Ralph Chill, Eva Fašangová

Funktionentheorie

– Sommersemester 2016 –

July 23, 2016

Contents

Chapter 1
Motivationen

1) Analysis: Potenzreihen der Form $z \to \sum a_n z^n$ sind im Wesentlichen komplexe Funktionen, d. h. Funktionen einer komplexen Veränderlichen.
2) Physik: komplexe Wechselstromrechnung, Strömung in Bereichen, Transformationen.
3) Geometrie: Die Ebene wird mit komplexen Zahlen modelliert, die Bewegungen (Rotation, Verschiebung, Streckung) mit der komplexen Addition und der komplexen Multiplikation.
4) Algebra: Lösen algebraische Gleichungen, z.B. $z^2 + 1 = 0$, Zerlegung von Polynomen; Matrizen; Körper, Vektorraum, Algebra
5) Differentialgleichungen: Lösungsmethoden, Transformationen
6) Zahlenteorie

Die komplexe Wechselstromrechnung ist eine mathematische Beschreibung rein harmonischer Zeitvorgänge (d. h. Funktionen $f(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$) in linearen Netzwerken durch statische komplexe Zeiger (d. h. $Ae^{j\varphi}$; die zugehörige komplexe Zeitfunktion ist $F(t) = Ae^{j(\omega t+\varphi)}$). Weil $\mathbb{R}$-lineare Operationen die Kreisfrequenz ω nicht ändern, reicht es, die Änderung der zwei Größen A (Amplitude) und φ anzugeben. Als harmonischen Zeitvorgang kann man zum Beispiel Strom, Spannung oder Widerstand modellieren. Addition, Differenz, Ableitung, Integration, aber auch Lösung linearer Differentialgleichung sind $\mathbb{R}$-lineare Operationen. Maschen- und Knotengesetz sind lineare Gesetze. Die Reihenschaltung in einem RLC-Stromkreiss ist linear, ändert also die Kreisfrequenz nicht, aber auch die Parallelschaltung (obwohl sie nicht linear ist) ändert die Kreisfrequenz nicht. Um Probleme für harmonische Zeitvorgänge zu lösen, kann es sich lohnen, zuerst in komplexe Zeiger zu transformieren, das transformierte Problem zu lösen, dann mit Rücktransformation das Resultat zu erhalten. Das ursprüngliche Problem kann zum Beispiel eine lineare Differentialgleichung sein, und das transformierte Problem eine algebraische Gleichung, die einfacher zu lösen ist.

Strömungsprobleme in zweidimensionalen komplizierten Gebieten lassen sich lösen, wenn man dieses Gebiet mit der Hilfe einer winkeltreuen komplexen Funktion auf ein einfacheres Gebiet abbilden kann, und das Problem dort lösen kann.

Manche Eigenschaften aus der reellen Analysis sind erst dann zu verstehen, wenn man sie im komplexen Zahlenkörper untersucht. So ist es zum Beispiel mit Potenzreihen, etwa wenn man den Konvergenzradius einer Potenzreihe bestimmen möchte. Jede (reelle) Funktion, die sich in eine (reelle) Taylorreihe entwickeln lässt, ist eigentlich auch eine komplexe Funktion, nämlich eine komplexe Potenzreihe mit rein reellen Koeffizienten.

In der Zahlentheorie ist die komplexe Analysis auch ein wesentliches Hilfsmittel. Eine Beweisstrategie für den Primzahlsatz benutzt Kenntnisse über die sogenannte Riemannsche Zetafunktion, die eine komplexe Funktion ist. Die Vermutung über die nichttrivialen Nullstellen dieser Funktion ist bis heute unbewiesen, dabei aber von außerordentlicher Wichtigkeit.

Analytische Geometrie in der zweidimensionalen euklidischen Ebene lässt sich auch mit den komplexen Zahlen modellieren. Gleichungen der Geraden und Kurven kann man als komplexe Gleichungen ansehen, um Schnittpunkte als Lösungen zu bekommen. Außerdem kann man mit Hilfe der komplexen Zahlen andere Geometrien, wie etwa die nichteuklidische Geometrie, untersuchen.

Übungsblatt 0: Wiederholung

0.1 Listen Sie die Axiome von $\mathbb{R}$ auf !

0.2 Geben Sie die Definition der Konvergenz von Folgen in $\mathbb{R}$ bzw. in $\mathbb{R}^n$ an !

0.3 Wiederholen Sie die Definitionen und die Rechenregeln für komplexe Zahlen (algebraische Form, geometrische Form, Exponentialform; Addition, Multiplikation, Potenz) !

0.4 Geben Sie die Definition eines Vektorraumes über einen Körper an !

Chapter 2
Komplexe Zahlen

1) Algebraische Struktur von $\mathbb{C}$: Körper; auch Vektorraum über $\mathbb{R}$, über $\mathbb{C}$; Algebra; (keine Ordnungsrelation)
2) Geometrische Struktur von $\mathbb{C}$: Euklidische Ebene; Drehstreckungen
3) Topologische Struktur von $\mathbb{C}$: Metrik, Umgebung (wie Euklidisch; vollständig)
4) Riemannsche Sphäre $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (kein Körper; Topologie kompakt)
5) Quaternionen (Körper, nicht Kommutativ, auch Vektorraum)

2.1 Definition der Menge der komplexen Zahlen

Wie ist der Körper der komplexen Zahlen eingeführt?

Ad hoc

Der Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ kann "direkt" eingeführt werden. Wir definieren

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &:= \mathbb{R}^2, \\ 0_{\mathbb{C}} &:= (0_{\mathbb{R}}, 0_{\mathbb{R}}) \\ 1_{\mathbb{C}} &:= (1_{\mathbb{R}}, 0_{\mathbb{R}}), \\ i &:= (0_{\mathbb{R}}, 1_{\mathbb{R}}), \end{aligned}$$

so daß jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ eine eindeutige Darstellung der Form

$$z = x + iy$$

(eigentlich: $z = x1_{\mathbb{C}} + yi$) mit reellen Koeffizienten x und y besitzt. Wir nennen x den **Realteil** von z und y den **Imaginärteil** von z, und wir schreiben $\operatorname{Re} z := x$, $\operatorname{Im} z := y$. Auf $\mathbb{C}$ betrachten wir die von $\mathbb{R}^2$ geerbte Addition, nämlich

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) \\ &:= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \end{aligned}$$

und wir definieren die Multiplikation

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) \\ &:= (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + i(x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1). \end{aligned}$$

Dann ist $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ein Körper mit Nullelement $0_{\mathbb{C}}$ und Einselement $1_{\mathbb{C}}$ (wir werden im Folgenden einfach 0 und 1 schreiben). Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{C}, \\ x &\mapsto (x, 0), \end{aligned}$$

ist ein injektiver Körperhomomorphismus, der es uns erlaubt, die reellen Zahlen als “Teilmenge” der reellen Zahlen aufzufassen. Man bemerke, daß in den komplexen Zahlen die Gleichung $z^2 = -1$ eine Lösung besitzt, nämlich $z = i$ (und $z = -i$). In der Tat hat man folgende Multiplikationstabelle:

·	1	i
1	1	i
i	i	-1

Algebra

Man kann den Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ auch algebraisch einführen, indem man von der Menge der natürlichen Zahlen ausgeht.

1) $\mathbb{N} := (\{0, 1, 2, \dots\}, +, \cdot, \leq)$ = Menge der natürlichen Zahlen. Die Existenz und die Eigenschaften der natürlichen Zahlen werden entweder mit den Peano-Axiomen postuliert, oder man konstruiert die natürlichen Zahlen ausgehend von den Zermelo-Fraenkel-Axiomen der naiven Mengenlehre.

2) $\mathbb{Z}$:= Erweiterung um Lösungen der Gleichung $x + n = m$ mit $n, m \in \mathbb{N}$. Formal ist $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \times \mathbb{N} / \sim$ für eine geeignete Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

3) $\mathbb{Q}$:= Erweiterung um Lösungen der Gleichung $x \cdot n = m$ mit $n, m \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$. Formal ist $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / \sim$ für eine geeignete Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Der Körper $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist geordnet mit der natürlichen Ordnungsrelation, aber er ist nicht vollständig.

4) $\mathbb{R}$:= Vervollständigung von $\mathbb{Q}$. Formal ist $\mathbb{R}$ ein geeigneter Raum von Äquivalenzklassen von Cauchyfolgen in $\mathbb{Q}$. Der Körper $(\mathbb{R},+,\cdot)$ ist immer noch geeordnet, und im per Konstruktion auch vollständig.
5) $\mathbb{C}$:= Körpererweiterung von $\mathbb{R}$ um Lösungen der Gleichung $x^2 = -1$. Dann ist $(\mathbb{C},+,\cdot)$ ein Körper, auf dem es keine sinnvolle Ordnungsrelation mehr gibt. Beweis....

Geometrie

Eine weitere Möglichkeit der Einführung von $\mathbb{C}$ sieht wie folgt aus. Sei

$$\mathbb{R}^{2\times 2} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

die Menge aller reellen 2×2-Matrizen, die auch mit der Menge aller linearen Abbildungen auf $\mathbb{R}^2$ identifiziert werden kann. Mit der Matrizenaddition $+$ und der Matrizenmultiplikation $\cdot$ bildet $\mathbb{R}^{2\times 2}$ einen nichtkommutativen Ring. Sei $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ die Einheitsmatrix (Einselement). Die Gleichung $Z^2 = -E$ besitzt in $\mathbb{R}^{2\times 2}$ eine Lösung, zum Beispiel $Z = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Matrizen der Form $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ $(a,\, b \in \mathbb{R})$ entsprechen geometrisch den Drehstreckungen der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$. Setzt man

$$\mathbb{C} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\},$$

d. h. $\mathbb{C}$ ist die Menge aller Drehstreckungen, dann ist $\mathbb{C}$ mit der von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ geerbten Addition und Multiplikation ein Körper.

Wir fassen mögliche Definitionen von $\mathbb{C}$ zusammen:

Def. A $\mathbb{C}$ ist die Menge aller Paare $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit den Operationen ....

Def. B $\mathbb{C}$ ist die Menge aller formalen Ausdrücke $x + \mathrm{i}y$, wobei $x,\, y \in \mathbb{R}$ und i ein Symbol ist, mit ....

Def. C $\mathbb{C}$ ist die Menge der Punkte der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ mit ...

Def. D $\mathbb{C}$ ist die Menge aller Drehstreckungen der Ebene $\mathbb{R}^2$ mit ....

Def. E $\mathbb{C}$ ist der Zerfällungskörper des über $\mathbb{R}$ irreduziblen Polynoms $x^2 + 1$.

2.2 Topologische Eigenschaften von $\mathbb{C}$

Auf der Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen definieren wir den **Betrag**

$$|\cdot| : \mathbb{C} \to [0,\infty),$$
$$z = x + iy \mapsto |z| := \sqrt{x^2 + y^2},$$

d. h. $|\cdot|$ ist die von $\mathbb{R}^2$ geerbte euklidische Norm. Dann ist $\mathbb{C}$ ein metrischer Raum bezüglich der induzierten Metrik $d(z_1, z_2) := |z_1 - z_2|$. Es gelten folgende Eigenschaften für den Betrag:

a) (Dreiecksungleichung) Für alle z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$ gilt

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|.$$

b) Für alle z, z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$ gilt

$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2| \text{ und}$$
$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} \quad (z \ne 0).$$

Wie in jedem metrischen Raum sind auch in $\mathbb{C}$ die Begriffe der konvergenten Folge, der Cauchyfolge, der offenen Menge, der abgeschlossenen Menge und der Umgebung definiert. Mit Hilfe des Betrages definiert man außerdem den Begriff der beschränkten Menge.

a) Sei $z_0 \in \mathbb{C}$, $U \subseteq \mathbb{C}$. Die Menge U heißt **Umgebung von** z_0 (in $\mathbb{C}$), falls es eine positive reelle Zahl r gibt, so daß $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\} \subseteq U$.

b) Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ heißt **offen** (in $\mathbb{C}$), falls sie Umgebung von allen $z_0 \in U$ ist.

c) Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{C}$ heißt **abgeschlossen** (in $\mathbb{C}$), falls ihr Komplement $U := \mathbb{C} \setminus A$ offen ist.

d) Eine Teilmenge $B \subseteq \mathbb{C}$ heißt **beschränkt**, wenn $\sup_{z \in B} |z| < \infty$.

e) Eine Folge (z_n) in $\mathbb{C}$ **konvergiert gegen** $z \in \mathbb{C}$ falls es für jede Umgebung U von z ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $z_n \in U$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\ge n_0}$ gilt. Schreibweise: $z = \lim_{n\to\infty} z_n$ oder $z_n \to z$.

f) Eine Folge (z_n) in $\mathbb{C}$ ist eine **Cauchyfolge**, falls es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $|z_n - z_m| \le \varepsilon$ für alle n, $m \in \mathbb{N}_{\ge n_0}$ gilt.

Proposition 2.1. *Es gilt*

$$\left(z_n \xrightarrow{\text{in } \mathbb{C}} z\right) \Leftrightarrow \left(\operatorname{Re} z_n \xrightarrow{\text{in } \mathbb{R}} \operatorname{Re} z \text{ und } \operatorname{Im} z_n \xrightarrow{\text{in} \mathbb{R}} \operatorname{Im} z\right)$$

Korollar 2.2. a) *Eine konvergente Folge in* $\mathbb{C}$ *hat genau einen Grenzwert.*

b) *Jede eine Cauchy-Folge in* $\mathbb{C}$ *konvergiert. (Wir sagen auch, daß* $\mathbb{C}$ *vollständig ist).*

c) *Jede* **beschränkte Folge** *in* $\mathbb{C}$ *besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Fazit: Auf $\mathbb{C}$ sind Umgebungen, Konvergenz definiert.

2.3 Grenzwerte und Stetigkeit

Für Abbildungen auf Teilmengen von $\mathbb{C}$ (bzw. $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$) nach $\mathbb{C}$ (bzw. $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$) kann man Grenzwerte und Stetigkeit definieren, weil diese Mengen topologische (sogar: metrische) Räume sind. Wenn es sich um Vektorräume handelt ($\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$), kann man insbesondere auch lineare Abbildungen betrachten. Wenn beide Strukturen vorhanden sind, kann man Differenzierbarkeit als Approximierbarkeit mit einer linearer Abbildung definieren (siehe nächstes Kapitel).

Definition 2.3. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ eine beliebige Teilmenge, $f : D \to \mathbb{C}$ eine Abbildung, und sei $z_0 \in \bar{D}$ ein **Häufungspunkt** von D, d. h. es existiert eine Folge (z_n) in D mit $z_n \neq z_0$ und $z_n \xrightarrow{\text{in}} \mathbb{C}$.

a) Wir sagen, daß f in z_0 den Grenzwert $w \in \mathbb{C}$ besitzt, falls es für jede Umgebung $U \subseteq \mathbb{C}$ von w eine Umgebung $V \subseteq \mathbb{C}$ von z_0 gibt, so daß $f(V \cap D \setminus z_0) \subseteq U$. Wir schreiben: $\lim_{z \to z_0} f(z) = w$.

b) Sei nun zusätzlich $z_0 \in D$. Wir sagen, daß f **in** z_0 **stetig** ist, falls es für jede Umgebung $U \subseteq \mathbb{C}$ von $f(z_0)$ eine Umgebung $V \subseteq \mathbb{C}$ von z_0 gibt, so daß $f(V \cap D) \subseteq U$.

c) Wir sagen, daß f **stetig** ist, wenn f in jedem Punkt stetig ist.

