt* $z(t) \in \omega(x)$ *für alle* $t \in [0,\beta[$. *Da hier* $\omega(x)$ *sogar kompakt ist, ist jede maximale Lösung zu einem Anfangswert in* $\omega(x)$ *eine globale Lösung.*

Beweis. (a) Da die Funktion x stetig und beschränkt ist, sind die Mengen

$$\overline{\{x(s) : s \geq t\}}$$

nichtleer, kompakt und zusammenhängend (die letzte Eigenschaft ergibt sich aus der Stetigkeit von x). Sie sind außerdem monoton fallend in t. Also ist der Schnitt $\omega(x)$ ebenfalls nichtleer, kompakt und zusammenhängend (sic!).

(b) Nach dem Theorem von Bolzano-Weierstraß besitzt jede unbeschränkte Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \nearrow \infty$ eine Teilfolge $(t_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, so daß

$$\lim_{k\to\infty} x(t_{n_k}) = z \in \omega(x).$$

Insbesondere gilt für diese Teilfolge

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{dist} x(t_{n_k}), \omega(x)) = 0.$$

Daraus und aus einem Widerspruchsargument folgt die Behauptung.

Die Aussage (c) folgt direkt aus der Aussage (b) und aus der Definition von $\omega(x)$.

(d) Sei $z_0 \in \omega(x) \subseteq D$, und sei z maximale Lösung der Differentialgleichung (4.1) zur Anfangsbedingung $z(0) = z_0$. Sei $t \in \mathbb{R}_+$. Nach Definition der ω-Limesmenge existiert eine Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \nearrow \infty$, so daß

$$\lim_{n\to\infty} x(t_n) = z_0.$$

Aus der stetigen Abhängigkeit von Lösungen von den Daten folgt

$$\lim_{n\to\infty} x(t+t_n) = z(t).$$

Insbesondere gilt $z(t) \in \omega(x)$ für alle t aus dem maximalen Existenzintervall. Die ω-Limesmenge ist also invariant. Da sie auch kompakt ist, und wegen der Eigenschaften von maximalen Lösungen, ist z globale Lösung.

Theorem 4.11 (Invarianzprinzip von La Salle[1]). *Sei V eine Lyapunovfunktion für die Differentialgleichung* (4.1)*, und sei* $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ *eine globale, beschränkte Lösung dieser Differentialgleichung, so daß* $\overline{\{x(t) : t \geq 0\}} \subseteq D$. *Dann gilt:*

(a) *Der Grenzwert* $\lim_{t\to\infty} V(x(t)) =: V_\infty$ *existiert.*

(b) *Die Funktion V ist konstant* $= V_\infty$ *auf* $\omega(x)$.

(c) *Falls V eine strikte Lyapunovfunktion ist, dann ist jedes Element* $z_0 \in \omega(x)$ *ein Gleichgewichtspunkt.*

[1] La Salle ()

Beweis. (a) Das Bild $\{x(t) : t \geq 0\}$ der Lösung ist nach Voraussetzung beschränkt. Der Abschluß dieses Bildes ist also kompakt, und nach Voraussetzung auch eine Teilmenge von D. Da V stetig ist, ist die Funktion $t \mapsto V(x(t))$ beschränkt. Da V aber auch eine Lyapunovfunktion ist, ist die Verknüpfung $V \circ x$ monoton fallend. Also existiert der Grenzwert $\lim_{t\to\infty} V(x(t))$.

(b) Sei $z \in \omega(x_0)$. Dann existiert eine Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \nearrow \infty$, so daß $\lim_{n\to\infty} x(t_n) = z$. Aus der Stetigkeit von V folgt

$$V(z) = \lim_{n\to\infty} V(x(t_n)) = V_\infty.$$

(c) Sei nun V eine strikte Lyapunovfunktion. Ist dann z eine Lösung der Differentialgleichung (4.1) zu einem Anfangswert $z(0) \in \omega(x)$, dann ist die Funktion $t \to V(z(t))$ konstant wegen (b) und wegen Lemma 4.10. Aus der Charakterisierung einer strikten Lyapunovfunktion folgt, daß die Funktion z selbst schon konstant ist, und das heißt, daß $z(0) \in \omega(x)$ ein Gleichgewichtspunkt ist.

Korollar 4.12. *Sei V eine strikte Lyapunovfunktion für die Differentialgleichung* (4.1)*. Falls die Menge der Gleichgewichtspunkte*

$$S := \{x_0 \in D : f(x_0) = 0\}$$

diskret ist, dann konvergiert jede globale, beschränkte Lösung $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ dieser Differentialgleichung mit $\overline{\{x(t) : t \geq 0\}} \subseteq D$ für $t \to \infty$ gegen einen Gleichgewichtspunkt.

Beweis. Sei $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ eine globale, beschränkte Lösung der Differentialgleichung (4.1). Es gelte $\overline{\{x(t) : t \geq 0\}} \subseteq D$. Weil V eine strikte Lyapunovfunktion ist, ist nach La Salles Invarianzprinzip (Theorem 4.11 (c)) die ω-Limesmenge $\omega(x)$ eine Teilmenge von S. Nach Lemma 4.10 (a) ist die ω-Limesmenge zusammenhängend und nichtleer. Weil S nach Voraussetzung diskret ist, ist die ω-Limesmenge eine einelementige Menge. Nach Lemma 4.10 (c) existiert dann $\lim_{t\to\infty} x(t)$ und der Grenzwert ist ein Gleichgewichtspunkt.

Korollar 4.13. *Sei $V : D \to \mathbb{R}$ eine Lyapunovfunktion für die Differentialgleichung* (4.1)*, und sei $x_0 \in D$ ein Gleichgewichtspunkt.*

(a) *Ist der Punkt x_0 ein striktes, lokales Minimum von V, d. h. es gibt eine Umgebung $\tilde{U} \subseteq D$ von x_0, so daß $V(x) > V(x_0)$ für alle $x \in \tilde{U} \setminus \{x_0\}$, dann ist x_0 stabil.*

(b) *Ist V zusätzlich eine strikte Lyapunovfunktion und ist x_0 ein isolierter Gleichgewichtspunkt, dann ist x_0 asymptotisch stabil.*

Beweis. (a) Sei $U \subseteq D$ eine Umgebung von x_0. Dann ist auch $U \cap \tilde{U}$ eine Umgebung von x_0, und somit gibt es ein $r > 0$, so daß die abgeschlossene Kugel $\bar{B}(x_0, r)$ in $U \cap \tilde{U}$ liegt. Dann ist $V(x) > V(x_0)$ für alle $x \in \bar{B}(x_0, r) \setminus \{x_0\}$. Wegen Kompaktheit des Randes $\partial B(x_0, r)$ und wegen Stetigkeit von V ist dann $m := \min_{\partial B(x_0,r)} V(x) > V(x_0)$. Sei $c \in]V(x_0), m[$ und sei

$$U_c := \{x \in \bar{B}(x_0, r) : V(x) \leq c\}.$$

Dann ist U_c eine kompakte Umgebung von x_0. Sei $x_1 \in U_c$ und sei x die maximale Lösung der Differentialgleichung (4.1) zur Anfangsbedingung $x(0) = x_1$. Da V eine Lyapunovfunktion für diese Differentialgleichung ist, ist die Verknüpfung $V(x)$ monoton fallend, und nach Definition von U_c und von m, bleibt die maximale Lösung in U_c und damit in $\bar{B}(x_0, r)$ für alle t im maximalen Existenzintervall. Da die Menge U_c kompakt ist und in D liegt, kann die maximale Lösung x weder in endlicher Zeit aufblasen noch sich dem Rand von D annähern. Sie ist also eine globale Lösung, die die ganze Zeit in U_c und damit in U bleibt.

(b) Nach (a) ist der Gleichgewichtspunkt x_0 schon stabil. Insbesondere gibt es eine kompakte Umgebung $U \subseteq D$ von x_0, die invariant unter der Differentialgleichung (4.1) ist. Wenn man U klein genug wählt, was immer möglich ist, dann ist x_0 der einzige Gleichgewichtspunkt in U. Jede Lösung, die in U startet, bleibt in dieser kompakten Menge, und nach Korollar 4.12 konvergiert sie gegen eine Gleichgewichtslösung, die notwendigerweise in U liegt. Also konvergiert jede Lösung, die in U startet, für $t \to \infty$ gegen x_0. Also ist x_0 asymptotisch stabil.

Kapitel 5
Mannigfaltigkeiten

5.1 Definition und Grundbegriffe

Wenn wir im Folgenden Teilmengen $\mathscr{M}$ des euklidischen Raums betrachten, dann betrachten wir sie immer auch versehen mit der induzierten, euklidischen Metrik. Es existieren in der Literatur mehrere Definitionen von Mannigfaltigkeiten. Für die Definition von Untermannigfaltigkeiten des euklidischen Raums ist es praktisch, das folgende Theorem als Grundlage zu nehmen.