Die obige Definition ist beliebig übertragbar auf Funktionen f zwischen topologischen (natürlich auch: metrischen) Räumen, da in diesen Räumen die Begriffe der Umgebung bzw. offenen Menge definiert sind. Für uns interessant sind insbesondere auch Funktionen $f : D \subseteq \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ auf der Riemannschen Sphäre.

Beispiele von stetigen Funktionen in der Gaußschen Zahlenebene $\mathbb{C}$ oder der Riemannschen Sphäre.

a) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = az + b$.

b) $f : D \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{z}$ mit $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

c) $f : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $f(z) := \frac{1}{z}$ für $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, $f(0) := \infty$, und $f(\infty) := 0$. Diese Funktion von $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ nach $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ist stetig bezüglich der Topologie der Riemannsche Sphäre.

d) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \bar{z}$, wobei $\bar{z}$ die zu z **komplex konjugierte Zahl** ist.

e) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = |z|$.

Proposition 2.4. *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ eine beliebige Teilmenge, $f : D \to \mathbb{C}$ eine Abbildung, und sei $z_0 \in D$ ein Häufungspunkt von D. Dann gilt:*

a) *Die Funktion f ist genau dann stetig in z_0, wenn* $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$.

b) *Die Funktion f ist genau dann stetig in z_0, wenn für alle Folgen (z_n) in D gilt:*
$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(z_0).$$

c) *Die Funktion f ist genau dann stetig, wenn Urbilder offener Mengen (in $\mathbb{C}$) offen (in D) sind.*

2.4 Die Quaternionen

Die (reellen) Quaternionen sind die Menge

$$\mathbb{H} := \{q = x_0 + \mathrm{i}x_1 + \mathrm{j}x_2 + \mathrm{k}x_3 : x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\},$$

wobei i, j, k Symbole sind. Die Menge $\mathbb{H}$ ist mit der natürlichen, "koordinatenweisen" Addition versehen, sowie mit einer Multiplikation, die sich aus der folgenden Multiplikationstabelle ergibt:

·	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

Dann gilt:

a) $\mathbb{H}$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$, der isomorph zu $\mathbb{R}^4$ ist.

b) $\mathbb{H}$ ist eine Divisionsalgebra, d. h. es ist assoziative Multiplikation definiert, es gilt ein Distributivgesetz, und jedes $q \neq 0$ besitzt eine multiplikative Inverse.

c) $\mathbb{H}$ ist ein Schiefkörper, d. h. $\mathbb{H}$ erfüllt alle Körperaxiome bis auf das Axiom, daß die Multiplikation kommutativ ist (siehe Multiplikationstabelle).

d) $\mathbb{H}$ ist ein metrischer Raum (wenn man die Metrik von $\mathbb{R}^4$ überträgt). Insbesondere kann man auch den Betrag eines Elements von $\mathbb{H}$ angeben (übertrage die euklidische Norm von $\mathbb{R}^4$ auf $\mathbb{H}$).

Proposition 2.5 (Frobenius). *Alle endlich dimensionalen, assoziativen, kommutativen Divisionsalgebren über $\mathbb{R}$ sind: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$. Alle endlich dimensionalen, assoziativen Divisionsalgebren über $\mathbb{R}$ sind: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$. (Jeweils bis auf Isomorphismus.)*

Übungsblatt 1: Komplexe Zahlen

1.1 Skizzieren Sie folgende Punktmengen in der Gaußsche Zahlenebene:

a) $\{z \in \mathbb{C} : |z+1| > 2\}$,
b) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq -2\}$,
c) $\{z \in \mathbb{C} : z = 0 \text{ oder } |\operatorname{Arg} z| \leq \frac{\pi}{2}\}$,
d) $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| < |z+1|\}$.

1.2 Beweisen Sie, daß für alle z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$ die Dreiecksungleichung $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ gilt ! (D. h. führen Sie diese Aussage auf die Axiome von $\mathbb{R}$ zurück !)

1.3 Sei $L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ die Menge aller $\mathbb{R}$-linearen Abbildungen von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ nach $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Von der linearen Algebra wissen wir, daß diese Menge durch die Menge $\mathbb{R}^{2\times 2}$ aller reellen 2×2-Matrizen darstellbar ist und daß sie eine nichtkommutative Gruppe bezüglich Verkettung (= Matrizenmultiplikation) bildet. Für jedes $A \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ definieren Sie eine zugehörige $\mathbb{R}$-lineare Abbildung von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$! Beschreiben Sie die Menge derjenigen Elemente, die eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ repräsentieren ! Beweisen Sie, daß diese Untermenge eine kommutative Gruppe bezüglich der Verkettung bildet !

1.4 Sei M die Menge aus der Aufgabe 1.1 (a) - (d). Untersuchen Sie ob M in $\mathbb{C}$ offen ist, bzw. ob $M \cup \{\infty\}$ in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ offen ist !

Chapter 3
Holomorphie

3.1 Holomorphe Funktionen

Im Folgenden sei immer $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt **differenzierbar im Punkt** $z_0 \in U$, falls der Grenzwert

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0)$$

existiert, und dann heißt $f'(z_0)$ die Ableitung von f in z_0. Die Funktion f heißt **differenzierbar**, wenn sie differenzierbar in jedem Punkt $z_0 \in U$ ist. Sie heißt **holomorph**, wenn sie differenzierbar und die Ableitung $f' : U \to \mathbb{C}$ stetig ist. Wir sagen schließlich, daß eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ auf einer beliebigen Teilmenge von D holomorph ist, wenn sie sich zu einer auf einer Umgebung von D definierten, holomorphen Funktion fortsetzen läßt. Außerdem heißt eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ auf einer Umgebung von ∞ in der Riemannsche Sphäre **holomorph in** ∞, wenn die Funktion $0 \mapsto f(\infty)$ bzw. $z \mapsto f(\frac{1}{z})$ für $z \neq 0$, $\frac{1}{z} \in U$, in einer Umgebung von 0 holomorph ist.

Wie im Fall von Funktionen einer reellen Variable zeigt man einfach, daß jede differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ stetig ist. Insbesondere sind holomorphe Funktionen stetig.

Aus den Rechenregeln für Grenzwerte folgt wie für Funktionen einer reellen Variable, daß Summen, Produkte, Quotienten und Verknüpfungen von holomorphen Funktionen wieder holomorph sind (Quotienten nur auf dem natürlichen Definitionsbereich). Dabei gelten für die Ableitungen jeweils auch die üblichen Rechenregeln wie etwa Produktregel, Quotientenregel oder Kettenregel.

Beispiele 3.1. a) Konstante Funktionen $f : U \to \mathbb{C}$ sind holomorph mit $f' = 0$.

b) Die identische Funktion $f : U \to \mathbb{C}$, $f(z) = z$ ist holomorph mit $f'(z) = 1$.

c) Polynome der Form $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ sind holomorph. Dies folgt aus (b) und der obigen Bemerkung über Summen und Produkte holomorpher Funktionen.

d) Rationale Funktionen der Form $f = \frac{p}{q}$ mit Polynomen p, q sind holomorph auf dem natürlichen Definitionsbereich $\mathbb{C} \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, wobei die λ_i die Nullstellen von q sind.

e) Die Funktion $f(z) = \frac{1}{z}$ ist holomorph auf dem natürlichen Definitionsbereich $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

f) Die Funktionen $z \mapsto \operatorname{Re} z$, $z \mapsto \operatorname{Im} z$, $z \mapsto |z|$ oder $z \mapsto \bar{z}$ sind zwar stetig aber *nicht* holomorph, egal, wie man die offene Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ als Definitionsbereich wählt.

Ist im Folgenden $f : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion, so definieren wir ihren Realteil $u : U \to \mathbb{R}$ und ihren Imaginärteil $v : U \to \mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned} u(x,y) &:= \operatorname{Re} f(x+iy), \\ v(x,y) &:= \operatorname{Im} f(x+iy) \quad ((x,y) \in U), \end{aligned}$$

wobei wir U auch mit einer Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ identifizieren.

Theorem 3.2. *Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ ist genau dann holomorph, wenn ihr Realteil $u : U \to \mathbb{R}$ und ihr Imaginärteil $v : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar als reelle Funktionen sind und die* **Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen**

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \quad \textit{und} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

gelten.

Beweis. $\Rightarrow$ Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann existiert in jedem $z = x + iy \in U$ der Grenzwert

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \quad = \lim_{s+it \to 0} \frac{u(x+s, y+t) - u(x,y) + i(v(x+s, y+t) - v(x,y))}{s+it}$$

Betrachtet man zuerst $h = s$ (d. h. man setzt $t = 0$), und betrachtet jeweils den Real- und den Imaginärteil getrennt, dann sieht man, daß u und v partiell nach x differenzierbar sind, und es gilt

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x,y).$$

Aus der Stetigkeit von f' folgt außerdem, daß die partiellen Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial v}{\partial x}$ stetig sind.

Betrachtet man sodann $h = it$ (d. h. man setzt $s = 0$), dann sieht man daß u und v partiell nach y differenzierbar sind, und es gilt

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y).$$

Aus der Stetigkeit von f' folgt außerdem, daß die partiellen Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial v}{\partial x}$ stetig sind. Insbesondere sind u und v stetig differenzierbar. Indem man außerdem die rechten Seiten der letzten beiden Gleichungen vergleicht, erhält man die Cauchy-Riemannschen Gleichungen.

$\Leftarrow$ Seien u und v stetig differenzierbar, so daß die Cauchy-Riemannschen Gleichungen gelten. Sei $z = x + iy \in U$. Per Definition gilt für alle $h = s + it$ mit $z + h \in U$

$$\begin{aligned} u(x+s, y+t) &= u(x,y) + \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\,s + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\,t + o(h), \\ v(x+s, y+t) &= v(x,y) + \frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\,s + \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\,t + o(h), \end{aligned}$$

wobei die Reste $o(h)$ in der ersten und der zweiten Zeile zwar verschieden sein können, aber beide die Bedingung $\lim_{h\to 0} \frac{o(h)}{h} = 0$ erfüllen. Damit und mit den Cauchy-Riemannschen Gleichungen folgt

$$\begin{aligned} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \frac{u(x+s, y+t) - u(x,y) + i(v(x+s,y+t) - v(x,y))}{s+it} \\ &= \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\,s + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\,t}{s+it} \\ &\quad + i\,\frac{\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\,s + \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\,t}{s+it} \\ &\quad + \frac{o(h)}{h} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\,\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) + \frac{o(h)}{h}. \end{aligned}$$

Also ist f differenzierbar mit stetiger Ableitung $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\,\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$, d. h. f ist holomorph.

Es sei f holomorph und die Funktionen $u, v : U \to \mathbb{R}$ seien zweimal stetig differenzierbar. Dann folgt aus dem Lemma von Schwarz und den Cauchy-Riemannschen Gleichungen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0,$$

und ähnlich

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$$

d. h. der Realteil und der Imaginärteil sind harmonische Funktionen. Wir erinnern daran, daß eine Funktion $u : U \to \mathbb{R}$ auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ **harmonisch** heißt, wenn sie zweimal stetig differenzierbar ist und

$$\Delta u := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i} = 0.$$

Der hier gleichzeitig definierte Operator Δ heißt **Laplaceoperator**. Er spielt in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen eine wichtige Rolle.

Ist $u : U \to \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion, so heißt eine stetig differenzierbare Funktion $v : U \to \mathbb{R}$ **harmonisch Konjugierte** (zu u), wenn $f := u + iv$ holomorph ist.

Theorem 3.3. *Jede harmonische Funktion auf einer offenen, sternförmigen Teilmenge von $\mathbb{C}$ besitzt eine harmonisch Konjugierte.*

Beweis. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und sternförmig, und sei $u : U \to \mathbb{R}$ harmonisch. Per Definition gibt es einen Punkt $(x_0, y_0) \in U$, so daß für alle $(x, y) \in U$ die Verbindungsstrecke $\{t(x_0, y_0) + (1-t)(x, y) : t \in [0, 1]\}$ ganz in U liegt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei hier $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Wir definieren $v : U \to \mathbb{R}$ durch

$$v(x, y) := \int_0^1 [\frac{\partial u}{\partial x}(tx, ty)\, y - \frac{\partial u}{\partial y}(tx, ty)\, x]\, dt.$$

Dann ist v offensichtlich stetig differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) &= \int_0^1 [\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(tx, ty)\, ty - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(tx, ty)\, tx - \frac{\partial u}{\partial y}(tx, ty)]\, dt \\ &= \int_0^1 [-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(tx, ty)\, ty - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(tx, ty)\, tx - \frac{\partial u}{\partial y}(tx, ty)]\, dt \\ &= -\int_0^1 \frac{d}{dt}[\frac{\partial u}{\partial y}(tx, ty)\, t]\, dt \\ &= -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y). \end{aligned}$$

Ähnlich zeigt man $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$. Die Funktionen u und v erfüllen also die Cauchy-Riemannschen Gleichungen, und damit ist nach Theorem 3.2 die Funktion $f := u + iv$ holomorph, d. h. v ist eine zu u harmonisch Konjugierte.

Bemerkung 3.4. Die Funktion

$$u : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R},$$
$$(x, y) \mapsto \log(x^2 + y^2),$$

ist harmonisch und besitzt auf ihrem Definitionsbereich keine harmonisch Konjugierte.

3.2 Zahlenreihen

Wiederholung: Konvergenz von Folge (z_n) ist definiert sobald z_n in einem topologischen Raum liegt. Reihe ist definiert, sobald man Elemente z_n addieren kann.

Definition 3.5. Sei (z_n) eine Folge in $\mathbb{C}$. Wir nennen das Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ eine (unendliche) **Reihe in** $\mathbb{C}$ und verstehen darunter zuerst einmal die Folge (s_n) der Partialsummen: $s_n := \sum_{k=1}^{n} z_n$. Falls diese Folge der Partialsummen gegen ein $s \in \mathbb{C}$ konvergiert, so sagen wir, daß **die Reihe (gegen** s**) konvergiert** und nennen s die **Summe** oder den **Grenzwert der Reihe**. Wir schreiben in diesem Fall $s = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$, so daß das Symbol der Reihe eine zweite Bedeutung bekommt.

Wie in $\mathbb{R}$ ist es im Allgemeinen einfacher zu beweisen, daß eine Reihe konvergent ist, und es ist schwieriger, ihren Grenzwert zu bestimmen. Für Konvergenzbeweise ist das Cauchykriterium, das Majorantenkriterium oder das Wurzelkriterium nützlich. Die Eigenschaften gelten wie im Reellen, mit der Ausnahme daß es in $\mathbb{C}$ keine Ordnungsrelation gibt, und folglich zum Beispiel das Leibnizkriterium keinen Sinn in $\mathbb{C}$ hat. Es gilt aber ein allgemeineres Abel-Dirichlet-Kriterium.

Proposition 3.6. *Sei $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ eine Reihe in $\mathbb{C}$. Dann gilt:*

a) *Wenn die reelle Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ konvergent ist (wir sagen: wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$* **absolut konvergiert***), dann ist die komplexe Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergent.*

b) *Majorantenkriterium mit $|z_n|$ (wie in $\mathbb{R}$)*

c) *Quotientenkriterium mit $|z_n| \neq 0$ (wie in $\mathbb{R}$)*

d) *Wurzelkriterium mit $|z_n|$ (wie in $\mathbb{R}$)*

e) *Seien a_n komplexe Zahlen und b_n reelle Zahlen. Die komplexe Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ ist konvergent in jedem der folgenden Fälle:*

   1) *(b_n) ist positive monoton fallende Folge, $b_n \xrightarrow{\text{in } \mathbb{R}} 0$ und $(\sum_{k=1}^{n} a_k)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkte Folge (Dirichletkriterium; spezieller Fall $a_k = (-1)^k \in \mathbb{R}$ ist das Leibnizkriterium in $\mathbb{R}$).*

2) *(b_n) ist positive monoton fallende Folge und $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist konvergente Reihe (d. h. $(\sum_{k=1}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}}$) konvergente Folge) (Abelkriterium).*

Beweis. (a) Nachprüfen, daß $s_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$, $n \in \mathbb{N}$, eine Cauchyfolge ist. Beweisidee für (e): Auch nachprüfen, daß $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$, $n \in \mathbb{N}$, eine Cauchyfolge ist. In diesem Fall sind die Rechnungen aber etwas komplizierter. Es wird die sogenannte Abelsche partielle Summation benutzt:

Sei $\sigma_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$. Dann ist $a_n = \sigma_n - \sigma_{n-1}$, $a_1 = \sigma_1$ und

$$\begin{aligned}
s_n &:= \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \\
&= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \\
&= \sigma_1 b_1 + (\sigma_2 - \sigma_1) b_2 + \cdots + (\sigma_n - \sigma_{n-1}) b_n \\
&= \sigma_1 b_1 + \sum_{k=2}^{n} (\sigma_k - \sigma_{k-1}) b_k \\
&= \sigma_1 b_1 + \sum_{k=2}^{n} \sigma_k b_k - \sum_{k=2}^{n} \sigma_{k-1} b_k \\
&= \sigma_1 b_1 + \sum_{k=2}^{n} \sigma_k b_k - \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k b_{k+1} \\
&= \sigma_1 b_1 + \sum_{k=2}^{n-1} (\sigma_k b_k - \sigma_k b_{k+1}) - \sigma_1 b_2 + \sigma_n b_n \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k (b_k - b_{k+1}) + \sigma_n b_n.
\end{aligned}$$

Beweis von (e1): nach Voraussetzung existiert eine $M > 0$ mit $|\sigma_k| \le M$, $k \in \mathbb{N}$. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung existiert eine $n_0 \in \mathbb{N}$ so daß $b_n < \frac{\varepsilon}{2M}$ für alle $n \ge n_0$. Es folgt mit der Abelschen partiellen Summation und weil (b_n) positiv und monoton fallend ist, daß für alle $n, m \ge n_0$ gilt:

$$
\begin{aligned}
|s_m - s_n| &= |\sum_{k=1}^{m-1} \sigma_k(b_k - b_{k+1}) + \sigma_m b_m - \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k(b_k - b_{k+1}) - \sigma_n b_n| \\
&\le \sum_{k=n}^{m-1} |\sigma_k|\, |b_k - b_{k+1}| + |\sigma_m|\, |b_m| + |\sigma_n|\, |b_n| \\
&\le M \sum_{k=n}^{m-1} |b_k - b_{k+1}| + M|b_m| + M|b_n| \\
&= M(b_n - b_{n+1} + b_{n+1} - b_{n+2} + \cdots + b_{m-1} - b_m + b_m + b_n) \\
&= 2Mb_n \le \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Damit ist (s_n) eine Cauchyfolge, also konvergent.

Beweis von (e2): wir zerlegen zuerst einmal $a_k = \mathrm{Re}\, a_k + i \mathrm{Im}\, a_k$. Es reicht zu beweisen, daß der Realteil der Summe und der Imaginärteil der Summe konvergent sind. Deswegen können wir voraussetzen, daß $a_k \in \mathbb{R}$ sind, und folglich $\sigma_k \in \mathbb{R}$ sind. Nach der Voraussetzung ist (σ_k) konvergent, also eine Cauchyfolge. Also existiert für $\varepsilon > 0$ ein n_0, so daß für alle $n, k \ge n_0$ gilt:

$$-\varepsilon < \sigma_k - \sigma_n < \varepsilon;$$

(im Reellen kann die Abschätzung im Betrag mit zwei Abschätzungen, von oben und von unten, ersetzt werden !). Für $n, m \ge n_0$ gilt mit der Abelschen partiellen Summation und weil (b_n) positive und monoton fallend ist, daß :

$$
\begin{aligned}
&s_m - s_n = \\
&= \sum_{k=n}^{m-1} \sigma_k(b_k - b_{k+1}) + \sigma_m b_m - \sigma_n b_n \\
&= \sum_{k=n}^{m-1} \sigma_n(b_k - b_{k+1}) + \sum_{k=n}^{m-1} (\sigma_k - \sigma_n)(b_k - b_{k+1}) + \sigma_m b_m - \sigma_n b_n \\
&\le \sigma_n(b_n - b_{n+1} + b_{n+1} - b_{n+2} + \cdots + b_{m-1} - b_m) + \sum_{k=n}^{m-1} \varepsilon(b_k - b_{k+1}) + \sigma_m b_m - \sigma_n b_n \\
&= \varepsilon(b_n - b_m) + (\sigma_m - \sigma_n) b_m \\
&\le \varepsilon(b_n - b_m) + \varepsilon b_m = \varepsilon b_n \le \varepsilon b_1
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
s_m - s_n &= \\
&= \sum_{k=n}^{m-1} \sigma_k(b_k - b_{k+1}) + \sigma_m b_m - \sigma_n b_n \\
&= \sum_{k=n}^{m-1} \sigma_n(b_k - b_{k+1}) + \sum_{k=n}^{m-1} (\sigma_k - \sigma_n)(b_k - b_{k+1}) + \sigma_m b_m - \sigma_n b_n \\
&\geq \sigma_n(b_n - b_{n+1} + b_{n+1} - b_{n+2} + \cdots + b_{m-1} - b_m) + \sum_{k=n}^{m-1} -\varepsilon(b_k - b_{k+1}) + \sigma_m b_m - \sigma_n b_n \\
&= -\varepsilon(b_n - b_m) + (\sigma_m - \sigma_n) b_m \\
&\geq -\varepsilon(b_n - b_m) - \varepsilon b_m = -\varepsilon b_n \geq -\varepsilon b_1.
\end{aligned}
$$

Folglich ist (Abschätzungen reeller Zahlen !)

$$|s_n - s_m| \leq \varepsilon b_1$$

für alle $n, m \geq n_0$. Damit ist (s_n) eine Cauchyfolge, also konvergent.

Folgender Satz wird nur für die Eigenschaft der Exponentialfunktion in Kapitel 5 benutzt; sein Beweis geht genauso wie im reellen Fall.

Proposition 3.7. *Ist $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ absolut konvergent und $j : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv, dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} z_{j(n)}$ absolut konvergent, und folglich konvergent.*

Sind $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ zwei absolut konvergente komplexe Reihen, dann ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{k=1}^{n} u_k v_{n-k})$ (sogenanntes **Cauchy-Produkt***) absolut konvergent.*

3.3 Funktionenreihen, gleichmäßige Konvergenz

Definition 3.8. Sei U eine Menge, und seien $f_n : U \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, Funktionen, die auf U definiert sind. Wir nennen das Symbol $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ eine (unendliche) **Funktionenreihe** und verstehen darunter zuerst einmal die Folge (s_n) der Partialsummen: $s_n := \sum_{k=0}^{n} f_n$. Sind die Funktionen der Form $f_n(z) = a_n \cdot (z - z_0)^n$ ($a_n \in \mathbb{C}, z_0 \in \mathbb{C}, U \subset \mathbb{C}$), so heißt das Symbol $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ auch **Potenzreihe**. Die Funktionenreihe heißt **punktweise konvergent auf** U wenn für jedes $z \in U$ die Zahlenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ konvergent ist. In diesem Fall ist $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ eine wohldefinierte Funktion von U nach $\mathbb{C}$ und heißt die **Summe** oder der **Grenzwert der Reihe**.

Beispiele 3.9. a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ (Exponentialreihe).

b) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ (geometrische Reihe).

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx$ (spezielle Fourierreihe). (Untersuche $\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}$ mit dem Dirichletkriterium!)

e) $\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ (Riemannsche Zetafunktion; spezielle Dirichletreihe).

Definition 3.10. Sei U eine Menge, und seien $f_n : U \to \mathbb{C}$ Funktionen. Wir sagen, daß

a) die Funktionenfolge (f_n) auf U **gleichmäßig gegen eine Funktion** $f : U \to \mathbb{C}$ **konvergiert**, falls gilt: für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß

$$\forall n \geq n_0 \quad \forall z \in U : |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

b) die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ auf U **gleichmäßig konvergiert**, wenn die Folge ihrer Partialsummen (also eine Funktionenfolge) gleichmäßig auf U gegen die Summe der Reihe konvergiert.

Um nachzuprüfen, daß eine Funktionenreihe gleichmäßig (oder auch einfach nur punktweise) konvergent ist, ist es ein Problem, daß wir die Grenzfunktion (also die Summe der Reihe) im Allgemeinen nicht explizit kennen. Deswegen arbeitet man hier auch mit dem Cauchykriterium: eine Funktionenfolge (f_n) konvergiert gleichmäßig auf U gegen eine (apriori unbekannte) Funktion genau dann, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß

$$\forall n, m \geq n_0 \forall z \in U : |f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon.$$

Proposition 3.11 (Majorantenkriterium für gleichmäßige Konvergenz einer Funktionenreihe). *Ist $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ eine komplexe Funktionenreihe mit Funktionen f_n, die alle auf einer Menge U definiert sind, und existiert eine konvergente reelle Zahlenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, so daß*

$$\forall z \in U \forall n \in \mathbb{N} : |f_n(z)| \leq a_n,$$

dann ist die Funktionenreihe (f_n) auf U gleichmäßig konvergent.

Beweis. Idee: mit Cauchykriterium und Abschätzungen

$$|\sum_{k=1}^{m} f_k(z) - \sum_{k=1}^{n} f_k(z)| = |\sum_{k=n+1}^{m} f_k(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |f_k(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{m} a_k = |\sum_{k=1}^{m} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k| < \varepsilon.$$

Ist $U \subseteq \mathbb{C}$ (oder $\mathbb{R}$), so erlaubt es die gleichmäßige Konvergenz auf U gewisse Grenzprozesse bezüglich der Variablen $z \in U$ (Grenzwert, Ableitung, Integral) gliedweise auszurechnen. Es gilt zum Beispiel in dem Fall des obigen Satzes, daß wenn die Funktionen f_n stetig sind, dann ist die Funktion $z \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ stetig, und ihren Grenzwert kann man gliedweise ausrechnen:

$$\lim_{z\to z_0}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) =^{\text{Def.}}$$
$$\lim_{z\to z_0}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} f_n(z) =^{\text{Satz}}$$
$$\lim_{N\to\infty}\lim_{z\to z_0}\sum_{n=1}^{N} f_n(z) =^{\text{Rechenregeln}}$$
$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\lim_{z\to z_0} f_n(z) =^{\text{Def.}}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{z\to z_0} f_n(t).$$

Es gelten Sätze auch für das gliedweise Ausrechnen von Ableitungen, Stammfunktionen, bestimmten Integralen. Der Grundbegriff in den Beweisen ist gleichmäßige Konvergenz; die Voraussetzungen sind angepasst an die gewünschten Aussagen.

3.4 Potenzreihen

Proposition 3.12. *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ eine Potenzreihe mit a_n, $z_0 \in \mathbb{C}$. Wenn die Reihe für ein $z_1 \in \mathbb{C}$ konvergent ist, dann konvergiert sie für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0| < |z_1-z_0|$ absolut. Der natürliche Konvergenzbereich einer Potenzreihe liegt also zwischen einem offenen Kreis $B(z_0,R) = \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| < R\}$ und dem abgeschlossenen Kreis $\bar{B}(z_0,R) = \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| \le R\}$, wobei $R = 0$, $R \in (0,\infty)$ und $R = \infty$ möglich sind.*

Proposition 3.13. *Seien $z_0 \in \mathbb{C}$, $a_n \in \mathbb{C}$. Definiere $R \in [0,\infty]$ über*

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}.$$

Dann ist die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ absolut konvergent für alle $z \in B(z_0,R)$ und sie divergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0| > R$. Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0| = R$ ist im Allgemeinen keine Aussage möglich (es kann alles passieren: absolute Konvergenz, Konvergenz aber nicht absolute Konvergenz, Divergenz).

Wir nennen R den **Konvergenzradius** *der Potenzreihe.*

Beweis. Wurzelkriterium.

Folgender Satz mit Majorantenkriterium.

Proposition 3.14. *Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R \in (0,\infty]$. Dann ist die Potenzreihe für alle $r \in (0,R)$ auf der Kreisscheibe $B(z_0,r)$*

gleichmäßig konvergent und definiert dort eine holomorphe Funktion. Die Ableitung kann man gliedweise ausrechnen. Insbesondere gilt

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \textit{ für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Gegeben sei eine (reelle) Funktion. Wie erkennt man, daß sie in eine (reelle) Potenzreihe entwickelbar ist ? Das heisst, wann hat sie überhaupt eine Potenzreihe - sogenannte Taylorreihe - , wann und wo ist diese Potenzreihe konvergent, und wenn sie konvergent ist, gibt ihre Summe wirklich die ursprüngliche Funktion wieder ? Im Reellen kann an jeder Stufe etwas schiefgehen, das heisst, es existiert zum Beispiel eine (reelle) Funktion, die beliebig oft differenzierbar ist, aber die zugehörige Taylorreihe ist nicht konvergent (außer im Mittelpunkt natürlich), usw. Es ist also im Reellen nicht sofort erkennbar, ob eine gegebene Funktion entwickelbar ist. Im Komplexem ist das anders, wie wir später sehen werden.

Daß die Taylorreihe einer (reellen) Funktion diese Funktion wiedergibt, ist schon eine starke Eigenschaft. Insbesondere ist dann die Funktion fortsetzbar in die komplexen Zahlen, sie ist stetig differenzierbar, ja sogar komplex differenzierbar. Ist eine komplexe Funktion gegeben, die stetig komplex differenzierbar in einer offene Menge ist (also holomorph), dann ist sie schon lokal in eine Potenzreihe entwickelbar - siehe Kapitel 6.

Übungsblatt 4: Reihen

4.1 Untersuchen Sie folgende Folgen auf Konvergenz:

a) $\frac{2^n}{n!} + i\frac{n}{2^n},\, n \in \mathbb{N}$;

b) $i^n, n \in \mathbb{N}$;

c) $\frac{1}{n} + n^2 i, n \in \mathbb{N}$.

4.2 Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^n}$;

b) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin(nx), \quad x \in \mathbb{R}$.

4.3 Untersuchen Sie folgende Funktionenreihen auf Konvergenz, gleichmäßige Konvergenz. Im Fall einer Potenzreihe geben Sie den Konvergenzradius an !

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$;

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\cos(nx) + i \sin(nx))$, $x \in \mathbb{R}$.

4.4 Für $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n$ geben Sie $D(f)$ an und untersuchen Sie diese Funktion auf Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Existenz einer Stammfunktion !