Theorem 5.1. *Sei $\mathscr{M} \subseteq \mathbb{R}^{N+M}$ eine Menge, $a \in \mathscr{M}$ und $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) **(Lokale Parameterdarstellung I)** *Es gibt eine offene Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^{N+M}$ von a, eine offene Teilmenge $\bar{W} \subseteq \mathbb{R}^N$ und eine C^k-Funktion $\psi : \bar{W} \to V \subseteq \mathbb{R}^{N+M}$, so daß*

   (a) $\psi(\bar{W}) = \mathscr{M} \cap V$,

   (b) $\psi : \bar{W} \to \mathscr{M} \cap V$ *ist ein Homöomorphismus, und*

   (c) $J_\psi(\psi^{-1}(a)) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N+M})$ *ist injektiv.*

(ii) **(Lokale Parameterdarstellung II)** *Es gibt eine offene Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^{N+M}$ von a, eine offene Teilmenge $W \subseteq \mathbb{R}^{N+M}$ und einen C^k-Diffeomorphismus $\Psi : W \to V$, so daß $\Psi(\{x \in W : x_{N+1} = \cdots = x_{N+M} = 0\}) = \mathscr{M} \cap V$.*

(iii) **(Lokale Darstellung über implizite Funktion)** *Es gibt eine offene Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^{N+M}$ von a und eine C^k-Funktion $F : V \to \mathbb{R}^M$, so daß*

   (a) $F|_{\mathscr{M} \cap V} = 0$ *und*

   (b) $J_F(a) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^{N+M}, \mathbb{R}^M)$ *ist surjektiv.*

(iv) **(Lokale Darstellung als Graph)** *Es gibt, nach Permutation der Koordinaten in $\mathbb{R}^{N+M}$ (!), eine offene Umgebung $\bar{W} \subseteq \mathbb{R}^N$ von $\bar{a}$, eine offene Umgebung $W' \subseteq \mathbb{R}^M$ von a' (hierbei ist $a = (\bar{a}, a')$), und eine C^k-Funktion $f : \bar{W} \to W'$, so daß*

$$\{(\bar{x},x') = x \in \bar{W} \times W' : x \in \mathscr{M}\} = \{(\bar{x}, f(\bar{x})) : \bar{x} \in \bar{W}\}.$$

Beweis. Die Implikation (iii)⇒(iv) ist eine direkte Konsequenz aus dem Satz über die implizite Funktion.

Aus der Aussage (iv) folgt die Aussage (i), wenn man $\psi : \bar{W} \to \mathbb{R}^{N+M}$ durch $\psi(\bar{x}) = (\bar{x}, f(\bar{x}))$ definiert.

(i)⇒(ii) Seien ψ und $\bar{W}$ wie in (i). Ergänze eine Basis $\{n_1, \dots, n_N\}$ des Bildes von $J_\psi(\psi^{-1}(a))$, welches nach Voraussetzung ein N-dimensionaler Unterraum von $\mathbb{R}^{N+M}$ ist, mit den Vektoren $n_{N+1}, \dots, n_{N+M} \in \mathbb{R}^{N+M}$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^{N+M}$. Definiere sodann die Funktion $\Psi : \bar{W} \times \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^{N+M}$ durch $\Psi(x) := \Psi(\bar{x},x') := \psi(\bar{x}) + \sum_{j=1}^M x_{N+j} n_{N+j}$. Die Jacobimatrix $J_\Psi(\Psi^{-1}(a))$ ist dann invertierbar! Aus dem Satz über die lokale Inverse folgt dann, daß es eine offene Umgebung $W \subseteq \mathbb{R}^{N+M}$ von $\Psi^{-1}(a) = (\psi^{-1}(a), 0, \dots, 0)$ und eine offene Umgebung $\tilde{V}$ von a gibt, so daß $\Psi : W \to V$ ein Diffeomorphismus ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man die Umgebung $\tilde{V}$ so klein wählen, daß $\tilde{V} \subseteq V$. Nach Definition von Ψ gilt offensichtlich $\Psi(\{x \in W : x_{N+1} = \cdots = x_{N+M} = 0\}) = \mathscr{M} \cap \tilde{V}$.

(ii)⇒(iii) Definiere $F : V \to \mathbb{R}^M$ durch $F(x) := \Psi^{-1}(x)' := (\Psi^{-1}(x)_{N+j})_{1\le j\le M}$ (die Funktion Ψ^{-1} verknüpft mit der Projektion P auf die letzten M Koordinaten). Dann ist $F(\mathscr{M} \cap V) = 0$ und $J_F(a) = P \circ J_{\Psi^{-1}}(a)$ ist surjektiv.

Eine Teilmenge $\mathscr{M} \subseteq \mathbb{R}^{N+M}$ heißt **C^k-Mannigfaltigkeit** oder genauer **C^k-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{N+M}$**, wenn in jedem Punkt $a \in \mathscr{M}$ eine der vier äquivalenten Aussagen (und damit jede Aussage) aus Theorem 5.1 gilt, wobei N, M nicht vom Punkt a abhängen sollen. Die Zahl N ist dann die **Dimension** der Mannigfaltigkeit, und M ihre **Kodimension**.

Beispiele 5.2. (a) **Kurven.** Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $\psi : I \to \mathbb{R}^{1+M}$ eine injektive C^k-Funktion (ersetze "injektiv" durch stärkere Bedingung), so daß $\psi'(t) \neq 0$ for every $t \in I$. Dann ist $\mathscr{M} = \psi(I)$ eine eindimensionale C^k-Mannigfaltigkeit (wir benutzen hier die Eigenschaft (i) aus Theorem 5.1).

(b) **Die N-Sphären.** Die **N-Sphäre**

$$S^N := \{x \in \mathbb{R}^{N+1} : \sum_{i=1}^{N+1} x_i^2 = 1\}$$

ist eine N-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit. In der Tat ist die N-Sphäre Nullstellenmenge der Funktion $F : \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \sum_{i=1}^{N+1} x_i^2 - 1$ und für alle $x \in S^N$ ist die Jacobimatrix (der Gradient) $J_F(x) = (2x_1, \dots, 2x_{N+1})$ surjektiv (da $\neq 0$) (wir benutzen hier die Eigenschaft (iii) aus Theorem 5.1).

(c) **Zylinder.**

(d) **Die speziellen, linearen Gruppen.** Für jedes $N \in \mathbb{N}_{\ge 2}$ ist die spezielle, lineare Gruppe

$$SL(N) := \{A \in \mathbb{R}^{N\times N} : \det A = 1\}$$

eine (N^2-1)-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit (und gleichzeitig eine Gruppe bezüglich der Matrixmultiplikation!). In der Tat ist die spezielle, lineare Gruppe $SL(N)$ Nullstellenmenge der Funktion $F : \mathbb{R}^{N\times N} \to \mathbb{R}$, $F(A) = \det A - 1$, und für alle $A \in SL(N)$ ist die Jacobimatrix (der Gradient) $J_F(A)$ surjektiv (da $\neq 0$; man zeige zum Beispiel $J_F(A)A \neq 0$) (wir benutzen wieder die Eigenschaft (iii) aus Theorem 5.1).

(e) **Das Möbiusband.**

(f) **Produktmannigfaltigkeiten.** Sind $\mathscr{M} \subseteq \mathbb{R}^m$ und $\mathscr{N} \subseteq \mathbb{R}^n$ zwei C^k-Mannigfaltigkeiten, dann ist das kartesische Produkt $\mathscr{M} \times \mathscr{N} \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{m+n}$ ebenfalls eine Mannigfaltigkeit, nämlich der Dimension $\dim\mathscr{M} + \dim\mathscr{N}$, wie man leicht nachprüft. Zum Beispiel ist $T_2 := S_1 \times S_1 \subseteq \mathbb{R}^4$ eine (kompakte) 2-dimensionale Mannigfaltigkeit; sie heißt **Torus**. Für jedes $0 < r < R$ ist der Torus T_2 "diffeomorph" zur Menge

$$T := \{((R + r\cos\alpha)\cos\beta, (R + r\cos\alpha)\sin\beta, r\sin\alpha) : (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\},$$

die eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ und damit leichter vorstellbar ist.

Sei $\mathscr{M} \subseteq \mathbb{R}^{N+M}$ eine N-dimensionale Mannigfaltigkeit. Seien $V \subseteq \mathbb{R}^{N+M}$, $\bar{W} \subseteq \mathbb{R}^N$ offene Mengen, und $\psi : \bar{W} \to \mathbb{R}^{N+M}$ wie in Eigenschaft (i) des Theorems 5.1. Sei $U := V \cap \mathscr{M} = \psi(\bar{W}) \subseteq \mathscr{M}$ das Bild von ψ (eine offene Teilmenge von $\mathscr{M}$), und sei $\varphi = \psi^{-1}$. Dann heißt (φ, U) **Karte** von $\mathscr{M}$. Eine Familie $((\varphi_\alpha, U_\alpha))_{\alpha\in A}$ von Karten von $\mathscr{M}$ heißt **Atlas**, wenn $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ eine Überdeckung von $\mathscr{M}$ ist, d. h. $\mathscr{M} = \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$. Jede Mannigfaltigkeit besitzt nach Theorem 5.1 einen Atlas: in der Tat gibt es nach Theorem 5.1 (i) für jedes $a \in \mathscr{M}$ eine Karte (φ_a, U_a), so daß U_a eine Umgebung von a (in $\mathscr{M}$!) ist. Wählt man für jedes $a \in \mathscr{M}$ eine solche Karte, dann ist $(U_a)_{a\in\mathscr{M}}$ eine Überdeckung von $\mathscr{M}$, und somit $((\varphi_a, U_a))_{a\in\mathscr{M}}$ ein Atlas. Ist die Mannigfaltigkeit kompakt, dann besitzt sie immer einen endlichen Atlas (d. h. die Indexmenge A kann endlich gewählt werden). Dies folgt direkt aus der Definition eines Atlas und der Kompaktheit.