Chapter 4
Elementare Funktionen

Polynome, rationale Funktionen und ihre Inversen sind “elementare” Funktionen in dem Sinne, daß man sie mit der Hilfe der Körpereigenschaften von $(\mathbb{C},+,\cdot)$ ausdrücken kann. Die anderen “elementaren” Funktionen in diesem Kapitel, e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\ln z$ definiert man zusätzlich noch mit der Hilfe einen Konvergenzprozesses, konkreter: als Summe einer Potenzreihe. Weiter sind “spezielle” Funktionen bekannt, die mit der Hilfe einer Funktionenreihe, oder eines anderen Konvergenzprozesses definiert werden können: solche sind zum Beispiel die Riemannsche Zetafunktion (als Funktionenreihe definiert) und die Γ-Funktion (als unendliches Produkt oder als Intergral definiert). “Spezielle” Funktionen heißen ausserdem die Legendre-Polynome $P_n(x) := \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$, andere bekannte Polynome (Laguerre, Hermite, Jacobi, Čebyšev), und andere bekannte Funktionen (sphärische Funktionen, Besselfunktionen), die in konkreten physikalischen Problemen eine besondere Rolle spielen (so wie x^n in Potenzreihen oder sin, cos in Fourierreihen), zum Beispiel daß sie Lösungen einer Differentialgleichung sind, oder daß man Lösungen einer Differentialgleichung mit ihrer Hilfe finden kann.

4.1 Polynome

Ist $n \in \mathbb{N}$ und sind a_0 ,$a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ mit $a_n \neq 0$, so heißt die Abbildung

$$p(z) := a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$$

Polynom (mit komplexen Koeffizienten). Es gilt (vgl. Algebra): jedes Polynom mit komplexen Koeffizienten ist über $\mathbb{C}$ auflösbar, d. h. es existieren paarweise verschiedene, komplexe Zahlen $z_1, z_2, \dots, z_m \in \mathbb{C}$, die notwendigerweise Nullstellen von p sind, es existieren $k_1, k_2, \dots, k_m \in \mathbb{N}$, und es existiert ein $c \in \mathbb{C}$, so daß sich p folgendermaßen als ein Produkt von linearen, komplexen Polynomen schreiben läßt:

$$p(z) = c(z - z_1)^{k_1} \cdot (z - z_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (z - z_m)^{k_m} \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

Die Exponenten k_i erfüllen $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$. Der Exponent k_i heißt **Vielfachheit der Nullstelle** z_i.

Wenn die Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ sind, gilt: ist $z_i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ eine nichtreelle Nullstelle von p, dann ist auch die komplex Konjugierte $\bar{z}_i$ eine Nullstelle.

4.2 Rationale Funktionen

Sind p und q Polynome, so heißt die Abbildung $z \mapsto \frac{p(z)}{q(z)}$ von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ mit ihren natürlichen Definitionsbereich **rationale Funktion**. Sie hat Nullstellen (eventuell keine) und Polstellen (eventuell keine). Wenn p und q teilerfremd sind, dann heißen die **Nullstellen von** $\frac{p}{q}$ die Nullstellen von p, und **Polstellen von** $\frac{p}{q}$ die Nullstellen von q. Die Polstellen haben also eine Vielfachkeit.

Es gilt (vgl. Algebra): es existieren komplexe Zahlen z_i die Nullstellen von q sind und Zahlen c_i so daß $\frac{p}{q}$ zerlegt sich in Summe der einfacheren rational gebrochenen Funktionen (Partialbruchzerlegung)

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{c_{1,k_1}}{(z - z_1)^{k_1}} + \frac{c_{1,k_1-1}}{(z - z_1)^{k_1-1}} + \dots + \frac{c_{1,1}}{z - z_1} + \frac{c_{2,k_2}}{(z - z_2)^{k_2}} + \dots + \frac{c_{m,1}}{z - z_m}.$$

Aussicht: Potenzreihen (also Taylorreihen) sind Verallgemeinerung der Polynome, Laurentreihen der Partialbruchzerlegung. Um sie zu definieren, braucht man einen Konvergenzprozess. Ist f eine Funktion, so ist zum Beispiel ihre Taylorreihe eine lokale Approximation mit Polynomen. Hat f Singularitäten ("Polstellen"), dann ist ihre Laurentreihe eine lokale Approximation mit rational gebrochenen Funktionen.

Übungsblatt 3: Modellfunktionen

3.1 Beschreiben Sie das Bild unter der Abbildung $f(z) = \frac{z+i}{iz+1}$ des Punktes 0, der Kreislinie $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, der Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, der Geraden $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, und der Strecke $[-1, 1]$ (d.h. von -1 nach 1).

3.2 Sei $f(z) := e^z := e^{\operatorname{Re} z}(\cos(\operatorname{Im} z) + i \sin(\operatorname{Im} z))$. Zeigen Sie, daß diese Funktion $2\pi i$*-periodisch* ist, d. h. $f(z + 2\pi i) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$! Bestimmen Sie die Bilder unter f der folgenden Mengen: Punkt $\{0\}$, Strecke von 0 nach i, Gerade $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, Streifen $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi\}$.

3.3 Bestimmen Sie das Bild der Menge $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$, $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ und Kreislinie $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ unter der Abbildung $f(z) = \frac{1}{z}$!

3.4 Bestimmen Sie das Bild der Menge $\{z \in \mathbb{C} : z = re^{i\varphi}, r > 0, \varphi \in (0, \frac{\pi}{2})\}$ unter der Abbildung $f(z) = z^2$!

4.3 Die Exponentialfunktion

Der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ ist $R = \infty$. Die Reihe konvergiert also für jedes $z \in \mathbb{C}$ absolut. Die Funktion

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{C} &\to \mathbb{C}, \\ z &\mapsto \exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \end{aligned}$$

heißt **Exponentialfunktion**.

Proposition 4.1. *Die Exponentialfunktion* exp *hat folgende Eigenschaften:*

a) $\exp(0) = 1$.

b) $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2)$ *für jedes* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

c) $\exp(z) \neq 0$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$.

d) $\exp(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$.

e) $\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z})$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$.

f) $|\exp(i\theta)| = 1$ *für alle* $\theta \in \mathbb{R}$.

g) *Die Exponentialfunktion ist holomorph und* $\exp' = \exp$.

Beweis. Wie in Analysis I.

Andere mögliche Definition der Exponentialfunktion: Angenommen, daß die reellen elementaren Funktionen exp, sin, und cos definiert sind und ihre Eigenschaften bewiesen sind, kann man die komplexe Exponentialfunktion über die Formel

$$\exp(z) := \exp(\operatorname{Re} z)(\cos \operatorname{Im} z + i \sin \operatorname{Im} z) \quad (z \in \mathbb{C})$$

definieren und ihre Eigenschaften im Komplexen beweisen.

Die reelle Exponentialfunktion kann mit verschiedenen Methoden eingeführt werden:

a) über Potenzreihen wie oben,

b) über Folgen, d. h. $\exp(x) := \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{x}{n})^n$ oder $\exp(x) := \lim_{n\to\infty}(1 - \frac{x}{n})^{-n}$ $(x \in \mathbb{R})$; im Beweis der Konvergenz wird Monotonie benutzt !

c) über ein Integral: die Funktion $\frac{1}{x}$ ist stetig und positiv, und besitzt folglich eine streng monotone Stammfunktion. Diese Stammfunktion ist injektiv auf $(0, +\infty)$, hat also hat eine Umkehrfunktion.

d) über Differentialgleichungen: als einzige Lösung von $f'(x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, mit $f(0) = 1$.

e) als einzige stetige Lösung der Funktionalgleichung $f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2)$ $(x_1, x_2 \in \mathbb{R})$, $f(0) = 1$.

4.4 Die trigonometrischen Funktionen

Die Potenzreihen

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

und

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

haben Konvergenzradius $R = \infty$, sind also für jedes $z \in \mathbb{C}$ konvergent. Wir definieren

$$\begin{aligned} \sin z &:= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \cos z &:= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \end{aligned}$$

Damit sind auch die Abbildungen $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \sin z$ und $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \cos z$ definiert; sie heißen **Sinusfunktion** und **Cosinusfunktion**.

Für die komplexen Funktionen exp, sin und cos gelten folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \text{ für alle } z \in \mathbb{C}, \\ \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \text{ für alle } z \in \mathbb{C}, \\ \exp(iz) &= \cos z + i \sin z \text{ für alle } z \in \mathbb{C}, \\ \exp(z) &= \exp(\operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z) = \exp(\operatorname{Re} z)\, \exp(i \operatorname{Im} z) \\ &= \exp(\operatorname{Re} z)\, (\cos(\operatorname{Im} z) + i \sin(\operatorname{Im} z)) \text{ für alle } z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Die ersten zwei Beziehungen können auch als Definition von sin und cos dienen

Proposition 4.2. a) (Additionstheoreme) *Für* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *gelten*

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2,$$
$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1.$$

b) *Für alle* $\theta \in \mathbb{R}$ *gilt* $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$.

c) sin *und* cos *sind holomorph in* $\mathbb{C}$ *und* $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$.

Wiederholung aus Analysis I: Die Einschränkungen von sin und cos auf $\mathbb{R}$ sind reelle, stetig differenzierbare Funktionen. Man definiert die reelle Zahl $\frac{\pi}{2}$ als die kleinste, positive Nullstelle von cos. Die Funktionen sin und cos sind 2π-periodisch.

Weitere trigonometrische und hyperbolische Funktionen:

$$\begin{aligned}
\tan z &:= \frac{\sin z}{\cos z} \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \text{ mit } \cos z \neq 0;\\
\cot z &:= \frac{\cos z}{\sin z} \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \text{ mit } \sin z \neq 0;\\
\sinh z &:= \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2} = \frac{1}{i}\sin(iz) \quad \text{für } z \in \mathbb{C};\\
\cosh z &:= \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2} = \cos(iz) \quad \text{für } z \in \mathbb{C}.
\end{aligned}$$

4.5 Der komplexe Logarithmus

Theorem 4.3 (Satz über die lokale Umkehrfunktion). *Sei* $f : U \to \mathbb{C}$ *eine holomorphe Funktion,* $z_0 \in U$, *so daß* $f'(z_0) \neq 0$. *Dann existieren eine offene Umgebung* $\tilde{U} \subseteq U$ *von* z_0 *und eine offene Umgebung* $\tilde{V} \subseteq \mathbb{C}$ *von* $f(z_0)$, *so daß* $f : \tilde{U} \to \tilde{V}$ *bijektiv und die Umkehrfunktion* $f^{-1} : \tilde{V} \to \tilde{U}$ *holomorph ist.*

Diese Variante des Satzes über die lokale Umkehrfunktion für holomorphe Funktionen wird nicht bewiesen. Sie folgt einfach aus dem reellen Satz über die lokale Umkehrfunktion, der Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion und den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.

Eine Funktion, deren Ableitung nirgends verschwindet, ist die Exponentialfunktion. Allerdings ist die Exponentialfunktion auf dem maximalen Definitionsbereich $\mathbb{C}$ nicht injektiv und besitzt daher keine globale Umkehrfunktion. Die Abbildung $\exp : \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist jedoch bijektiv, und folglich ist die Umkehrabbildung hier wohldefiniert und holomorph.

Ist $\exp(z) = w$ mit $z \in \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}$, dann heißt z **Hauptwert des Logarithmus an der Stelle** w. Wenn $w \neq 0$ mit Polarkoordinaten $r > 0$, $\varphi \in (-\pi, \pi)$ gegeben ist, dann heißt die Zahl φ **Hauptwert des Argumentes von** w und wird mit $\arg w$ bezeichnet. Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned}\exp(z) = w &\Leftrightarrow \exp(\operatorname{Re} z)(\cos \operatorname{Im} z + i \sin \operatorname{Im} z) = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)\\ &\Leftrightarrow \exp(\operatorname{Re} z) = r \text{ und } \operatorname{Im} z = \varphi \text{ modulo } 2\pi\\ &\Leftrightarrow \operatorname{Re} z = \ln r \text{ und } \operatorname{Im} z = \varphi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\\ &\Leftrightarrow z = \ln r + i(\varphi + 2k\pi).\end{aligned}$$

Folglich ist $z = \ln|w| + i \arg w$ der Hauptwert des Logarithmus von w. Ist $w \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, dann heißt jede komplexe Zahl z mit $\exp(z) = w$ ein **(Wert des) Logarithmus von** w. Notation: wir schreiben $\ln w \subseteq \mathbb{C}$ für die Menge aller Werte des Logarithmus von w, manchmal aber auch $\ln w \in \mathbb{C}$ für einen beliebigen Wert des Logarithmus von w; wir schreiben $\operatorname{Ln} w \in \mathbb{C}$ für den Hauptwert des Logarithmus von w.

Definition 4.4. Sei $G \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ein Gebiet (d.h. eine offene, zusammenhängende Menge). Ist die Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ stetig und erfüllt $\exp(f(z)) = z$ für alle $z \in G$, so heißt sie **Zweig des Logarithmus auf** G.

Beispiele 4.5. Die Funktion $l_1(w) := \ln|w| + \mathrm{i} \arg w$ mit $\arg w \in (-\pi, \pi)$, d. h. die inverse Funktion zur Exponentialfunktion $\exp : \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\} \to \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ ist ein Zweig des Logarithmus auf $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, der sogenannte **Hauptzweig**. Bezeichnung: Ln . Für $k \in \mathbb{Z}$ ist $l_2(w) := \ln|w| + \mathrm{i}(\arg w + 2k\pi)$ auch ein Zweig des Logarithmus auf $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

$l_3(z) := \int_{\gamma_{1,z}} \frac{1}{\zeta}\, d\zeta$, wobei $\gamma_{1,z}$ die Strecke von 1 nach z ist, ist ein Zweig des Logarithmus auf $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

Lemma 4.6. *Wenn f ein Zweig des Logarithmus auf dem Gebiet G ist, dann ist f holomorph auf G und es gilt $f'(z) = \frac{1}{z}$ $(z \in G)$.*

Beweis. Aus der Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion folgt für alle $z \in G$

$$\begin{aligned}f'(z) &= (\exp^{-1})'(z)\\ &= \frac{1}{\exp'(f(z))}\\ &= \frac{1}{\exp(f(z))}\\ &= \frac{1}{z}.\end{aligned}$$

Korollar 4.7. *Auf einem Kreisring kann es keinen Zweig des Logarithmus geben.*

Sei $\mathcal{F}_{\ln}$ die Riemannsche Fläche des Logarithmus (unendlich viele Kopien der komplexen Ebene $\mathbb{C}$, aufgeschnitten entlang $(-\infty,0]$ und beim Übergang von einer Kopie zur nächsten oder vorigen entsprechend verklebt). Die Funktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathcal{F}_{\ln}$ ist bijektiv, holomorph, und ihre Umkehrfunktion, d. h. der komplexe **Logarithmus** ln, ist holomorph.

Die Funktion

$$l_4(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n, \quad z \in \mathbb{C}, \quad |z-1| < 1,$$

ist wohldefiniert (konvergente Potenzreihe), holomorph, und $l_4(1) = 0$. Für ihre komplexe (aber auch reelle) Ableitung gilt:

$$l_4'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (1-z)^{n-1} = \frac{1}{z}, |z-1| < 1.$$

Diese Funktion l_4 stimmt mit der Funktion l_1 auf der Kreisscheibe $B(1,1)$ überein (die Differenz hat Ableitung 0, ist also konstant; außerdem stimmen beide Funktionen im Mittelpunkt 1 überein). Die Funktion l_2 stimmt auch mit der Funktion l_1 auf der Menge $\mathbb{C} \setminus (-\infty,0]$ überein (wieder: die Ableitung der Differenz ist 0 und beide Funktionen stimmen in einem Punkt überein). Die Funktionen l_1, l_2, l_4 sind mögliche Definition der komplexen Logarithmusfunktion, und stimmen auf dem Schnitt mit der positive, reellen Achse mit dem reellen Logarithmus überein.

Für $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ heißt die Zahl $\arg w \in (-\pi,\pi]$ mit der Eigenschaft $w = |w|(\cos \arg w + i \sin \arg w)$ (d. h. die zweite Polarkoordinate von w) **Hauptwert des Arguments von** w. Jede Zahl $\arg w \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $w = |w|(\cos \arg w + i \sin \arg w)$ heißt ein **(Wert des) Arguments von** w. Ist $G \subseteq \mathbb{C} \setminus (-\infty,0]$ ein Gebiet, dann heißt jede stetige Funktion $g : G \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $w = |w|(\cos g(w) + i \sin g(w))$, $w \in G$, **Zweig des Arguments auf** G, und die Funktion $g(w) = \arg w$ auf $\mathbb{C} \setminus (-\infty,0]$ heißt **Hauptzweig des Arguments**.

In angepassten Einschränkungen des Definitionsbereiches kann man auch die komplexen trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen invertieren, und somit die Arcus-Funktionen erhalten.

Aufgabe: Zeigen Sie, daß für alle $z_1, z_2 \in \setminus(-\infty,0]$ gilt:

$$\mathrm{Ln}\, z_1 + \mathrm{Ln}\, z_2 \in \ln(z_1 z_2) \quad !$$

4.6 Gebrochene Potenzen

Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ und alle $a \in \mathbb{C}$ definieren wir die **gebrochene Potenz**

$$z^a := \exp(a \ln z),$$

wobei ln der Hauptzweig des komplexen Logarithmus ist.

Proposition 4.8 (Eigenschaften der gebrochenen Potenzen).

a) *Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ mit $z_1 z_2 \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ und alle $a \in \mathbb{C}$ gilt*

$$z_1^a z_2^a = (z_1 z_2)^a.$$

b) *Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ und alle $a, b \in \mathbb{C}$ mit $z^a \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ gilt*

$$(z^a)^b = z^{ab}.$$

c) *Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ und alle $a, b \in \mathbb{C}$ gilt*

$$z^a z^b = z^{a+b}.$$

d) *Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty 0]$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ stimmen die Definitionen von z^n als gebrochene Potenz (wie oben) und $z^n = \Pi_{k=1}^n z$ (rekursive Definition der natürlichen Potenzen) überein. Ebenso gilt für alle $n \in \mathbb{Z}$ mit $n < 0$, daß die Definitionen von z^n als gebrochene Potenz (wie oben) und $z^n = \Pi_{k=1}^{-n} \frac{1}{z}$ (rekursive Definition der ganzzahligen, negativen Potenzen) überein.*

e) *Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty 0]$ und alle $a \in \mathbb{R}$ gilt*

$$|z^a| = |z|^a.$$

Natürlich kann man die gebrochenen Potenzen auch über einen anderen Zweig des Logarithmus definieren. Zwei Werte von z^a (genauer: zwei Elemente der Menge) unterscheiden sich um einen Faktor $\exp(2\pi k i a)$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Wenn $a \in \mathbb{Z}$ ist, dann hat z^a nur einen Wert, d. h. die "gebrochene" Potenz ist dann eindeutig bestimmt. Wenn $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist, dann hat z^a abzählbar unendlich viele Werte. Wenn $a = \frac{1}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$, dann hat z^a genau n verschiedene Werte.

Sowohl die Funktion $z \mapsto z^a$ als auch die Funktion $a \mapsto z^a$ sind holomorph in ihrem natürlichen Definitionsbereichen. Die zweite Funktion ist die **Exponentialfunktionen zur Basis** z, und die erste ein Zweig der ***a*-ten Potenzfunktionen**. Nimmt man für ln den Hauptzweig des Logarithmus, so wie wir es oben gemacht haben, dann erhält man den **Hauptzweig der *a*-ten Potenzfunktion**.

4.7 n-te Wurzelfunktionen in $\mathbb{C}$

Sei $n \in N$. Die Funktion $f(z) = z^n$ ist holomorph in $\mathbb{C}$, mit $f'(z) = nz^{n-1} \neq 0$ für $n \geq 1$ und $z \neq 0$. Die Potenzfunktion f ist also lokal invertierbar. Beachte aber, daß f für $n \geq 2$ nicht bijektiv von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ ist, also hat keine globale Umkehrfunktion besitzt. Die Gleichung $z^n = w$ kann man explizit lösen: Ist $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$, mit Polarkordinaten $r > 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ gegeben, d. h. $w = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, dann sind die Lösungen die n verschiedenen, komplexen Zahlen z_k in Polardarstellung

$$z_k := \sqrt[n]{r}\left(\cos(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}) + i\sin(\frac{\varphi + 2\pi k}{n})\right) = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Damit sind die n verschiedenen Funktionen $g_k(z) := z_k$ alle Umkehrfunktionen zu $f(z) = z^n$ auf einem geeigneten Definitionsbereich.

Die **Riemannsche Fläche der n-ten Wurzelfunktion** $\mathcal{F}_{\sqrt[n]{\cdot}}$ ist die Menge die aus n Kopien $E_0, \ldots, E_{n-1}$ der komplexen Ebene $\mathbb{C}$, jeweils aufgeschnitten entlang $(-\infty, 0]$ und entsprechend verklebt, konstruiert ist: die untere Schnittkante von E_k ist mit der oberen Schnittkante von E_{k+1} verklebt und schließlich wird die untere Schnittkante von E_{n-1} mit der oberen Schnittkante von E_0 verklebt. Diese Menge hat lokal, bis auf das Element 0, die Eigenschaften der komplexen Ebene; es ist also sinnvoll über Stetigkeit und Differenzierbarkeit zu reden.

Die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathcal{F}_{\sqrt[n]{\cdot}}$, $f(z) = z^n$, ist bijektiv, hat folglich eine wohldefinierte Umkehrfunktion g, die **komplexe n-te Wurzelfunktion**. Da f in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph ist, ist g holomorph auf $\mathcal{F}_{\sqrt[n]{\cdot}} \setminus \{0\}$.

Übungsblatt 5: Elementare Funktionen

5.1 Bestimmen Sie den Hauptzweig des Logarithmus von $w_1 = i$ und von $w_2 = -1$, alle Werte der Logarithmen von w_1 und von w_2 (das heißt $\operatorname{Ln} w_i$, $\ln w_i$), und dabei auch den Hauptwert des Argumentes sowie alle Werte des Argumentes von w_1, w_2 !

5.2 Zeigen Sie, daß die Funktion $\operatorname{Arg} : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to \mathbb{C}$, d. h. der Hauptzweig des Argumentes, folgende Eigenschaften hat:

a) Sie ist stetig in jedem $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z > 0$ und $\operatorname{Im} z > 0$;
a*)Sie ist stetig in jedem $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$,
b) Sie ist nicht (komplex) differenzierbar in $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z > 0$ und $\operatorname{Im} z > 0$;
b*)Sie ist nicht (komplex) differenzierbar in $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

Für die Aufgaben in a*) und b*) genügt es, die Beweisidee zu formulieren.

5.3

a) Geben Sie zwei komplexe Zahlen $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ an, so dass

$$\operatorname{Ln}(z_1 z_2) \neq \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2$$

(Ln ist der Hauptzweig des Logarithmus) !

b) Geben Sie eine Folge (z_n) in $\mathbb{C}$ an, so daß

$$\lim_{n\to\infty} |\sin z_n| = \infty \quad !$$

5.4 Finden Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ folgender Gleichungen !

a) $z^2 = i$
b) $z^5 + 2z^3 + z = 0$
c) $e^z = -1$
d) $\sin z = 1$

Wie ändert sich die Antwort, wenn man Lösungen $z \in \mathbb{R}$ sucht ?

Chapter 5
Der Cauchysche Integralsatz

5.1 Komplexe Kurvenintegrale

Eine **Kurve (in $\mathbb{C}$)** ist eine stetige Abbildung $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$. Ein **Parameterwechsel** ist eine stetig differenzierbare, monoton wachsende, bijektive Abbildung $\theta : [c,d] \to [a,b]$, so daß auch ihre Umkehrabbildung stetig differenzierbar ist. Eine Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt **Umparametrisierung** von $\tilde{\gamma} : [c,d] \to \mathbb{C}$ (wir sagen auch: die beiden Kurven sind **äquivalent**), falls es einen Parameterwechsel $\theta : [c,d] \to [a,b]$ gibt, so daß $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \theta$. Eine Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt **geschlossen**, falls $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ ist von **beschränkter Variation**, falls

$$\mathrm{Var}_{[a,b]}(f) := \sup_{a \leq t_0 < \cdots < t_N \leq b} \sum_{i=0}^{N-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| < \infty.$$

Eine Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt **rektifizierbar**, wenn sie von beschränkter Variation ist. In diesem Fall heißt $L(\gamma) := \mathrm{Var}_{[a,b]}(\gamma)$ auch die **Länge der Kurve**.

Theorem 5.1 (Riemann-Stieltjes-Integral). *Seien $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig und $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ von beschränkter Variation. Dann gibt es ein $I \in \mathbb{C}$ mit der folgenden Eigenschaft: zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für alle $a \leq t_0 \leq \xi_0 < t_1 \leq x_1 < \cdots \leq \xi_{N-1} < t_N \leq b$ gilt:*

$$\sup_{0 \leq i \leq N-1} |t_{i+1} - t_i| < \delta \Rightarrow |I - \sum_{i=0}^{N-1} f(\xi_i)(\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i))| < \varepsilon.$$

Beweis. Ohne Beweis.

Sind f, γ und I wie im obigen Theorem, so schreiben wir

$$I =: \int_a^b f(t)\, d\gamma(t),$$

und nennen $\int_a^b f(t)\, d\gamma(t)$ das **Riemann-Stieltjes-Integral** von f bezüglich γ.

Theorem 5.2 (Eigenschaften des Riemann-Stieltjes-Integrals). *Seien f, f_1, $f_2 : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig, γ, γ_1, $\gamma_2 : [a,b] \to \mathbb{C}$ von beschränkter Variation und α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{C}$. Dann gilt:*

a) *(Linearität des Riemann-Stieltjes-Integrals)*

$$\int_a^b (\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t))\, d\gamma(t) = \alpha_1 \int_a^b f_1(t)\, d\gamma(t) + \alpha_2 \int_a^b f_2(t)\, d\gamma(t) \text{ und}$$
$$\int_a^b f(t)\, d(\alpha_1\gamma_1(t) + \alpha_2\gamma_2(t)) = \alpha_1 \int_a^b f(t)\, d\gamma_1(t) + \alpha_2 \int_a^b f(t)\, d\gamma_2(t).$$

b) *Für alle $c \in [a,b]$ gilt*

$$\int_a^b f(t)\, d\gamma(t) = \int_a^c f(t)\, d\gamma(t) + \int_c^b f(t)\, d\gamma(t).$$

c) *Ist γ stetig differenzierbar, so ist*

$$\int_a^b f(t)\, d\gamma(t) = \int_a^b f(t)\gamma'(t)\, dt,$$

und diese Formel gilt auch für stückweise stetig differenzierbare Funktionen, wenn man die Funktion unter dem Integral auf der rechten Seite richtig interpretiert (endliche Ausnahmemenge).

d) *(Dreiecksungleichung)*

$$\left|\int_a^b f(t)\, d\gamma(t)\right| \le \int_a^b |f(t)|\, d\mathrm{Var}_{[a,t]}(\gamma).$$

e) *Ist $\theta : [c,d] \to [a,b]$ ein Parameterwechsel, so gilt*

$$\int_a^b f(t)\, d\gamma(t) = \int_c^d f(\theta(t))\, d\gamma(\theta(t)).$$

Sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion ($U \subseteq \mathbb{C}$ offen), und sei $\gamma : [a,b]$ eine rektifizierbare Kurve mit $\gamma([a,b]) \subseteq U$. Dann nennen wir

$$\int_\gamma f := \int_\gamma f(z)\, dz := \int_a^b f(\gamma(t))\, d\gamma(t)$$

das **(komplexe) Kurvenintegral** von f entlang der Kurve γ.

Lemma 5.3. *Sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion ($U \subseteq \mathbb{C}$ offen). Dann gilt:*

a) *Für alle äquivalenten, rektifizierbaren Kurven $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, $\tilde{\gamma} : [c,d] \to \mathbb{C}$ gilt*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\tilde{\gamma}} f(z)\,dz.$$

b) *Ist $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ rektifizierbare Kurve und $-\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ definiert durch $-\gamma(t) = \gamma(a+b-t)$ (umgekehrte Orientierung), dann ist*

$$\int_{-\gamma} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz.$$

Beispiel 5.4. Sei $r > 0$ und sei $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = r\,e^{it}$ die Parametrisierung einer Kreislinie mit Mittelpunkt 0 und Radius r. Wir berechnen für $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
\int_\gamma z^n\,dz &= \int_0^{2\pi} (re^{it})^n\, re^{it}\, i\,dt \\
&= i \int_0^{2\pi} r^{n+1} e^{i(n+1)t}\,dt \\
&= \begin{cases} 2\pi i & \text{if } n = -1, \\ 0 & \text{if } n \neq -1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Man bemerke, daß das Ergebnis nicht vom Radius r abhängt.

Bemerkung 5.5. Oft schreibt man auch

$$\int_\Gamma f(z)\,dz$$

für ein komplexes Kurvenintegral, wobei Γ nur das *Bild* einer (rektifizierbaren) Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ist, also eine Teilmenge von $\mathbb{C}$. Im Allgemeinen läßt sich aus dem Bild Γ aber nicht die Parametrisierung γ bestimmen. Zum Beispiel ist beim Bild einer nicht geschlossenen Kurve nicht ersichtlich, welche Orientierung gewählt wird, d. .h. von welchem Endpunkt zu welchem Endpunkt man Γ durchläuft. Ähnlich ist beim Bild einer geschlossenen Kurve nicht klar, wie oft Γ durchlaufen wird und in welcher Richtung. *Wenn nichts anderes gesagt wird, dann wollen wir beim Bild einer geschlossenen Kurve immer annehmen, daß das Bild genau einmal durchlaufen wird, und dies im mathematischen Orientierungssinn, d. h. gegen den Uhrzeigersinn.* Beispiel:

$$\int_{\partial B(0,r)} f(z)\,dz.$$

Seien $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge und $f : U \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Eine Funktion $F : U \to \mathbb{C}$ heißt **Stammfunktion** von f auf U, wenn F in U holomorph ist und $F' = f$.

Theorem 5.6. *Sei $f : U \to \mathbb{C}$ stetig ($U \subseteq \mathbb{C}$ offen), und sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine rektifizierbare Kurve mit $\gamma([a,b]) \subseteq U$. Wenn f in U eine Stammfunktion F besitzt, dann ist*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Insbesondere gilt für alle geschlossenen Kurven γ

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Beweis. Wir nehmen zuerst einmal an, daß γ stetig differenzierbare Kurve ist. Dann folgt aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,dz &= \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt \\ &= \int_a^b (F \circ \gamma)'(t)\,dt \\ &= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)),\end{aligned}$$

was in diesem Fall die Behauptung ist.

Ist γ stückweise stetig differenzierbare Kurve, d. h. es gibt eine Partition $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b$, so daß $\gamma|_{[t_i,t_{i+1}]}$ stetig differenzierbar ist, dann folgt aus dem eben gezeigten

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,dz &= \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} (F(\gamma(t_{i+1})) - F(\gamma(t_i))) \\ &= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).\end{aligned}$$

Sei nun schließlich γ eine allgemeine rektifizierbare Kurve. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es nach Theorem 5.1 ein $\delta > 0$, so daß für alle $a \leq t_0 \leq \xi_0 < t_1 \leq x_1 < \cdots \leq \xi_{N-1} < t_N \leq b$ mit $\sup_{0 \leq i \leq N-1} |t_{i+1} - t_i| < \delta$ gilt:

$$|\int_a^b f(\gamma(t))\,d\gamma(t) - \sum_{i=0}^{N-1} f(\gamma(\xi_i))(\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i))| < \varepsilon.$$

...