Übung 5.3 *Man zeige, daß es für den Kreis S_1 einen Atlas gibt, der aus zwei Karten besteht, nicht aber einen Atlas, der nur aus einer Karte besteht.*

Sei $\mathscr{M} \subseteq \mathbb{R}^{N+M}$ eine N-dimensionale Mannigfaltigkeit. Sei $a \in \mathscr{M}$ und sei (φ, U) eine Karte mit $a \in U$. Dann heißt

$$T_a\mathscr{M} := \{a\} \times \operatorname{Rg} J_{\varphi^{-1}}(\varphi(a))$$

Tangentialraum und

$$N_a\mathscr{M} := \{a\} \times (\operatorname{Rg} J_{\varphi^{-1}}(\psi(a)))^\perp$$

Normalenraum an die Mannigfaltigkeit $\mathscr{M}$ im Punkt a (das orthogonale Komplement ist hier bezüglich des euklidischen Skalarprodukts zu nehmen). Des Weiteren heißt

$$T\mathscr{M} := \bigcup_{a\in\mathscr{M}} T_a\mathscr{M}$$

Tangentialbündel bzw. **Tangentialmannigfaltigkeit** und entsprechend

$$N\mathscr{M} := \bigcup_{a\in\mathscr{M}} N_a\mathscr{M}$$

Normalenbündel.

Eine stetige Funktion $f : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ zwischen zwei C^k-Mannigfaltigkeiten $\mathscr{M}$ und $\mathscr{N}$ ist **differenzierbar** (bzw. l**-mal stetig differenzierbar** oder $\in C^l$ für ein $1 \leq l \leq k$), wenn für jede Karte (φ, U) von $\mathscr{M}$ und jede Karte (ψ, V) von $\mathscr{N}$ die Abbildung $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ von $\varphi(f^{-1}(V) \cap U))$ nach $\psi(V)$ differenzierbar (bzw. l-mal stetig differenzierbar) ist. Mit $C^l(\mathscr{M}, \mathscr{N})$ bezeichnen wir die Menge aller l-mal stetig differenzierbaren Funktionen von $\mathscr{M}$ nach $\mathscr{N}$; wir schreiben kurz $C^l(\mathscr{M})$ anstelle von $C^l(\mathscr{M}, \mathbb{R})$.

5.2 Integration auf Mannigfaltigkeiten

Für eine Funktion $f : \mathscr{M} \to \mathbb{R}$ heißt die Menge

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in \mathscr{M} \,:\, f(x) \neq 0\}}^{\mathscr{M}}$$

Träger der Funktion.

Lemma 5.4. (a) *Die Funktion $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ gegeben durch*

$$f(x) := \begin{cases} \exp(\frac{1}{1-\|x\|^2}) & \textit{falls } \|x\| < 1, \\ 0 & \textit{falls } \|x\| \geq 1, \end{cases}$$

ist beliebig oft differenzierbar und $\operatorname{supp} f = \bar{B}(0,1)$ *(abgeschlossene Einheitskugel).*

(b) *Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ eine Funktion mit kompakten Träger und $g \in R(\mathbb{R}^N)$ (Riemannintegrierbare Funktionen). Dann ist die* **Faltung** *$f * g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ gegeben durch*

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^N} f(y)g(x-y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\, dy$$

beliebig oft differenzierbar und hat kompakten Träger.

(c) *Sei $\mathscr{M}$ eine C^k-Mannigfaltigkeit, (ψ, U) eine Karte und $K \subseteq U$ kompakt. Dann gibt es eine Funktion $f \in C^k(\mathscr{M})$ mit*

$$\begin{aligned} &0 \leq f \leq 1, \\ &f = 1 \textit{ auf } K \textit{ und} \\ &\operatorname{supp} f \subseteq U. \end{aligned}$$

Beweis. (a) Nachrechnen.

(b)

Lemma 5.5. *Sei $\mathscr{M} \subseteq \mathbb{R}^N$ eine beliebige, nichtleere Menge, versehen mit der induzierten, euklidischen Metrik. Dann gilt:*

(a) *Die Menge*
$$\mathscr{B} := \{B(x,r) \cap \mathscr{M} \,:\, x \in \mathbb{Q}^N, r \in \mathbb{Q}_{>0}\}$$
ist eine abzählbare **topologische Basis** *von $\mathscr{M}$ in dem Sinne, daß jedes Element von $\mathscr{B}$ eine offene Teilmenge von $\mathscr{M}$ ist, und daß es für jede offene Menge $U \subseteq \mathscr{M}$ eine Teilmenge $\mathscr{B}' \subseteq \mathscr{B}$ gibt, so daß $U = \bigcup_{V \in \mathscr{B}'} V$.*

(b) *Jede offene Überdeckung von $\mathscr{M}$ besitzt eine abzählbare Teilüberdeckung.*

Bemerkung. Man sagt, daß ein metrischer Raum, der eine abzählbare, topologische Basis besitzt, das **zweite Abzählbarkeitsaxiom** erfüllt. Ein metrischer Raum, in dem jede offene Überdeckung eine abzählbare Teilüberdeckung besitzt, heißt auch **Lindelöfraum**. Der Beweis von von Lemma 5.5 (b) zeigt, daß jeder metrische Raum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, ein Lindelöfraum ist.

Beweis. (a) Die Abzählbarkeit der Menge $\mathscr{B}$ folgt aus der Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$. Es ist auch klar, daß jedes Element von $\mathscr{B}$ eine offene Teilmenge von $\mathscr{M}$ ist; man verwendet dazu im Wesentlichen, daß die Kugeln $B(x,r)$ offen in $\mathbb{R}^N$ sind. Sei nun schließlich $U \subseteq \mathscr{M}$ offen. Für jedes $x \in U$ gibt es nun ein $V_x \in \mathscr{B}$, so daß $x \in V_x$ und $V_x \subseteq U$. Sei $\mathscr{B}' := \{V_x \,:\, x \in U\}$. Dann ist $\bigcup_{V \in \mathscr{B}'} = U$.

(b) Sei $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine offene Überdeckung von $\mathscr{M}$, d. h. die Mengen U_α sind offen in $\mathscr{M}$ und $\mathscr{M} = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Sei $\mathscr{B}$ eine abzählbare topologische Basis von $\mathscr{M}$ (zum Beispiel wie in (a)). Für jedes $\alpha \in A$ gibt es dann eine (notwendigerweise abzählbare) Teilmenge $\mathscr{B}_\alpha \subseteq \mathscr{B}$, so daß $U_\alpha = \bigcup_{V \in \mathscr{B}_\alpha} V$. Sei $\mathscr{B}' := \bigcup_{\alpha \in A} \mathscr{B}_\alpha$. Dann ist auch $\mathscr{B}' \subseteq \mathscr{B}$ abzählbar, und offensichtlich ist auch $\mathscr{B}'$ eine offene Überdeckung von $\mathscr{M}$, d. h. $\mathscr{M} = \bigcup_{V \in \mathscr{B}'} V$. Für jedes $V \in \mathscr{B}'$ gibt es ein $\alpha_V \in A$ mit $V \subseteq U_{\alpha_V}$. Damit ist $(U_{\alpha_V})_{V \in \mathscr{B}'}$ eine abzählbare Teilüberdeckung von $\mathscr{M}$.

Eine Teilmenge eines metrischen Raums heißt **relativ kompakt**, wenn ihr Abschluß kompakt ist. Ein metrischer Raum, in dem jeder Punkt eine kompakte Umgebung besitzt, heißt **lokal kompakt**. Der Raum $\mathbb{R}^N$ ist lokal kompakt, weil für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}^N$ die abgeschlossene Kugel $B(x,r)$ ($r > 0$ beliebig) eine kompakte Umgebung ist.

Lemma 5.6. *Sei $\mathscr{M} \subseteq \mathbb{R}^{N+M}$ eine Mannigfaltigkeit. Dann gilt:*

(a) *Jeder Punkt $a \in \mathscr{M}$ besitzt eine* **relativ kompakte**, *offene Umgebung $U \subseteq \mathscr{M}$. Insbesondere ist $\mathscr{M}$ lokal kompakt.*

(b) *Es gibt eine Folge (K_n) von kompakten Teilmengen von $\mathscr{M}$, so daß $K_n \subseteq K_{n+1}$ und $\mathscr{M} = \bigcup_n \mathring{K}_n$.*

Beweis. (a) Sei $a \in \mathscr{M}$. Sei (φ, V) eine Karte mit $a \in V$. Es gibt ein $r > 0$, so daß
$$B(\varphi(a), r) \subseteq \bar{B}(\varphi(a), r) \subseteq \varphi(V).$$

Da $\varphi : V \to \varphi(V)$ ein Homöomorphismus ist, da $\bar{B}(\varphi(a),r)$ kompakt ist, und da stetige Bilder von kompakten Mengen kompakt sind (Satz von Weierstraß), ist $U := \varphi^{-1}(B(\varphi(a),r))$ eine relativ kompakte, offene Umgebung von a.

(b) Nach (a) gibt es für jedes $a \in \mathscr{M}$ eine relativ kompakte, offene Umgebung $U_a \subseteq \mathscr{M}$. Insbesondere besitzt $\mathscr{M}$ eine Überdeckung aus relativ kompakten, offenen Teilmengen. Nach Lemma 5.5 (b) besitzt diese Überdeckung eine abzählbare Teilüberdeckung $(U_n)_n$. Setzte nun $K_n := \bigcup_{j\le n} \bar{U}_j$. Dann ist K_n kompakt, $K_n \subseteq K_{n+1}$ und $\mathscr{M} \supseteq \bigcup_n \mathring{K}_n \supseteq \bigcup_n U_n = \mathscr{M}$.

Lemma 5.7 (Partition der Eins). *Sei $\mathscr{M} \subseteq \mathbb{R}^{N+M}$ eine N-dimensionale C^k-Mannigfaltigkeit mit einem Atlas $((\varphi_\alpha, U_\alpha))_{\alpha\in A}$. Dann gibt es eine Familie $(\pi_\alpha)_{\alpha\in A}$ in $C^k(M)$ dergestalt, daß*

(a) $0 \le \pi_\alpha \le 1$,

(b) $\operatorname{supp} \pi_\alpha \subseteq U_\alpha$,

(c) *für jedes $a \in \mathscr{M}$ gibt es eine offene Umgebung $V \subseteq \mathscr{M}$ von a, so daß* $\operatorname{supp}\pi_\alpha \cap V = \emptyset$ *für alle bis auf endlich viele $\alpha \in A$, d. h. die Familie $(\pi_\alpha)_{\alpha\in A}$ ist* **lokal endlich**,

(d) $\sum_\alpha \pi_\alpha = 1$.

Diese Familie $(\pi_\alpha)_{\alpha\in A}$ heißt dem Atlas untergeordnete **Partition der Eins**.

Beweis. Sei $(K_n)_{n\ge 0}$ eine Folge von kompakten Teilmengen von $\mathscr{M}$, so daß $K_n \subseteq K_{n+1}$ und $\mathscr{M} = \bigcup_n \mathring{K}_n$ (siehe Lemma 5.6 (b)). Sei $K_{-1} = \emptyset$. Setze sodann $W_n := K_n \setminus \mathring{K}_{n-1}$ $(n \ge 0)$. Dann ist W_n kompakt, $W_n \cap W_m = \emptyset$ für $|n-m| \ge 2$, und $\bigcup_n W_n = \mathscr{M}$. Sei $V_n := \mathring{W}_{n-1} \cup W_n \cup \mathring{W}_{n+1}$. Dann ist V_n eine offene Menge und $W_n \subseteq V_n$.

Nachdem $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ eine offene Überdeckung von $\mathscr{M}$ ist, gibt es für jedes $n \ge 0$ eine endliche Teilmenge $A_n \subseteq A$, so daß $W_n \subseteq \bigcup_{\alpha\in A_n} U_\alpha$. Offensichtlich ist auch $W_n \subseteq \bigcup_{\alpha\in A_n}(U_\alpha \cap V_n)$. Nachdem W_n kompakt ist, gibt es ein $\delta > 0$, so daß die abgeschlossenen Mengen

$$(U_\alpha \cap V_n)^\delta := \{x \in U_\alpha \cap V_n : \operatorname{dist}(x, \mathscr{M} \setminus (U_\alpha \cap V_n) \ge \delta\}$$

immer noch W_n überdecken. Für jedes $\alpha \in A_n$ können wir dann nach Lemma 5.4 (c) ein $\chi_{n,i} \in C^k(M)$ wählen, so daß $0 \le \chi_{m,i} \le 1$, $\chi_{n,i} = 1$ auf $(U_\alpha \cap V_n)^\delta \cap W_n$ und $\operatorname{supp}\chi_{n,i} \subseteq U_\alpha \cap V_n \subseteq U_\alpha$. Insgesamt erhalten wir so eine lokal endliche Familie $(\chi_{n,i})_{n\ge 0, \alpha\in A_n}$, so daß $\chi := \sum_{\substack{n\ge 0\\ \alpha\in A_n}} \chi_{n,i} > 0$ überall auf $\mathscr{M}$. Setze nun $\pi_\alpha = \sum_{n\ge 0} \chi_{n,i}/\chi$ $(\alpha \in A)$.

Wir führen nun das Integral auf einer Mannigfaltigkeit schrittweise ein. Sei $\mathscr{M} \subseteq \mathbb{R}^{N+M}$ eine C^k-Mannigfaltigkeit, (φ, U) eine Karte und $f : \mathscr{M} \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, so daß $\operatorname{supp} f$ kompakt und eine Teilmenge von U ist. Dann definieren wir

$$\int_U f := \int_{\varphi(U)} f \circ \varphi^{-1}(x) \sqrt{\det J_{\varphi^{-1}}(x)^T J_{\varphi^{-1}}(x)}\, dx,$$

falls das Integral auf der rechten Seite existiert.

Lemma 5.8. *Die Definition des Integrals $\int_U f$ ist unabhängig von der Wahl der Karte (φ, U), d. h. wenn (ψ, V) eine weitere Karte ist und* $\operatorname{supp} f \subseteq V$*, dann ist*

$$\int_{\varphi(U)} f \circ \varphi^{-1}(x) \sqrt{\det J_{\varphi^{-1}}(x)^T J_{\varphi^{-1}}(x)}\, dx = \int_{\psi(V)} f \circ \psi^{-1}(x) \sqrt{\det J_{\psi^{-1}}(x)^T J_{\psi^{-1}}(x)}\, dx.$$

Beweis. Nach dem Transformationssatz ist

$$\begin{aligned}
&\int_{\varphi(U)} f \circ \varphi^{-1}(x) \sqrt{\det J_{\varphi^{-1}}(x)^T J_{\varphi^{-1}}(x)}\, dx = \\
&= \int_{\psi(V)} f \circ \psi^{-1}(y) \sqrt{\det J_{\varphi^{-1}}(x)^T J_{\varphi^{-1}}(x)}\, |\det J_{\varphi \circ \psi^{-1}}(y)|\, dy \\
&= \int_{\psi(V)} f \circ \psi^{-1}(y) \sqrt{\det J_{\varphi \circ \psi^{-1}}(y)^t J_{\varphi^{-1}}(x)^T J_{\varphi^{-1}}(x) J_{\varphi \circ \psi^{-1}}(y)}\, dy
\end{aligned}$$

und

$$J_{\varphi^{-1}}(x) J_{\varphi \circ \psi^{-1}}(y) = J_{\psi^{-1}}(y),$$

wie man leicht sieht, wenn man die Parametrisierungen φ^{-1} und ψ^{-1} lokal zu Diffeomorphismen Φ^{-1} und Ψ^{-1} auf Teilmengen von $\mathbb{R}^{N+M}$ fortsetzt.

Sei nun $f : \mathscr{M} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so daß $\operatorname{supp} f$ kompakt ist. Dann definieren wir

$$\int_{\mathscr{M}} f := \sum_{\alpha \in A} \int_{U_\alpha} f \pi_\alpha,$$

wobei $((\varphi_\alpha, U_\alpha))_{\alpha \in A}$ ein Atlas von $\mathscr{M}$ und $(\pi_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine untergeordnete Partition der Eins ist. Man beachte, daß aufgrund der lokalen Endlichkeit der Partition der Eins im Allgemeinen nur abzählbar viele der Integrale $\int_{U_\alpha} f$ ungleich Null sind, und weil f kompakten Träger hat, sind in der Tat nur endlich viele dieser Integrale ungleich Null. Somit ist die Summe auf der rechten Seite wohldefiniert. Ist $((\psi_\beta, V_\beta))_{\beta \in B}$ ein weiterer Atlas und $(\sigma_\beta)_{\beta \in B}$ eine diesem Atlas untergeordnete Partition der Eins, dann gilt

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\in A}\int_{U_\alpha} f\,\pi_\alpha &= \sum_{\alpha\in A}\sum_{\beta\in B}\int_{U_\alpha} f\,\pi_\alpha\,\sigma_\beta\\ &= \sum_{\alpha\in A}\sum_{\beta\in B}\int_{U_\alpha\cap V_\beta} f\,\pi_\alpha\,\sigma_\beta\\ &= \sum_{\beta\in B}\sum_{\alpha\in A}\int_{U_\alpha\cap V_\beta} f\,\pi_\alpha\,\sigma_\beta\\ &= \sum_{\beta\in B}\sum_{\alpha\in A}\int_{V_\beta} f\,\pi_\alpha\,\sigma_\beta\\ &= \sum_{\beta\in B}\int_{V_\beta} f\,\sigma_\beta,\end{aligned}$$

und somit ist die Definition des Integrals $\int_{\mathscr{M}} f$ unabhängig von der Wahl des Atlas und der Partition der Eins.

5.3 Der Gaußsche Integralsatz

Wir sagen, daß eine offene Teilmenge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ einen C^k-**Rand** besitzt, wenn $\partial\Omega$ eine $(N-1)$-dimensionale C^k-Mannigfaltigkeit ist. Wenn Ω einen C^k-Rand besitzt, dann gibt es nach Theorem 5.1 zu jedem Punkt $a \in \partial\Omega$ eine offene Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^N$, eine offene Menge $W \subseteq \mathbb{R}^N$ und einen C^k-Diffeomorphismus $\Phi : V \to W$, so daß $\Phi(V\cap\partial\Omega) = \{y \in W : y_N = 0\} =: W_0$. Wir wollen der Einfachheit halber annehmen, daß $\Phi(V\cap\Omega) = \{y \in W : y_N < 0\} =: W_-$ und $\Phi(V\cap\bar{\Omega}^c) = \{y \in W : y_N > 0\} =: W_+$. In jedem Punkt $a \in \partial\Omega$ ist der Tangentialraum $(N-1)$-dimensional, und somit ist der Normalenraum eindimensional. Im Normalenraum gibt es einen eindeutig bestimmten Vektor $\nu(a)$ der euklidischen Länge 1, so daß für alle $t > 0$ klein genug $a + t\nu \notin \Omega$. Dieser eindeutig bestimmte Vektor heißt **äußere Normale**.