Korollar 5.7. *Die Funktion* $\frac{1}{z}$ *besitzt in* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ *keine Stammfunktion.*

Beweis. Dies folgt direkt aus dem Beispiel 5.4 und Theorem 5.6.

Übungsblatt 2: Abbildungen (lokale Eigenschaften)

2.1 Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Stetigkeit:

a) $f(z) = \operatorname{Im} z$, $z \in \mathbb{C}$,

b) $f(z) = z^2$, $z \in \mathbb{C}$,

c) $f(z) = \sqrt[3]{|z|}$, $z \in \mathbb{C}$,

d) $f(z) = e^{\operatorname{Re} z}(\cos \operatorname{Im} z + i \sin \operatorname{Im} z)$, $z \in \mathbb{C}$.

2.2 Untersuchen Sie folgende Funktionen auf (komplexe) Differenzierbarkeit im gegebenen Punkt ! Geben Sie gegebenenfalls die Ableitung an !

a) $f(z) = z^2$, $z_0 \in \mathbb{C}$,

b) $f(z) = \operatorname{Im} z$, $z_0 \in \mathbb{C}$,

c) $f(z) = |z|^2$, $z_0 \in \mathbb{C}$,

d) $f(z) = e^{\operatorname{Re} z}(\cos \operatorname{Im} z + i \sin \operatorname{Im} z)$, $z_0 \in \mathbb{C}$.

2.3 Berechnen Sie folgende Integrale:

a) $\int_\gamma \operatorname{Im} z \, dz$, wobei γ die gerade Strecke von 0 nach $1 - i$ darstellt;

b) $\int_\gamma |z| \, dz$, wobei γ die gerade Strecke von $-i$ nach i darstellt;

c) $\int_\gamma z^2 \, dz$, wobei γ die im mathematischen Sinne orientierte Kreislinie mit Mittelpunkt 0 und Radius $\frac{1}{2}$ darstellt;

d) $\int_\gamma \frac{1}{z^2} \, dz$, wobei γ die im mathematischen Sinne orientierte Kreislinie mit Mittelpunkt 0 und Radius $\frac{1}{2}$ darstellt.

2.4 Untersuchen Sie, ob folgende Funktionen auf den gegebenen offenen Mengen eine Stammfunktion besitzen:

a) $f(z) = z^2$ auf $\mathbb{C}$;

b) $f(z) = \frac{1}{z^2}$ auf $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ bzw. auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$;

c) $f(z) = \operatorname{Im} z$ auf $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$;

d) $f(z) = \sqrt{z} \in \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ auf $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$ bzw. auf $\{z \in \mathbb{C} : z \neq 0\}$ bzw. auf $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0 \text{ und } \operatorname{Re} z \geq 0\}$.

Sind die gegebenen Teilmengen von $\mathbb{C}$ Gebiete ?

5.2 Der Satz von Goursat

Theorem 5.8 (Goursat).

a) *Sei $f : U \to \mathbb{C}$ differenzierbar ($U \subseteq \mathbb{C}$ offen). Dann gilt für alle kompakten Dreiecke $\Delta \subseteq U$ (Fläche)*
$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0.$$

b) *Sei $f : U \to \mathbb{C}$ stetig in U und differenzierbar in $U \setminus \{z_0\}$. Dann gilt für alle Dreiecke $\Delta \subseteq U$ auch in diesem Fall $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$.*

Beweis. (a) Sei $\Delta \subseteq U$ ein kompaktes Dreieck. Man verbinde die drei Seitenmittelpunkte, so daß man vier kleinere Dreiecke $\Delta^{(1)}, \ldots, \Delta^{(4)}$ erhält. Es

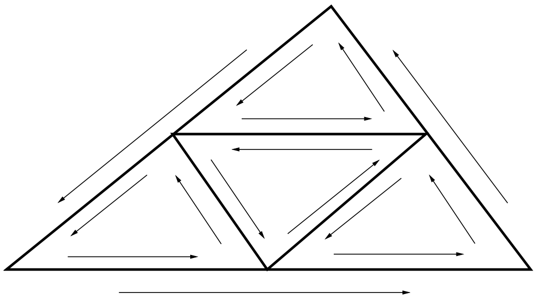

Fig. 5.1 Unterteilung eines Dreiecks in vier Teildreiecke (mit Orientierung)

gilt
$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{4} \int_{\partial\Delta^{(j)}} f(z)\,dz.$$

Sei $\Delta^{(j_0)}$ dasjenige der vier Dreiecke, für welches $|\int_{\partial\Delta^{(j_0)}} f(z)\,dz|$ maximal wird, d. h.
$$\left|\int_{\partial\Delta^{(j_0)}} f(z)\,dz\right| \leq \left|\int_{\partial\Delta^{(j)}} f(z)\,dz\right| \text{ für alle } j = 1,\ldots,4.$$

Setze $\Delta_1 := \Delta^{(j_0)}$. Dann gilt
$$\left|\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz\right| \leq 4\left|\int_{\partial\Delta_1} f(z)\,dz\right|.$$

Nach Konstruktion gilt

$$\operatorname{diam} \Delta_1 = \frac{1}{2} \operatorname{diam} \Delta \text{ und}$$
$$\operatorname{length} \partial \Delta_1 = \frac{1}{2} \operatorname{length} \Delta.$$

Indem man nun das Dreieck Δ_1 wieder in vier Teildreiecke unterteilt und so fortfährt, erhält man eine Folge (Δ_n) von kompakten Dreiecken mit den folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned}
&\Delta_{n+1} \subseteq \Delta_n, \\
&\left| \int_{\partial \Delta} f(z)\, dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\partial \Delta_n} f(z)\, dz \right|, \\
&\operatorname{diam} \Delta_n = \frac{1}{2^n} \operatorname{diam} \Delta \text{ und} \\
&\operatorname{length} \partial \Delta_n = \frac{1}{2^n} \operatorname{length} \Delta.
\end{aligned}$$

Nach dem Schachtelungsprinzip für eine absteigende Folge nichtleerer, kompakter Mengen ist der Durchschnitt $\bigcap_n \Delta_n$ nichtleer. Wir können also ein $z_0 \in \bigcap_n \Delta_n$ wählen. Da f im Punkt z_0 differenzierbar ist, gilt

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)\,(z - z_0) + r(z - z_0)$$

für einen Rest, der die Bedingung $\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$ erfüllt. Da eine affine Funktion (hier die Funktion $z \mapsto f(z_0) + f'(z_0)\,(z - z_0)$) auf ganz $\mathbb{C}$ eine Stammfunktion besitzt, gilt nach Theorem 5.6 für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\partial \Delta} f(z)\, dz \right| &\leq 4^n \left| \int_{\partial \Delta_n} f(z)\, dz \right| \\
&= 4^n \left| \int_{\partial \Delta_n} [f(z_0) + f'(z_0)\,(z - z_0) + r(z - z_0)]\, dz \right| \\
&= 4^n \left| \int_{\partial \Delta_n} r(z - z_0)\, dz \right|.
\end{aligned}$$

Aus der Dreiecksungleichung folgt somit die Ungleichung

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\partial \Delta} f(z)\, dz \right| &\leq 4^n\, (\operatorname{length}, \partial \Delta_n) \sup_{z \in \partial \Delta_n} \frac{|r(z - z_0)|}{|z - z_0|}\, (\operatorname{diam} \Delta_n) \\
&\leq (\operatorname{length}, \partial \Delta)\, (\operatorname{diam} \Delta) \sup_{z \in \partial \Delta_n} \frac{|r(z - z_0)|}{|z - z_0|}.
\end{aligned}$$

Die linke Seite ist unabhängig von $n \in \mathbb{N}$, während die rechte Seite für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert, da $z_0 \in \Delta_n$ für alle n, da der Durchmesser der Dreiecke

Δ_n gegen 0 konvergiert, und aufgrund der Eigenschaft des Restes r. Damit ist die erste Behauptung gezeigt.

(b) Falls f nur stetig in U und differenzierbar in $U \setminus \{z_0\}$ ist, und falls $z_0 \in \Delta$, dann approximiert man $\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz$, indem man nicht über den Rand des Dreiecks Δ integriert, sondern über den Rand zweier kleinerer Dreiecke (siehe Skizze), die z_0 nicht enthalten. Nach Teil (a) ist das Integral über den

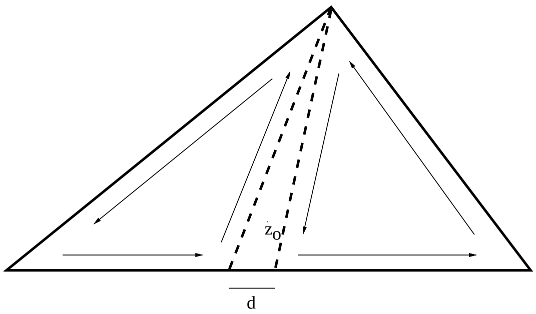

Fig. 5.2 Approximation eines Dreiecks durch zwei Teildreiecke (mit Orientierung)

Rand dieser kleineren Dreiecke gleich 0, und wenn der Parameter d gegen 0 konvergiert, dann konvergiert die Summe über diese beiden Kurvenintegrale wegen Stetigkeit der Funktion f gegen das Integral über den Rand von Δ (die Integrale über die Strecken im Inneren des Dreiecks heben sich gegenseitig auf, wenn d gegen 0 konvergiert).

5.3 Der Satz von Morera

Theorem 5.9 (Morera). *Sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion ($U \subseteq \mathbb{C}$ offen), so daß für alle Dreiecke $\Delta \subseteq U$*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz = 0.$$

Dann besitzt f in jeder offenen, sternförmigen Teilmenge $G \subseteq U$ eine Stammfunktion.

Beweis. Sei $G \subseteq U$ eine offene, sternförmige Teilmenge. Dann gibt es ein $a \in G$, so daß für alle $z \in G$ die Strecke $[a,z]$ in G liegt. Definiere nun die Funktion $F : G \to \mathbb{C}$ durch

$$F(z) := \int_{[a,z]} f(\zeta)\, d\zeta := \int_{\gamma} f(\zeta)\, d\zeta,$$

mit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = a + t(z-a)$. Sei $z_0 \in G$. Weil G offen ist, gibt es eine $r > 0$ mit $B(z_0, r) \subseteq G$. Für alle $z \in B(z_0, r)$ berechnen wir, indem wir die Voraussetzung verwenden,

$$F(z)-F(z_0)=\int_{[a,z]} f(\zeta)\,d\zeta-\int_{[a,z_0]} f(\zeta)\,d\zeta$$
$$=\int_{[z_0,z]} f(\zeta)\,d\zeta.$$

Aus dem Theorem 5.6 folgt

$$\int_{[z_0,z]} d\zeta = z-z_0.$$

Also erhalten wir

$$\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0}-f(z_0)=\frac{1}{z-z_0}\int_{[z-z_0]}(f(\zeta)-f(z_0))\,d\zeta,$$

und somit

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0}-f(z_0)\right| &\le \frac{1}{|z-z_0|}\sup_{\zeta\in[z_0,z]}|f(\zeta)-f(z_0)||z-z_0|\\ &=\sup_{\zeta\in[z_0,z]}|f(\zeta)-f(z_0)|\\ &\to 0 \quad \text{as } z\to z_0,\end{aligned}$$

d. h. F is differenzierbar und $F'=f$ in G.

Korollar 5.10. *Sei $U\subseteq\mathbb{C}$ eine konvexe, offene Menge, und sei $f:U\to\mathbb{C}$ eine stetige Funktion, so daß für alle Dreiecke $\Delta\subseteq U$*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz=0.$$

Dann besitzt f in U eine Stammfunktion.

Beispiele 5.11. a) $f(z)=\frac{1}{z}$ besitzt in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ keine Stammfunktion (Korollar 5.7).

b) $f(z)=\frac{1}{z}$ besitzt in $\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Re} z>0\}$ eine Stammfunktion.

c) $f(z)=\frac{1}{z}$ besitzt in $\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$ eine Stammfunktion.

5.4 Der Cauchysche Integralsatz

Wir kommen in diesem Abschnitt zu einem Hauptsatz in der Funktionentheorie. Wir werden hier endlich sehen, daß holomorphe Funktionen insbesondere analytisch sind, und wir werden mehrere Charakterisierungen von Holomorphie kennenlernen.

Wir beginnen jedoch mit einer einfachen Konsequenz aus den Hauptsätzen aus den ersten Abschnitten dieses Kapitels.

Theorem 5.12 (Cauchyscher Integralsatz für sternförmige Gebiete). *Sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion auf einem sternförmigen Gebiet $U \subseteq \mathbb{C}$. Außerdem sei f differenzierbar mit eventueller Ausnahme eines Punktes. Dann besitzt f in U eine Stammfunktion, und folglich ist für jede rektifizierbare Kurve $\gamma : [a,b] \to U$*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Beweis. Die Behauptung ist eine direkte Folgerung aus dem Theorem von Goursat (Theorem 5.8), dem Theorem von Morera (Theorem 5.9) und dem Theorem über die Stammfunktion (Theorem 5.6).

Theorem 5.13 (Cauchysche Integralformel). *Sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine differenzierbare Funktion ($U \subseteq \mathbb{C}$ offen). Dann gilt für alle abgeschlossenen Kreisscheiben $\bar{B}(a,r) \subseteq U$ und alle $z \in B(a,r)$*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(a,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta.$$

Beweis. Seien $a \in U$ und $r > 0$, so daß $\bar{B}(a,r) \subseteq U$. Sei $z \in B(a,r)$. Wende das Theorem von Goursat auf die Funktion $g : U \to \mathbb{C}$

$$g(\zeta) := \begin{cases} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z} & \text{für } \zeta \neq z, \\ f'(z) & \text{für } \zeta = z, \end{cases}$$

die in U stetig und in $U \setminus \{z\}$ differenzierbar ist, an. Diese Funktion besitzt in einer Umgebung von $\bar{B}(a,r)$ eine Stammfunktion. Aus dem Theorem 5.6 folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial B(a,r)} g(\zeta)\,d\zeta \\ &= \int_{\partial B(a,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - \int_{\partial B(a,r)} \frac{f(z)}{\zeta - z}\,d\zeta \\ &= \int_{\partial B(a,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - f(z) 2\pi i. \end{aligned}$$

Korollar 5.14 (Cauchysche Integralformel II). *Sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine differenzierbare Funktion ($U \subseteq \mathbb{C}$ offen). Dann ist f beliebig oft komplex differenzierbar. Des Weiteren gilt für alle abgeschlossenen Kreisscheiben $\bar{B}(a,r) \subseteq U$, alle $z \in B(a,r)$ und alle $k \in \mathbb{N}_0$,*

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial B(a,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\,d\zeta.$$

Beweis. In der Cauchyschen Integralformel man kann das Integral nach dem Parameter z ableiten (also Integralprozess und Differenzialprozess vertauschen).

Theorem 5.15 (Potenzreihenentwicklung). *Sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine differenzierbare Funktion ($U \subseteq \mathbb{C}$ offen), und sei $a \in U$. Dann hat die Potenzreihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k$$

Konvergenzradius

$$R \geq \sup\{r > 0 : \bar{B}(a,r) \subseteq U\},$$

und es gilt

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k \text{ für alle } z \in B(a,R) \cap U.$$

Insbesondere ist f analytisch.