Lemma 5.9 (Bestimmung der äußeren Normalen). *Seien V, $W \subseteq \mathbb{R}^N$ offen, und sei $\Phi : V \to W$ ein Diffeomorphismus, so daß $\Phi(V\cap\partial\Omega) = W_0$, $\Phi(V\cap\Omega) = W_-$ und $\Phi(V\cap\bar{\Omega}^c) = W_+$. Dann ist, für alle $a \in V\cap\partial\Omega$,*

$$\begin{aligned}\nu(a) &= (\nabla\Phi_N)(a)/\|(\nabla\Phi_N)(a)\| = (\partial_N\Phi^{-1})(\Phi(a))/\|(\partial_N\Phi^{-1})(\Phi(a))\|\\ &= (\nabla\Phi_N)(a)\,\|(\partial_N\Phi^{-1})(\Phi(a))\| = (\partial_N\Phi^{-1})(\Phi(a))\,\|(\nabla\Phi_N)(a)\|.\end{aligned}$$

Beweis. Für alle $y \in W_0$ ist

$$J_\Phi(\Phi^{-1}(y))J_{\Phi^{-1}}(y) = I,$$

d. h., für alle $1 \le i,\, j \le N$,

$$\langle(\nabla\Phi_\alpha)(\Phi^{-1}(y)), \partial_j\Phi^{-1}(y)\rangle = \delta_{i,j},$$

wobei $\delta_{i,j}$ das Kroneckersymbol ist. Da die Vektoren $\partial_j \Phi^{-1}(y)$ für $1 \leq j \leq N-1$ und $y \in W_0$ den Tangentialraum im Punkt $a = \Phi^{-1}(y)$ aufspannen, heißt das, daß der Vektor $(\nabla \Phi_N)(\Phi^{-1}(y))$ ein Normalenvektor sein muß, da er senkrecht auf diesen Tangentialvektoren steht. Wegen $\Phi(V \cap \Omega) = W_{\cdot}$ und $\Phi(V \cap \bar{\Omega}^c) = W_+$ ist $\Phi_N(x) < 0$ für $x \in \Omega$ und $\Phi_N(x) > 0$ für $x \in \bar{\Omega}^c$. Somit gilt $a + t\,(\nabla \Phi_N)(a) \notin \Omega$ für alle $t > 0$ klein genug. Damit ist $(\nabla \Phi_N)(a)$ ein positives Vielfaches der äußeren Normalen, d. h.

$$\nu(a) = (\nabla \Phi_N)(a)/\|(\nabla \Phi_N)(a)\|.$$

Für die weiteren Gleichheiten betrachten wir für $y \in W_0$ die symmetrische, positiv definite Matrix $J_{\Phi^{-1}}(y)^T J_{\Phi^{-1}}(y)$. Der Raum $\mathbb{R}^N$ besitzt eine orthogonale Basis aus Eigenvektoren dieser Matrix. Weil der Raum $\{y \in \mathbb{R}^N : y_N = 0\}$ invariant unter dieser Matrix ist, ist der zu diesem Raum orthogonale Einheitsvektor e_N ein Eigenvektor, d. h. $J_{\Phi^{-1}}(y)^T J_{\Phi^{-1}}(y) e_N = c\, e_N$ für ein $c > 0$. Also ist

$$J_{\Phi^{-1}}(y)^T (\partial_N \Phi^{-1})(y) = c\, e_N,$$

bzw.

$$\langle (\partial_j \Phi^{-1})(y), (\partial_N \Phi^{-1})(y) \rangle = c\, \delta_{j,N} \text{ für alle } 1 \leq j \leq N.$$

Da wieder die Vektoren $\partial_j \Phi^{-1}(y)$ für $1 \leq j \leq N-1$ und $y \in W_0$ den Tangentialraum im Punkt $a = \Phi^{-1}(y)$ aufspannen, heißt das, daß der Vektor $(\partial_N \Phi^{-1})(y)$ ein Normalenvektor sein muß, da er senkrecht auf diesen Tangentialvektoren steht. Damit sind $(\partial_N \Phi^{-1})(y)$ und $(\nabla \Phi_N)(\Phi^{-1}(y))$ kolinear. Wir haben oben aber schon gezeigt, daß $\langle (\nabla \Phi_N)(\Phi^{-1}(y)), \partial_N \Phi^{-1}(y) \rangle = 1$, und daraus folgen die restlichen Identitäten.

Wir definieren schließlich den Raum

$$C^k(\bar{\Omega}) := \{ f \in C^k(\Omega) : \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^N, |\alpha| \leq k : \partial^\alpha f \text{ besitzt stetige Fortsetzung auf } \bar{\Omega} \}.$$

Die folgenden drei Integralsätze sind äquivalent.

Theorem 5.10 (Gaußscher Integralsatz). *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ eine offene Menge mit C^1-Rand und sei $f \in C^1(\bar{\Omega})$ eine Funktion mit kompakten Träger in $\bar{\Omega}$. Dann gilt für alle $1 \leq i \leq N$*

$$\int_\Omega \partial_i f = \int_{\partial\Omega} f\, \nu_i.$$

Theorem 5.11 (Gaußsche Regel der partiellen Integration). *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ eine offene Menge mit C^1-Rand und seien $f, g \in C^1(\bar{\Omega})$ zwei Funktionen mit kompakten Träger in $\bar{\Omega}$. Dann gilt für alle $1 \leq i \leq N$*

$$\int_\Omega \partial_i f\, g = \int_{\partial\Omega} f\, g\, \nu_i - \int_\Omega f\, \partial_i g.$$

Theorem 5.12 (Gaußscher Divergenzsatz). *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ eine offene Menge mit C^1-Rand und sei $F \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ eine Funktion mit kompakten Träger in $\bar{\Omega}$. Dann*

$$\int_\Omega \operatorname{div} F = \int_{\partial\Omega} F \cdot \nu.$$

Wir beweisen zuerst die Äquivalenz der drei Aussagen. Die Gaußsche Regel der partiellen Integration folgt aus dem Gaußschen Integralsatz, indem wir die Funktion f durch das Produkt fg mit $f,\ g \in C^1(\bar{\Omega})$ ersetzen, und die Produktregel $\partial_i(fg) = \partial_i f\, g + f\, \partial_i g$ und die Linearität des Integrals benutzen. Umgekehrt folgt der Gaußsche Integralsatz aus der Gaußschen Regel der partiellen Integration, indem wir g als eine Einschränkung einer Funktion in $C^1(\mathbb{R}^N)$ wählen, die kompakten Träger hat und auf dem Träger von f gleich 1 ist. Der Gaußsche Divergenzsatz folgt aus dem Gaußschen Integralsatz angewandt auf die einzelnen Komponenten F_i (anstelle von f) und aus der Linearität des Integrals. Schließlich folgt der Gaußsche Integralsatz aus dem Divergenzsatz, wenn man $F = (0,\dots,f,\dots,0)$ setzt (f an der i-ten Komponente von F), denn dann ist $\operatorname{div} F = \partial_i f$ und $F \cdot \nu = f\,\nu_i$. Es bleibt also, einen der drei Sätze zu beweisen. Wir beweisen hier den Gaußschen Integralsatz.

Beweis (von Theorem 5.10). Wir starten mit der folgenden Beobachtung, die dem Gaußschn Integralsatz für Funktionen mit Träger in Ω zeigt. Wenn $\operatorname{supp} f \subseteq \Omega$ (anstelle von $\operatorname{supp} f \subseteq \bar{\Omega}$), dann ist zum einen $f|_{\partial\Omega} = 0$ und wir können f außerhalb von Ω durch Null zu einer Funktion $f \in C^1(\mathbb{R}^d)$ mit kompakten Träger fortsetzen. Dann ist es auch egal, ob wir $\partial_i f$ über Ω oder über einen größeren Quader $Q =]a_1,b_1[\times\cdots\times]a_n,b_n[$ integrieren. Mit Fubini und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung erhalten wir zum Beispiel für $i = N$

$$\begin{aligned}\int_\Omega \partial_N f &= \int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_N}^{b_N} \partial_N f(x_1,\dots,x_N)\,dx_N\dots\,dx_1\\ &= \int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_{N-1}}^{b_{N-1}} f(x_1,\dots,x_N)\big|_{x_N=a_N}^{x_N=b_N}\,dx_{N-1}\dots\,dx_1\\ &= 0\\ &= \int_{\partial\Omega} f\,\nu_N.\end{aligned}$$

Die Gleichheit gilt auch für andere i, wenn man nur die Reihenfolge der Integration vertauscht. Damit gilt also der Gaußsche Integralsatz für Funktionen mit kompakten Träger in Ω

Kommen wir nun zum eigentlichen Beweis. Wir nehmen zuerst an, daß V, W und Φ wie in Lemma 5.9 gegeben sind, und daß $\operatorname{supp} f \subseteq V \cap \bar{\Omega}$. Sei $h \in C^1(\mathbb{R})$ eine Funktion, so daß $0 \le h \le 1$, $h = 1$ in einer Umgebung von 0, $\operatorname{supp} h \subseteq [-1,1]$, und $h' \ge 0$ in $[-1,0]$. Für $\delta > 0$ definieren wir außerdem $h_\delta : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ durch $h_\delta(y) = h(y_N/\delta)$. Dann gilt, für alle $\delta > 0$,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \partial_i f &= \int_\Omega \partial_i(f\,(h_\delta\circ\Phi+1-h_\delta\circ\Phi))\\ &= \int_\Omega \partial_i f(x)\,h_\delta(\Phi(x))\,dx + \int_\Omega f(x)\,\partial_i(h_\delta\circ\Phi)(x)\,dx+\\ &\quad+\int_\Omega \partial_i(f\,(1-h_\delta\circ\Phi)).\end{aligned}$$

Aufgrund der Wahl von h bzw. h_δ ist der Träger von $f\,(1-h_\delta\circ\Phi)$ eine Teilmenge von Ω, so daß das dritte Integral auf der rechten Seite nach der obigen Beobachtung gleich Null ist. Außerdem gilt offensichtlich

$$\lim_{\delta\to 0+}\int_\Omega \partial_i f(x)\,h_\delta(\Phi(x))\,dx = 0.$$

Es bleibt also, das zweite Integral auf der rechten Seite zu untersuchen. Aus der Kettenregel, der speziellen Form von h_δ und dem Transformationssatz folgt

$$\begin{aligned}&\int_\Omega f(x)\,\partial_i(h_\delta\circ\Phi)(x)\,dx\\ &= \int_\Omega f(x)\,\sum_{j=1}^N(\partial_j h_\delta)(\Phi(x))\partial_i\Phi_j(x)\,dx\\ &= \int_{V\cap\Omega} f(x)\,(\partial_N h_\delta)(\Phi(x))\partial_i\Phi_N(x)\,dx\\ &= \int_{W_-} f(\Phi^{-1}(y))\,\partial_N h_\delta(y)\,(\partial_i\Phi_N)(\Phi^{-1}(y))\,|\det J_{\Phi^{-1}}(y)|\,dy\\ &= \int_{W_-} f(\Phi^{-1}(y))\,\frac{1}{\delta}h'(y_N/\delta)(\partial_i\Phi_N)(\Phi^{-1}(y))\sqrt{\det J_{\Phi^{-1}}(y)^T J_{\Phi^{-1}}(y)}\,dy\\ &\overset{\delta\to 0+}{\to} \int_{W_0} f(\Phi^{-1}(y))(\partial_i\Phi_N)(\Phi^{-1}(y))\sqrt{\det J_{\Phi^{-1}}(y)^T J_{\Phi^{-1}}(y)}\,dy\\ &= \int_{W_0} f(\varphi^{-1}(y))\nu_i(\varphi^{-1}(y))\sqrt{\det J_{\varphi^{-1}}(y)^T J_{\varphi^{-1}}(y)}\,dy\\ &= \int_{\partial\Omega} f\,\nu_i.\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir also den Gaußschen Integralsatz für spezielle Funktionen $f\in C^1(\bar\Omega)$. Für einen Beweis des Gaußschen Integralsatzes für beliebige Funktionen $f\in C^1(\bar\Omega)$ mit kompakten Träger wählt man nun eine endliche Familie $((\Phi_\alpha,V_\alpha))_{1\le i\le n}$, wobei (V_α) eine offene Überdeckung von $\operatorname{supp} f\cap\partial\Omega$ ist, und die Φ_α Diffeomorphismen von V_α auf $W_\alpha=\Phi_\alpha(V_\alpha)$ sind. Man ergänzt die Familie $(V_\alpha)_{1\le i\le n}$ um die offene Menge $V_0=\Omega$ und wählt dann eine der Familie $(V_\alpha)_{0\le i\le n}$ untergeordnete Partition der Eins $(\pi_\alpha)_{0\le i\le n}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \partial_i f &= \int_\Omega \partial_i (f \sum_{\alpha=0}^n \pi_\alpha) \\
&= \sum_{\alpha=0}^n \int_\Omega \partial_i (f\pi_\alpha) \\
&= \sum_{\alpha=1}^n \int_\Omega \partial_i (f\pi_\alpha) \\
&= \sum_{\alpha=1}^n \int_{\partial\Omega} f\pi_\alpha \nu_i \\
&= \int_{\partial\Omega} f \nu_i .
\end{aligned}$$

Korollar 5.13 (Green). *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, beschränkt, mit C^1-Rand. Dann gilt für alle F_1, $F_2 \in C^1(\bar{\Omega})$*

$$\int_\Omega (\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}) = \int_{\partial\Omega} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \cdot dx,$$

wobei das Integral auf der rechten Seite ein Kurvenintegral (siehe Analysis II) mit der "richtigen" Orientierung ist (Normalenvektor und Tangentialvektor bilden eine Basis von $\mathbb{R}^2$ mit der "üblichen Orientierung").

Beweis.

5.4 Der Stokessche Integralsatz

Eine Teilmenge $\mathscr{M} \subseteq \mathbb{R}^{N+M}$ ist eine **N-dimensionale C^k-Mannigfaltigkeit mit Rand**, falls es für jedes $a \in \mathscr{M}$ eine offene Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^{N+M}$ von a, eine offene Menge $\bar{W} \subseteq \mathbb{H}_N$ (wobei $\mathbb{H}_N := \{y \in \mathbb{R}^N : y_N \leq 0\}$ ein abgeschlossener Halbraum in $\mathbb{R}^N$ ist) und eine C^k-Funktion $\psi : \bar{W} \to V \subseteq \mathbb{R}^{N+M}$ gibt, so daß

(a) $\psi(\bar{W}) = \mathscr{M} \cap V$,

(b) $\psi : \bar{W} \to \mathscr{M} \cap V$ ist ein Homöomorphismus, und

(c) $J_\psi(\psi^{-1}(a)) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N+M})$ ist injektiv.

Im Vergleich zur Definition einer Mannigfaltigkeit bzw. im Vergleich zu lokalen Parameterdarstellung in Theorem **??** (a) ist es nun neu, daß die Menge $\bar{W}$ nicht eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^N$ sondern des abgeschlossenen Halbraums $\mathbb{H}_N$ ist (offen ist hier auch relativ zu verstehen: die Menge $\bar{W}$ ist offen im Halbraum $\mathbb{H}_N$t, und eventuell nicht in $\mathbb{R}^N$). Die Menge $\bar{W}$ kann dabei entweder eine offene Teilmenge in $\operatorname{int}\mathbb{H}_N = \{y \in \mathbb{R}^N : y_N < 0\}$ sein (in diesem Fall ist sie auch offen in $\mathbb{R}^N$ und es ändert sich nichts gegenüber der bisherigen Parameterdarstellung), oder aber sie hat nichtleeren Schnitt mit dem Rand $\partial\mathbb{H}_N = \{y \in \mathbb{R}^N : y_N = 0\}$ und (um es wirklich interessant zu machen) $\psi^{-1}(a)$ ist ein Element dieses Randes. Wir bezeichnen die

Menge aller solchen Punkte $a \in \mathscr{M}$ mit $\partial\mathscr{M}$ und nennen sie den **Rand** von $\mathscr{M}$. Es kann natürlich sein, daß der so definierte Rand $\partial\mathscr{M}$ leer ist. Dann ist $\mathscr{M}$ tatsächlich eine Mannigfaltigkeit ohne Rand, so wie bisher definiert. Beachte für den Fall, daß $\bar{W}$ nichtleeren Schnitt mit dem Rand $\partial\mathbb{H}_N$ hat, der Raum $C^k(\bar{W})$ ähnlich wie im vorigen Abschnitt definiert ist:

$$C^k(\bar{W};\mathbb{R}^{N+M}) := \{f \in C^k(\bar{W}_-;\mathbb{R}^{N+M}) : \forall\alpha \in \mathbb{N}_0^N, |\alpha| \le k : \partial^\alpha f \text{ besitzt stetige} \\ \text{Fortsetzung auf } \bar{W}\},$$

wobei $\bar{W}_- := \{y \in \bar{W} \,:\, y_N < 0\}$. Die Jacobimatrix J_ψ in einem Randpunkt ist dann über stetige Fortsetzungen der partiellen Ableitungen (bzw. über eine stetige Fortsetzung der Jacobimatrizen) im Inneren von $\bar{W}$ definiert.

Um den Stokesschen Integralsatz formulieren zu können, benötigen wir zum einen etwas (multilineare) Algebra und zum anderen die Erweiterung dieser Algebra für Mannigfaltigkeiten. In der multilinearen Algebra betrachen wir Multilinearformen auf einem einzelnen Vektorraum; in der Erweiterung für Mannigfaltigkeiten betrachten wir Multilinearformen auf jedem Tangentialraum, und das in einer stetigen oder stetig differenzierbaren Abhängigkeit vom jeweiligen Punkt in der Mannigfaltigkeit.