Beweis. Seien $a \in U$ und $r > 0$, so daß $\bar{B}(a,r) \subseteq U$. Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\right| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(a,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, d\zeta\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \sup_{\zeta \in \partial B(a,r)} \frac{|f(\zeta)|}{|z-a|^{k+1}} 2\pi r \\
&= \frac{1}{r^k} \sup_{\zeta \in \partial B(a,r)} |f(\zeta)| \\
&= \frac{C_r}{r^k}
\end{aligned}$$

und somit

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\right|} \leq \frac{1}{r} \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{C_r} = \frac{1}{r}.$$

Aus dieser Ungleichung folgt die erste Behauptung.

Die zweite Behauptung folgt, wenn man in der Cauchyschen Integralformel den Term $\frac{1}{\zeta - z}$ in eine geometrische Reihe entwickelt.

Theorem 5.16 (Charakterisierungen von Holomorphie). *Sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion ($U \subseteq \mathbb{C}$ offen). Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *f ist holomorph, d. h. stetig komplex differenzierbar.*

(ii) *$f = u + iv$ für zwei stetige, reell differenzierbare Funktionen $u, v : U \to \mathbb{R}$, die die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllen.*

(iii) *f ist komplex differenzierbar.*

(iv) *Für alle Dreiecke $\Delta \subseteq U$ gilt*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0.$$

(v) *f besitzt auf allen sternförmigen Teilmengen von U eine Stammfunktion.*

(vi) *Für alle $a \in U$, $r > 0$ mit $\bar{B}(a,r) \subseteq U$ und alle $z \in B(a,r)$ gilt*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(a,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

(vii) *f ist analytisch.*

Beweis. Die Äquivalenz (i)⇔(ii) ist Aussage des Theorems 3.2. Die Implikation (i)⇒(iii) ist trivial. Die Implikation (iii)⇒(iv) ist Aussage des Satzes von Goursat (Theorem 5.8), während (iv)⇒(v) Aussage des Satzes von Morera (Theorem 5.9) ist. Für die Implikation (v)⇒(vi) bemerke man, daß jede lokale Stammfunktion F von f differenzierbar ist, und somit, wie im Beweis von Theorem 5.13 gezeigt, die Cauchysche Integralformel erfüllt. Damit ist F beliebig oft differenzierbar, und somit ist $f = F'$ (beliebig oft) differenzierbar. Man kann also noch einmal den Beweis der Cauchyschen Integralformel heranziehen und erhält (vi). Aus der Cauchyschen Integralformel für f erhält man wie im Beweis von Theorem 5.15, daß f analytisch ist, und somit ist die Implikation (vi)⇒(vii) wahr. Die Implikation (vii)⇒(i) folgt aus dem Satz **??**.

Übungsblatt 6: Potenzreihenentwicklung

6.1 Sei $f(z) = \frac{1}{1+z}$, $z \neq -1$. Man bestimme das größte Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$, auf dem f holomorph ist, und den größten Kreis mit Mittelpunkt $z_0 = 0$ bzw. um $z_0 = i$, auf dem f in eine Potenzreihe entwickelbar ist. Bestimmen Sie die erste 3 Glieder dieser Potenzreihen !

6.2* Sei $f(z) = \frac{z}{e^z-1}$, $z \neq 0$. Man zeige, daß f in $z_0 = 0$ stetig fortgesetzt werden kann. Man zeige, daß die fortgesetzte Funktion um $z_0 = 0$ in eine Potenzreihe entwickelbar ist. Man bestimme ihren Konvergenzradius und die erste 3 Glieder!

6.3 Geben Sie eine Funktion an, die auf der Einheitskreisscheibe stetig, aber nicht in eine Potenzreihe entwickelbar ist. Begründen Sie Ihr Beispiel.

6.4 Geben Sie eine oder mehrere Methoden an, wie man folgende Funktionen in eine Potenzreihe um $z_0 = 0$ entwickeln kann:

a) $f(z) = \frac{2z+3}{z+1}$

b) $f(z) = e^z \cos z$

c) $f(z) = e^{z^2}$

d) $f(z) = z+1$

5.5 Der allgemeine Cauchysche Integralsatz

Ein **Weg / Integrationsweg** ist eine stückweise stetig differenzierbare Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ mit Orientierung. Eine **Kette** Γ ist Vereinigung endlich vieler Integrationswege γ_k mit zugeordneten $n_k \in \mathbb{Z}$ die die Vielfachkeit des Durchlaufens und die Orientierung beschreibt. Ein **Zyklus** ist eine Kette wo jeder Punkt genauso oft Anfangspunkt ist wie Endpunkt (also eine "geschlossene" Kette).

Für jeden Zyklus γ und jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$ definieren wir die **Umlaufzahl von Γ bezüglich z**

$$n(z,\Gamma) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{w-z}\, dw.$$

Lemma 5.17. *Für jeden Zyklus γ und jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$ gilt*

$$n(\gamma, z) \in \mathbb{Z}.$$

Beweis. Es genügt, die Aussage für einen geschlossenen, stückweise differenzierbaren Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ zu zeigen. Sei $g : [a,b] \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$g(t) := \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z}\, ds \quad (t \in [a,b]).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} e^{-g(t)}(\gamma(t)-z) &= -e^{-g(t)} g'(t)(\gamma(t)-z) + e^{-g(t)}\gamma'(t) \\
&= -e^{-g(t)} \frac{\gamma'(t)(\gamma(t)-z)}{\gamma(t)-z} + e^{-g(t)}\gamma'(t) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

und somit

$$\gamma(a) - z = e^{-g(a)}(\gamma(a)-z) = e^{-g(b)}(\gamma(b)-z) = e^{-g(b)}(\gamma(a)-z).$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$e^{-\int_a^b \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z}\, ds} = e^{-\int_\gamma \frac{1}{w-z}\, dw} = 1,$$

das heißt,

$$\int_\gamma \frac{1}{w-z}\,dw \in 2\pi i\mathbb{Z}.$$

Bemerkung 5.18. Ein Theorem, das wir nicht beweisen werden, sagt, daß die Windungszahl eines Zyklus γ bezüglich eines Punktes $z \in \mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$ auch folgendermaßen eingeführt werden kann. Wir verbinden den Punkt z durch einen Halbstrahl mit dem Punkt ∞. Wenn wir diesen Halbstrahl von ∞ aus bis z durchlaufen, addieren wir jedesmal $+1$, wenn wir einen positiv orientierten Weg durchstochen haben, und wir addieren jedesmal -1, wenn wir einen negativ orientierten Weg durchstochen haben. Das Ergebnis bei z ist dann genau die Windungszahl $n(\gamma,z)$.

Beispiel 5.19. Für eine positiv orientierte Kreislinie bekommen wir mit der Definition und mit der obigen Bemerkung die gleichen Windungszahlen, nämlich $+1$ im Inneren des Kreises, und 0 im Äußeren. Andere Beispiele: zwei Kreislinien die ein Kreisring bilden, und gleich oder verschieden orientiert sind; zwei Kreislinien schneiden sich, verschiedene Orientierungmöglichkeiten, aber so daß sie einen Zyklus bilden.

Lemma 5.20. *Sei γ ein Zyklus in $\mathbb{C}$. Dann ist $n(\gamma,\cdot)$ auf jeder zusammenhängenden Teilmenge von $\mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$ konstant.*

Beweis. Sei $U \subseteq \mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$ eine offene, zusammenhängende Menge. Die Funktion $z \mapsto n(\gamma,z)$ ist stetig, wie man leicht von der Definition über das Integral ablesen kann. Stetige Bilder von zusammenhängenden Mengen sind zusammenhängend (Übung!). Nach Lemma 5.17 bildet $n(\gamma,\cdot)$ nach $\mathbb{Z}$ ab. Die einzigen zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{Z}$ sind aber die einelementigen Mengen oder die leere Menge. Also ist $n(\gamma,\cdot)$ auf U konstant.

Theorem 5.21 (Allgemeiner Cauchyscher Integralsatz und Integralformel). *Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph ($U \subseteq \mathbb{C}$ offen). Sei γ ein Zyklus in U, so daß $n(\gamma,z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus U$. Dann gelten die Formeln*

$$\int_\Gamma f(\zeta)d\zeta = 0,$$

und

$$n(\gamma,z)\,f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta, \quad \textit{für } z \in U \setminus \Gamma.$$

Bemerkung 5.22. (a) Spezialfälle des allgemeinen Cauchyschen Integralsatzes sind:

a) γ ist eine Dreieckslinie in einer konvexen Menge U: Satz von Goursat.

b) γ ist eine positiv orientierte Kreislinie in einer konvexen Menge U: Cauchysche Integralformel.

c) U ist ein Kreisring, γ besteht aus zwei Kreislinien, eine positiv, und die andere negativ orientiert: das ist neu.

(b) Mit dem allgemeinen Cauchyschen Integralsatz kann man die Zerlegung einer holomorphen Funktion f auf einem Kreisring in die Summe zweier holomorpher Funktionen – eine holomorph im Inneren einer Kreisscheibe, die andere holomorph im Äußeren einer Kreisscheibe – beweisen. Setze

$$f_2(z) := \frac{1}{2\pi i}\int \gamma_1 \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \qquad f_1(z) := -\frac{1}{2\pi i}\int \gamma_2 \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

wobei $\varrho_1 < \varrho_2$ die Radien der Kreislinien γ_1, γ_2 sind.

Beweis (des allgemeinen Cauchyschen Integralsatzes).

Übungsblatt 7: Laurent- und Fourierreihenentwicklung

7.1 Untersuchen Sie die Funktion $f(z) = \frac{2}{z^2-4z+3}$, $z \neq 1,3$, auf Holomorphie und entwickeln Sie sie in eine Laurentreihe mit dem Mittelpunkt 0 in folgenden Gebieten:

a) $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$;
b) $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 3\}$;
c) $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 3\}$.

7.2 Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = (\cos x)^2$, $x \in (-\pi, \pi)$, auf die Möglichkeit einer 2π-periodischen Fortsetzung auf $\mathbb{R}$ und einer holomorphen Fortsetzung. Entwickeln Sie diese Funktion in eine Fourierreihe !

7.3 Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = x$, $x \in (-\pi, \pi)$, auf die Möglichkeit einer 2π-periodischen Fortsetzung auf $\mathbb{R}$ und einer holomorphen Fortsetzung. Was kann man über die Fourierreihe sagen?

7.4 Ordnen Sie die Umlaufzahl in den offenen Komponenten der Ebene bezüglich der skizzierten Kurven zu jedem Punkt zu!

5.6 Nullstellen holomorpher Funktionen und der Identitätssatz

Das folgende Lemma ist eine einfache, aber fundamentale Aussage über Nullstellen von holomorphen Funktionen.

Lemma 5.23. *Sei $f : U \to C$ eine holomorphe Funktion ($U \subseteq \mathbb{C}$ offen) und sei $a \in U$ eine Nullstelle von f. Dann ist entweder f in einer Umgebung von a konstant gleich 0, oder es existiert ein $r > 0$, so daß f keine weitere Nullstelle in $B(a,r) \setminus \{a\}$ besitzt.*

Beweis. Sei

$$m := \inf\{k \in \mathbb{N} : f^{(k)}(a) \neq 0\}.$$

Falls $m = \infty$, dann ist $f^{(k)}(a) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, und somit

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k = 0$$

für alle z in einer Umgebung von a.

Falls $m < \infty$, dann ist $f^{(m)}(a) \neq 0$ und $f^{(k)}(a) = 0$ für alle $0 \leq k \leq m-1$. Somit ist, für alle z in einer Umgebung von a,

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k \\ &= \sum_{k=m}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k \\ &= (z-a)^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k+m)}(a)}{k!}(z-a)^k \\ &= (z-a)^m g(z), \end{aligned}$$

wobei g eine in einer Umgebung von a holomorphe Funktion ist mit $g(a) \neq 0$. Wegen Stetigkeit von g gilt $g(z) \neq 0$ für alle z in einer Umgebung von a, und aus der obigen Gleichung folgt die Behauptung.

Theorem 5.24 (Zählen von Nullstellen). *Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, und sei $a \in U$ eine Nullstelle m-facher Ordnung von $f - f(a)$ ($m \in \mathbb{N}$). Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und ein $\delta > 0$, so daß für alle $\zeta \in B(f(a), \delta) \setminus \{f(a)\}$ die Funktion $f - \zeta$ in $B(a, \varepsilon)$ genau m einfache Nullstellen besitzt.*

Beweis. Weil a eine Nullstelle endlicher Ordnung von $f - f(a)$ ist, ist f auf keiner Umgebung von a konstant. Nach Lemma 5.23 ist a eine isolierte Nullstelle von $f - f(a)$, das heißt, es gibt ein $\varepsilon > 0$, so daß

$$f(z) \neq f(a) \quad \text{für alle } z \in B(a, \varepsilon) \setminus \{a\}.$$

Indem wir $\varepsilon > 0$ kleiner wählen, wenn nötig, erhalten wir außerdem, daß

$$f'(z) \neq 0 \quad \text{für alle } z \in B(a, \varepsilon) \setminus \{a\}.$$

Theorem 5.25 (Identitätssatz). *Für zwei holomorphe Funktionen $f, g : U \to \mathbb{C}$ auf einer offenen, zusammenhängenden Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $f = g$.

(ii) *Es gibt einen Punkt $z_0 \in U$, so daß*

$$f^{(k)}(z_0) = g^{(k)}(z_0) \quad \textit{für alle } k \in \mathbb{N}_0.$$

(iii) *Die Menge* $\{z \in U : f(z) = g(z)\}$ *besitzt einen Häufungspunkt in* U.

Beweis. Die Implikationen (i)⇒(ii) und (i)⇒(iii) sind trivial.
(ii)⇒(i) Wir wollen annehmen, daß die Aussage (ii) gilt, und wir setzen

$$B := \{z \in U : f^{(k)}(z) = g^{(k)}(z) \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0\}.$$

Wegen Stetigkeit der Ableitungen von f und g ist

$$B = \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} \{z \in U : f^{(k)}(z) = g^{(k)}(z)\}$$

abgeschlossen in U. Nach Voraussetzung ist außerdem B nicht leer. Schließlich ist B offen in U, denn für alle $z_1 \in B$ und alle z in einer Umgebung von z_1 gilt

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_1)}{k!}(z - z_1)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(z_1)}{k!}(z - z_1)^k \\ &= g(z). \end{aligned}$$

Weil U zusammenhängend ist, gilt schließlich $B = U$, das heißt, $f = g$.
(iii)⇒(ii) Sei $z_0 \in U$ Häufungspunkt der Menge $\{z \in U : f(z) = g(z)\}$. Wegen Stetigkeit gilt dann $f(z_0) = g(z_0)$. Aus der Voraussetzung (iii) und Lemma 5.23 folgt, daß $f = g$ in einer Umgebung von z_0 gilt, und daraus folgt (ii).

5.7 Laurentreihen, Singularitäten, Residuensatz

5.7.1 Reihenentwicklung im Äußeren einer Kreisscheibe

Sei $f : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \supseteq U \to \mathbb{C}$ in einer Umgebung U von ∞ definiert, so daß der Grenzwert $\lim_{z\to\infty} f(z)$ in $\mathbb{C}$ existiert. Die Funktion f heißt dann **holomorph in** ∞ wenn die Funktion $g(w) := f(\frac{1}{w})$, $w \neq 0$, $g(0) := \lim_{z\to\infty} f(z)$ in einer Umgebung von 0 holomorph ist.