Sei V ein endlichdimensionaler, reeller Vektorraum. Zwei Basen $(e_i)_{1\le i\le N}$ und $(\hat{e}_i)_{1\le i\le N}$ (wir schreiben die Basen bewußt als geordnete N-Tupel von Vektoren und nicht als Mengen von Vektoren) haben **dieselbe Orientierung**, falls die eindeutige, lineare Abbildung $S : V \to V$ mit $Se_i = \hat{e}_i$ $(1 \le i \le N)$ positive Determinante hat. Eine Mannigfaltigkeit $\mathscr{M}$ (mit oder ohne Rand) ist **orientierbar**, falls es einen Atlas $((\varphi_\alpha, U_\alpha))_{\alpha\in A}$ gibt, so daß für je zwei α, $\beta \in A$ die Jacobimatrix des Koordinatenwechsels $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ in jedem Punkt eine positive Determinante besitzt, d. h. $\det J_{\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1}}(y) > 0$ für alle $y \in \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$. Das Möbiusband ist nicht orientierbar, eindimensionale Mannigfaltigkeiten (Kurven), die N-Sphären, Zylinder und die speziellen, linearen Gruppen sind orientierbar.

Sei V ein (endlichdimensionaler) reeller Vektorraum und $k \in \mathbb{N}_0$. Wir bezeichnen mit $T^k(V)$ den Raum aller k**-linearen Formen** $S : \bigtimes_{i=1}^k V \to \mathbb{R}$, d. h. aller Abbildungen auf dem k-fachen kartesischen Produkt von V in die Menge der reellen Zahlen, die in jeder Komponente linear sind. Per Definition ist dabei $T^0(V) := \mathbb{R}$ und $T^1(V)$ ist der Raum aller Linearformen auf V. Ist V endlichdimensional, dann sind $T^1(V)$ und V isomorph, und man kann beide Räume miteinander identifizieren. Mit $\Lambda^k(V)$ bezeichnen wir den Unterraum aller **alternierenden,** k**-linearen Formen**v (kurz: k**-Formen**), d. h. aller $S \in T^k(V)$, so daß für alle $v_1, \ldots, v_k \in V$ und für alle Permutationen σ von $\{1,\ldots,k\}$

$$S(v_1,\ldots,v_k) = (-1)^{\operatorname{sgn}\sigma} S(v_{\sigma(1)},\ldots,v_{\sigma(k)}).$$

Auch hier gilt $\Lambda^0(V) := \mathbb{R}$ und $\Lambda^1(V) = T^1(V) \simeq V$. Während die Dimension von $T^k(V)$ mit steigendem k wächst (ist $N := \dim V$, dann ist $\dim T^k(V) = N^k$), gilt für die Dimension von $\Lambda^k(V)$ die Formel

$$\dim \Lambda^k(V) = \binom{N}{k},$$

d. h. insbesondere ist $\dim \Lambda^N(V) = 1$ und $\dim \Lambda^k(V) = 0$ für $k > N$ (ohne Beweis). Tatsächlich gibt es nur eine alternierende N-Form, die angewandt auf eine gegebene Basis gleich 1 ist. Im Falle der Standardbasis in $\mathbb{R}^N$ ist dies die Determinante (Achtung: auch hier ist es praktisch, Basen als geordnete N-Tupel aufzufassen).

Für jedes $S \in T^k(V)$ ist $\operatorname{Alt} S \in \Lambda^k(V)$ die **alternierende Projektion** auf $\Lambda^k(V)$:

$$\operatorname{Alt} S(v_1, \ldots, v_k) := \frac{1}{k!} \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \sigma) S(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}).$$

Man rechnet leicht nach, daß $\operatorname{Alt} S$ wirklich eine alternierende, k-lineare Form ist. Sind $S \in T^k(V)$ und $R \in T^l(V)$, dann definiert

$$(S \otimes R)(v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_l) := S(v_1, \ldots, v_k) \cdot R(w_1, \ldots, w_l)$$

eine Abbildung $S \otimes R \in T^{k+l}(V)$. Sind $\omega \in \Lambda^k(V)$ und $\eta \in \Lambda^l(V)$, dann heißt

$$\omega \wedge \eta := \binom{k+l}{k} \operatorname{Alt} \omega \otimes \eta$$

das **äußere Produkt** von ω und η. Per Definition ist $\omega \wedge \eta \in \Lambda^{k+l}(V)$. Das äußere Produkt ist bilinear, assoziativ ($\omega \wedge (\eta \wedge \xi) = (\omega \wedge \eta) \wedge \xi$) und antikommutativ ($\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega$).

Beispiel 5.14. Ist $(e_i)_{1 \le i \le N}$ eine Basis von V, und entwickelt man jeden Vektor $v \in V$ in dieser Basis, d. h. $v = \sum_{i=1}^N v_i e_i$, dann definiert $dx_i(v) := v_i$ eine Linearform auf V, d. h. $dx_i \in \Lambda^1(V)$. Das N-Tupel $(dx_i)_{1 \le i \le N}$ ist eine Basis von $\Lambda^1(V)$. Mit Hilfe der Definition berechnet man leicht

$$dx_i \otimes dx_j(v, w) = v_i w_j \quad (v, w \in V)$$

und

$$dx_i \wedge dx_j(v, w) = v_i w_j - w_i v_j \quad (v, w \in V).$$

Insbesondere ist $dx_i \wedge dx_j = 0$ für $i = j$. Die Familie $(dx_i \wedge dx_j)_{1 \le i < j \le N}$ ist eine Basis von $\Lambda^2(V)$. Analog konstruiert man Basen von $\Lambda^k(V)$ für alle $k \ge 2$. Für $k = N$ ist schließlich

$$dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_N$$

eine einelementige Basis des Raums $\Lambda^N(V)$. Ist $V = \mathbb{R}^N$ und $(e_i)_{1 \le i \le N}$ die Standardbasis, dann ist $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_N$ die Determinante (wir verwenden hier bei der Schreibweise übrigens die Assoziativität des äußeren Produkts).

Wir übertragen diese multilineare Algebra nun auf Mannigfaltigkeiten. Ist $\mathscr{M} \subseteq \mathbb{R}^{N+M}$ eine (der Einfachheit halber glatte) N-dimensionale Mannigfaltigkeit mit

Rand, dann ist in jedem Punkt $a \in \mathscr{M} \setminus \partial\mathscr{M}$ im Inneren der Mannigfaltigkeit der Tangentialraum $T_a\mathscr{M}$ ein N-dimensionaler Unterraum von $\mathbb{R}^{N+M}$. Insbesondere ist also der Raum der k-Formen auf $T_a\mathscr{M}$, d. h. der Raum $\Lambda^k(T_a\mathscr{M})$, wohldefiniert. Wir bezeichnen mit

$$\Lambda^k\mathscr{M} := \bigcup_{a\in\mathscr{M}} \{a\} \times \Lambda^k(T_a\mathscr{M})$$

die disjunkte Vereinigung all dieser Räume. Mit der Definition aus dieser Vorlesung ist es nicht ganz so offensichtlich, aber $\Lambda^k\mathscr{M}$ ist selbst wieder eine (glatte) Mannigfaltigkeit der Dimension $N + \binom{N}{k}$ (!!).

Eine *Differentialform k-ter Ordnung* ist ein stetig differenzierbarer **Schnitt** $\omega : \mathscr{M} \to \Lambda^k\mathscr{M}$, d. h. eine stetig differenzierbare Funktion von der Mannigfaltigkeit $\mathscr{M}$ in die Mannigfaltigkeit $\Lambda^k\mathscr{M}$ mit der Eigenschaft $\pi_1\omega(a) = a$ für alle $a \in \mathscr{M}$. Hierbei ist π_1 die Projektion auf die erste Komponente (siehe die Definition von $\Lambda^k\mathscr{M}$). In jedem Punkt a der Mannigfaltigkeit $\mathscr{M}$ ist also das Bild $\omega(a)$ ein Element von $\{a\} \times \Lambda^k(T_a\mathscr{M})$, also im Wesentlichen eine alternierende k-Form auf dem Tangentialraum $T_a\mathscr{M}$. Wir bezeichnen mit $\mathscr{A}^k(\mathscr{M})$ den Raum aller Differentialformen k-ter Ordnung.

Bemerkung 5.15. (a) Es ergibt sich die Frage, ob es überhaupt eine nichttriviale Differentialform k-ter Ordnung gibt ($0 \le k \le N$). Ohne auf die Details einzugehen, bemerkt man dazu, daß es auf offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^N$ (bzw. auf offenen Teilmengen des Halbraums $\mathbb{H}_N$) immer C^∞-Differentialformen k-ter Ordnung gibt; man nehme einfach konstante Funktionen mit Werten in $\Lambda^k(\mathbb{R}^N)$. Es gibt auf offenen Teilmengen sogar nichttriviale Differentialformen mit kompakten Träger; man nehme einfach eine nichttriviale Differentialform (eine konstante Funktion) und multipliziere diese mit einer reellwertigen C^∞-Funktion mit kompakten Träger. Mit Hilfe von Karten überträgt man diese auf gewisse offene Teilmengen einer Mannigfaltigkeit. Schließlich konstruiert man mit Hilfe einer Partition der Eins nichttriviale Differentialformen auf der gesamten Mannigfaltigkeit. Es gilt allerdings: Eine N-dimensionale Mannigfaltigkeit ist genau dann orientierbar, wenn es eine Differentialform N-ter Ordnung gibt, die in keinem Punkt verschwindet. Eine solche Differentialform heißt auch Volumenform.

(b) Sogenannte Schnitte hätten wir schon viel früher einführen können. Die Tangentialmannigfaltigkeit ist die sogenannte disjunkte Vereinigung aller Tangentialräume. Ist $\mathscr{M}$ eine glatte Mannigfaltigkeit, dann ist $T\mathscr{M}$ ebenfalls eine glatte Mannigfaltigkeit (von Dimension $2d\mathscr{M}$). Ein **Vektorfeld** bzw. **Tangentialfeld** auf $\mathscr{M}$ ist eine stetig differenzierbare Funktion $X : \mathscr{M} \to T\mathscr{M}$ mit der Eigenschaft, daß $\pi_1 X(a) = a$ für alle $a \in \mathscr{M}$, daß also für alle $a \in \mathscr{M}$ das Bild $X(a)$ im Wesentlichen ein Element des Tangentialraums $T_a\mathscr{M}$ ist (man möchte keine Funktionen betrachten, die einem Punkt $a \in \mathscr{M}$ einen Tangentialvektor im Raum $T_b\mathscr{M}$ für $b \ne a$ zuordnen). Ähnlich wie in (a) zeigt man mit Lokalisierung und mit einer Partition der Eins die Existenz von nichttrivialen Vektorfeldern.

Ist (φ, U) eine Karte der Mannigfaltigkeit $\mathscr{M}$, $U \subseteq \mathscr{M}$ offen, $\bar{W} \subseteq \mathbb{H}_N$ offen und $\varphi : U \to \bar{W}$ ein Homöomorphismus dessen Inverse stetig differenzierbar ist, dann ist, wenn man U klein genug wählt, die Ableitung $J_{\varphi^{-1}}(y)$ in jedem

Punkt $y \in \bar{W}$ injektiv. Insbesondere wird die Standardbasis $(e_i)_{1\le i\le N}$ des $\mathbb{R}^N$ für jedes $a \in U$ mittels der linearen Abbildung $J_{\varphi^{-1}}(\varphi(a))$ auf eine Basis des Tangentialraums $T_a\mathscr{M}$ abgebildet. Entsprechend erhält man für jedes $a \in \mathscr{M}$ die Basis $(dx_i(a))_{1\le i\le N}$ von $\Lambda^1(T_a\mathscr{M})$, bzw. die Basis $(dx_i(a) \wedge dx_j(a))_{1\le i<j\le N}$ von $\Lambda^2(T_a\mathscr{M})$ usw. Üblicherweise läßt man im Folgenden die Abhängigkeit vom Punkt $a \in \mathscr{M}$ weg: dann sind die $dx_i, dx_i \wedge dx_j, \dots$ Differentialformen, die zumindest lokal (in der Menge U) wohldefiniert sind. Viele der folgenden Rechnungen auf Mannigfaltigkeiten gelten nur lokal. Eine Differentialform 2. Ordnung ist lokal gegeben durch

$$\omega = \sum_{1\le i<j\le N} \alpha_{ij} dx_i \wedge dx_j,$$

wobei die $\alpha_{ij} = \alpha_{ij}(x_1,\dots,x_N)$ reellwertige Funktionen sind. Analog kann man auch Differentialformen höherer Ordnung schreiben. Zum Beispiel sind Differentialformen N-ter Ordnung (auf einer N-dimensionalen Mannigfaltigkeit) lokal gegeben durch

$$\omega = \alpha\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_N,$$

wobei α eine reellwertige Funktion ist. Wir definieren

$$\int_U \omega := \int_U \alpha,$$

wobei das Integral auf der rechten Seite wie oben definiert ist. Das Integral ist unabhängig von der Karte. Mit einer Partition der Eins kann man auch auf ganz $\mathscr{M}$ definierte Differentialformen integrieren.

Theorem 5.16 (Äußere Ableitung). *Für jede glatte Mannigfaltigkeit gibt es eindeutig definierte Abbildungen $d : \mathscr{A}^k(\mathscr{M}) \to \mathscr{A}^{k+1}(\mathscr{M})$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ mit folgenden Eigenschaften:*

(i) *Ist $f \in \Lambda^0(\mathscr{M})$ (d.h. eine stetig differenzierbare Abbildung $\mathscr{M} \to \mathbb{R}$), dann ist df das übliche Differential:*

$$df(X) := D_X f,$$

wobei $D_X f(a)$ die **Richtungsableitung** *von f an der Stelle $a \in \mathscr{M}$ in Richtung $X \in T_a\mathscr{M}$ ist.*

(ii) *Sind $\omega \in \mathscr{A}^k(\mathscr{M})$ und $\eta \in \mathscr{A}^l(\mathscr{M})$, dann gilt*

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta.$$

(iii) $d \circ d = 0$.

In lokalen Koordinaten gilt

$$\begin{aligned} d(\alpha(x_{i_1},\dots,x_{i_k})dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}) &:= d\alpha\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k} \\ &= \sum_{j=1}^{N}\frac{\partial\alpha}{\partial x_j}dx_j\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}, \end{aligned}$$

wobei $\alpha=\alpha(x_1,\dots,x_N)$ eine reellwertige Funktion ist, ebenso wie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial\alpha}{\partial x_j}$. Beachte, daß $dx_j\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}$ gleich Null sein kann, zum Beispiel dann, wenn $j=i_l$ für ein $1\le l\le k$ gilt.

Der Raum der Differentialformen $(N-1)$-ter Ordnung ist N-dimensional. Eine Basis ist (in einem Punkt $a\in\mathscr{M}$) gegeben durch die Elemente

$$dx_1\wedge\cdots\wedge dx_{i-1}\wedge dx_{i+1}\cdots\wedge dx_N.$$

Lokal ist eine Differentialform $(N-1)$-ter Ordnung gegeben durch

$$\omega=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i dx_1\wedge\cdots\wedge dx_{i-1}\wedge dx_{i+1}\cdots\wedge dx_N, \tag{5.1}$$

und für die äußere Ableitung gilt

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_i}dx_i\wedge dx_1\wedge\cdots\wedge dx_{i-1}\wedge dx_{i+1}\cdots\wedge dx_N \\ &= \left(\sum_{i=1}^{N}(-1)^{1+i}\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_i}\right)dx_1\wedge\cdots\wedge dx_N. \end{aligned}$$

Insbesondere ist

$$\int_{\mathscr{M}} d\omega=\int_{\mathscr{M}}\sum_{i=1}^{N}(-1)^{1+i}\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_i},$$

wobei das Integral auf der rechten Seite wie bisher definiert ist.

Beachte, daß der Rand $\partial\mathscr{M}$ einer N-dimensionalen Mannigfaltigkeit mit Rand eine $(N-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit ist. Die lokalen Parametrisierungen von $\mathscr{M}$ über offene Teilmengen des Halbraums $\mathbb{H}_N$ werden, wenn man sie auf den Rand des Halbraums einschränkt, zu lokalen Parametrisierungen des Randes $\partial\mathscr{M}$. Die Differentialform $(N-1)$-ter Ordnung auf der Mannigfaltigkeit $\mathscr{M}$ kann zu einer Differentialform $(N-1)$-ter Ordnung auf dem Rand eingeschränkt werden. Die Einschränkung der Differentialform (5.1) ist dann

$$\omega|_{\partial\mathscr{M}}=\alpha_N\,dx_1\wedge\cdots\wedge dx_{N-1},$$

und

$$\int_{\partial\mathscr{M}}\omega=\int_{\partial\mathscr{M}}\alpha_N.$$

Mit diesen Definitionen erhalten wir den allgemeinen Satz von Stokes.

Theorem 5.17 (Satz von Stokes). *Sei* $\mathscr{M} \subseteq \mathbb{R}^{N+M}$ *eine kompakte, orientierbare, N-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand. Dann gilt für jede Differentialform* $(N-1)$*-ter Ordnung* ω *auf* $\mathscr{M}$

$$\int_{\mathscr{M}} d\omega = \int_{\partial \mathscr{M}} \omega.$$

References

[Arnaudiès (2000)] Arnaudiès, J.-M. : *Equations différentielles de fonctions de variable réelle ou complexe*. Ellipses, Paris, 2000.

[Avez (1983)] Avez, A. : *Calcul différentiel*. Collection Maitrise de mathématiques pures. Masson, Paris, New York, Barcelone, 1983.

[Ayres Jr. (1986)] Ayres Jr., F. : *Théorie et applications des équations différentielles*. McGraw Hill, Paris, 1986.

[Azé et al. (2002)] Azé, D., Constans, G., Hiriart-Urruty, J.-B. : *Calcul différentiel et équations différentielles*. Dunod, Paris, 2002.

[Cartan (1967)] Cartan, H. : *Cours de calcul différentiel*. Hermann, Paris, 1967.

[Heuser (1989)] Heuser, H. : *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. B. G. Teubner, Stuttgart, 1989.

[Rouche and Mawhin (1973a)] Rouche, N., Mawhin, J. : *Equations différentielles ordinaires. Tome I: Théorie générale*. Masson et Cie., Editeurs, Paris, 1973a.

[Rouche and Mawhin (1973b)] Rouche, N., Mawhin, J. : *Equations différentielles ordinaires. Tome II: Stabilité et solutions périodiques*. Masson et Cie., Editeurs, Paris, 1973b.