Sei $R > 0$ und sei $f : \{z \in \mathbb{C} : |z| > R\} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist die Funktion g (wie oben definiert) auf der Kreisscheibe $\{w \in \mathbb{C} : |w| < \frac{1}{R}\}$ holomorph und insbesondere in eine Potenzreihe entwickelbar:

$$g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n w^n, \quad |w| < \frac{1}{R}, \text{ mit } b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\xi)}{\xi^{n+1}} d\xi,$$

wobei γ eine Kreislinie mit Mittelpunkt 0 und Radius $\delta < \frac{1}{R}$ ist. Diese Gleichung ausgedrückt für f (Transformation der Variable $w = \frac{1}{z}$, des Summationsindex $k = -n$ und der Koeffizienten $a_k := b_n$, Transformation $\zeta = \frac{1}{\xi}$ in dem Integral) lautet:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{0} a_k z^k, \quad |z| > R, \text{ mit } a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\widetilde{\gamma}} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}} \, d\zeta,$$

wobei $\widetilde{\gamma}$ die Kreislinie mit Mittelpunkt 0 und Radius $\frac{1}{\delta} > R$ ist. Das ist die Reihenentwicklung einer Funktion, die holomorph im Äußeren einer Kreisscheibe ist, in eine Potenzreihe mit negativen Potenzen.

Eine Potenzreihe mit positiven und negativen Exponenten heißt **Laurentreihe**. Ihr natürliches Konvergenzgebiet ist der Durchschnitt der natürlichen Konvergenzgebiete der beiden Teilreihen, die nur positive bzw. nur negative Exponenten enthalten, d. h. der Durchschnitt einer Kreisscheibe und dem Äußeren einer Kreisscheibe, also ein Kreisring.

5.7.2 Laurentreihen, Reihenentwicklung im Kreisring

Eine Reihe der Form $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$, das heißt, eine Potenzreihe mit positiven und negativen Exponenten, heißt **Laurentreihe**.

Theorem 5.26 (Laurentreihe). *Sei $f : \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\} \to \mathbb{C}$ holomorph in einem Kreisring ($0 \le r < R \le \infty$). Dann gibt es eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, so daß die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < R$ absolut konvergiert, die Reihe $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n z^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > r$ absolut konvergiert, und $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $r < |z| < R$. Jede auf einem Kreisring holomorphe Funktion läßt sich also in eine Laurentreihe entwickeln.*

Beweis. Wähle $\varrho \in]r, R[$ und setze

$$a_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(0,\varrho)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} \, d\zeta \quad (n \in \mathbb{Z}). \tag{5.1}$$

Die Definition der Koeffizienten a_n hängt in der Tat nicht von der Wahl von ϱ ab, denn sind $\varrho_1, \varrho_2 \in]r, R[$ beliebig, dann gilt wegen der allgemeinen Cauchyschen Integralformel (Theorem 5.21) für jede holomorphe Funktion $g : \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\} \to \mathbb{C}$

$$\int_{\partial B(0,\varrho_1)} g(\zeta) \, d\zeta - \int_{\partial B(0,\varrho_2)} g(\zeta) \, d\zeta = 0.$$

Es gilt also für alle $n \in \mathbb{Z}$ und alle $\varrho \in]r, R[$

$$\begin{aligned}|a_n| &\leq \frac{1}{2\pi} 2\pi\varrho \sup_{|\zeta|=\varrho} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta|^{n+1}} \\ &= \varrho^{-n} \sup_{|\zeta|=\varrho} |f(\zeta)|.\end{aligned}$$

Somit gilt für alle $\varrho \in]r, R[$

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} &\leq \frac{1}{\varrho} \text{ und} \\ \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|} &\leq \varrho.\end{aligned}$$

Da die linken Seiten nicht von $\varrho \in]r, R[$ abhängen, gilt schließlich

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} &\leq \frac{1}{R} \text{ und} \\ \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|} &\leq r.\end{aligned}$$

Somit konvergieren die Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n z^n$ absolut für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < R$ beziehungsweise mit $|z| > r$.

Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $r < |z| < R$. Wähle ϱ_1, $\varrho_2 \in]r, R[$ mit $\varrho_1 < |z| < \varrho_2$. Aus der allgemeinen Cauchyschen Integralformel (Theorem 5.21) folgt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(0,\varrho_2)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(0,\varrho_1)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta.$$

Für alle $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $|\zeta| = \varrho_2$ gilt $|\zeta| > |z|$ und somit (geometrische Reihe!)

$$\begin{aligned}\frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{\zeta} \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}}.\end{aligned}$$

Andererseits gilt für alle $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $|\zeta| = \varrho_1$ die Ungleichung $|\zeta| < |z|$ und somit (geometrische Reihe!)

$$\begin{aligned}\frac{1}{\zeta - z} &= -\frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{\zeta}{z}} \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^n}{z^{n+1}} \\ &= -\sum_{-\infty}^{-1} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}}.\end{aligned}$$

Zusammengefasst ergibt sich

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(0,\varrho_2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} z^n \, d\zeta \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(0,\varrho_2)} \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} z^n \, d\zeta \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(0,\varrho_2)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} \, d\zeta \, z^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n. \end{aligned}$$

Bemerkung 5.27. Ist der Mittelpunkt des Kreisrings z_0 (anstelle von 0), ist die Entwicklung von f in eine Laurentreihe entsprechend verschoben:

$$f(z) = \sum a_n (z-z_0)^n \quad \text{mit } a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(z_0,\varrho)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} \, d\zeta.$$

5.7.3 Reihenentwicklung in Streifen

Wir starten mit einer Funktion $f : (-\pi,\pi) \to \mathbb{C}$ (sie kann auch reellwertig sein), so daß f periodisch fortsetzbar auf $\mathbb{R}$ ist; insbesondere existieren die Grenzwerte in den Randpunkten des Intervalls und sind gleich: $\lim_{x\nearrow\pi} f(x) = \lim_{x\searrow-\pi} f(x) \in \mathbb{C}$. Wir wollen außerdem annehmen, daß f in eine Umgebung von $[-\pi,\pi] \subseteq \mathbb{C}$ holomorph fortsetzbar ist. Dann bekommen wir nach Komposition mit den bijektiven, holomorphen Variablentransformationen $t_1 : z \mapsto iz$, $t_2 : z \mapsto e^z$ eine Funktion $g := f \circ t_1^{-1} \circ t_2^{-1}$, die holomorph auf einem Kreisring ist. Nach den vorigen Kapiteln ist g in eine Laurentreihe entwickelbar:

$$g(w) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n w^n, \quad r < |w| < R, \quad \text{mit } c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{g(v)}{v^{n+1}} \, \mathrm{d}v,$$

wobei $r < 1 < R$ und γ die Kreislinie mit Mittelpunkt 0 und Radius 1 ist. Diese Formel, rücktransformiert auf f ($w = e^{iz}, f(z) = g(w)$, Parametrisierung der Kreislinie γ mit $\varphi(t) = e^{it}, t \in [-\pi,\pi]$), und eingeschränkt auf $z = x \in [-\pi,\pi]$ lautet:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad x \in [-\pi,\pi], \quad \text{mit } c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} \, \mathrm{d}t.$$

Das ist die **Fourierreihe** der Funktion f.

Wenn f ursprünglich reelle Werte hatte, dann schreibt man die obige Formel auch um mit Hilfe der Funktionen sin, cos und mit reellen Koefizienten a_n, b_n, um die **reelle Fourierreihe** der Funktion f zu bekommen.

Bemerkung 5.28. Wenn die Funktion $f : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ nicht stetig ist, oder die Grenzwerte in Randpunkten nicht überein stimmen, oder wenn f nicht holomorph fortsetzbar ist, dann kann man eventuell immer noch ihre Fourierreihe definieren (zur Definition der Koeffizienten a_n, b_n reicht z.B. die Riemann-integrierbarkeit von f). In diesem allgemeinen Fall ist es aber nicht klar, ob die so definierte Funktionenreihe überhaupt konvergent ist, und auch wenn ja, ob ihre Summe mit der Funktion f übereinstimmt (im Allgemeinen nicht, in einer geeigneten Weise meistens ja).

5.7.4 Der Residuensatz

Sei $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ eine isolierte Singularität von f. Dann ist f in der punktierten Kreisscheibe $B(z_0, r)$ ($r > 0$ klein genug) in eine Laurentreihe entwickelbar, das heißt,

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Wir nennen den Koeffizienten a_{-1} das **Residuum** von f in z_0, und schreiben

$$\operatorname{Res}(f, z_0) := a_{-1}.$$

Proposition 5.29 (Residuensatz). *Sei $f : U \setminus \{z_1, \dots, z_n\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, wobei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge ist, und $z_1, \dots, z_n \in U$ isolierte Singularitäten von f sind. Sei γ ein Zyklus in $U \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$, so daß für alle $z \in \mathbb{C} \setminus U$ die Umlaufzahl $n(\gamma, z) = 0$. Dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z)\, \mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{n} n(z_j, \Gamma) \operatorname{Res}(f, z_j).$$

Bemerkungen, Spezialfälle, neue Aussagen

Beweis (Idee). In Laurentreihe entwickeln um jede Singularität z_j, die Hauptteile (d. h. die mit negativen Potenzen) abziehen von f, und damit eine Funktion bekommen die holomorph in U ist. Über γ integriert wird 0 (Cauchy), die einzelnen Teile der einzelnen Hauptteile einzeln Integrieren. Das meiste davon wird 0 (besitzen Stammfunktion), der Restliche mit $\frac{1}{z-z_j}$ (besitzt keine

Stammfunktion in Kreisscheibe um z_j !) ist die Umlaufzahl und der Koeffizient davor das Residuum.

5.7.5 Klassifizierung isolierter Singularitäten

Seien $z_0 \in \mathbb{C}$, U eine offene Umgebung von z_0, und $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Der Punkt z_0 heißt **isolierte Singularität von** f und $U \setminus \{z_0\}$ heißt **punktierte Umgebung von** z_0. Es können drei Fälle passieren:

a) $\lim_{z\to z_0} f(z)$ existiert in $\mathbb{C}$. In diesem Fall kann man die Funktion f stetig fortsetzen in z_0. Der Punkt z_0 heißt dann **hebbare Singularität von** f, ist aber keine Singularität im eigentlichen Sinne.

b) $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$. Der Punkt z_0 heißt dann **Pol von** f.

c) $\lim_{z\to z_0} f(z)$ existiert in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ nicht. Der Punkt z_0 heißt dann **wesentliche Singularität von** f.

Definition der **Ordnung** eines Poles, einer Nullstelle.

Beispiel: rationale Funktionen.

Bemerkung 5.30. Jede holomorphe Funktion mit Ableitung ungleich Null ist lokal winkelerhaltend. Außerdem gilt, daß die Funktion $z \mapsto \frac{1}{z}$ winkelerhaltend in ∞ ist (Riemammsche Sphäre). Also ist eine Funktion wie $z \mapsto \frac{1}{z-z_0}$, obwohl sie eine Singularität in z_0 hat, immer noch "winkeltreu".

5.7.6 Berechnung des Residuums

Für die Funktion $f(z) = \frac{1}{z-z_0}$ kann man das Residuum direkt ausrechnen.

Lemma 5.31. a) *f hat Pol erster Ordnung:* $\mathrm{Res}(f,z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$.

b) $f(z) = \frac{1}{h(z)}$ *und h hat Nullstelle erster Ordnung:* $\mathrm{Res}(f,z_0) = \frac{1}{h'(z_0)}$

c) $f(z) = g(z)h(z)$, *g holomorph, und h hat Pol erster Ordnung:* $\mathrm{Res}(f,z_0) = g(z_0)\,\mathrm{Res}(h,z_0)$

d) $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$, *g holomorph, und h hat Nullstelle erster Ordnung:* $\mathrm{Res}(f,z_0) = g(z_0)\frac{1}{h'(z_0)}$

e) *f hat Pol k-ter Ordnung...*

Beispiele: $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+1}$ ausrechnen; für rationale Funktion aus Partialbruchentwicklung (so ist auch die ganze Laurentreihe bestimmbar)

5.7.7 Berechnung reeller Integrale

Aufgabe: Berechne $\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$!
Tricks: als Grenzwert von Integralen über $[-R,R]$, $R\to\infty$
Realteil komplexer Funktion $f(z)=\frac{e^{iz}}{z^2+1}$
f auf Holomorphie, Singularitäten untersuchen, Residuen berechnen
passenden Zyklus Γ_R wählen, Umlaufzahl bestimmen
Residuensatz, Abschätzungen

Übungsblatt 8: Residuensatz

8.1 Untersuchen Sie die Funktion $f(z)=\frac{1}{1+z^2}$ auf Singularitäten und bestimmen Sie das Integral $\int_\gamma \frac{1}{1+z^2}\,\mathrm{d}z$ für folgende Kurven mit der Hilfe des Residuensatzes !

a) γ ist die positiv orientierte Kreislinie mit Mittelpunkt i und Radius 1
b) γ ist die positiv orientierte Kreislinie mit Mittelpunkt $-i$ und Radius 1
c) γ ist die positiv orientierte Kreislinie mit Mittelpunkt 0 und Radius 2

8.2 Berechnen Sie $\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$!

8.3 Berechnen Sie $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$!

8.4* Berechnen Sie das sogenannte Fresnelintegral $\int_0^\infty \cos(x^2)\,\mathrm{d}x$!

5.8 Folgen holomorpher Funktionen, die Sätze von Montel und Vitali

Sei $U\subseteq\mathbb{C}$ eine offene Menge, und seien $f_n, f: U\to\mathbb{C}$ Funktionen. Wir sagen, daß die Folge (f_n) **lokal gleichmäßig beschränkt** ist, wenn es für jede kompakte Teilmenge $K\subseteq U$ eine Konstante $C_K\geq 0$ gibt, so daß

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{z\in K}|f_n(z)|\leq C_K.$$

Wir sagen, daß die Folge (f_n) **punktweise gegen f konvergiert**, wenn

$$\forall z\in U:\ \lim_{n\to\infty}|f_n(z)-f(z)|=0,$$

und wir sagen, daß sie **lokal gleichmäßig gegen f konvergiert**, wenn

$$\forall K\subseteq U \text{ kompakt: } \lim_{n\to\infty}\sup_{z\in K}|f_n(z)-f(z)|=0.$$

Theorem 5.32 (Montel). *Jede lokal gleichmäßig beschränkte Folge holomorpher Funktionen $U \to \mathbb{C}$ ($U \subseteq \mathbb{C}$ offen) besitzt eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge, und der Grenzwert dieser Teilfolge ist holomorph.*

Beweis. Sei (f_n) eine lokal gleichmäßig beschränkte Folge holomorpher Funktionen $U \to \mathbb{C}$.

Sei $K \subseteq U$ eine kompakte Teilmenge. Ein Kompaktheitsargument liefert die Existenz eines $r > 0$, so daß

$$K_r := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{dist}(z, K) \leq r\} \subseteq U.$$

Sei $C_{K_r} \geq 0$ wie in der Definition der lokalen, gleichmäßigen Beschränktheit oben. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $z \in K$, wegen Cauchys Integralformel,

$$\begin{aligned} |f_n'(z)| &= \Big|\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z,r)} \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z} \,\mathrm{d}\zeta\Big| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} 2\pi r \frac{C_{K_r}}{r^2} \\ &= \frac{C_{K_r}}{r}, \end{aligned}$$

das heißt, auch die Folge (f_n') ist lokal gleichmäßig beschränkt. Damit ist die Folge (f_n) auf K (gleichmäßig) gleichgradig stetig (sic!). Aus dem Satz von Arzelà-Ascoli folgt, daß eine Teilfolge von (f_n) gleichmäßig auf K gegen eine Funktion f konvergiert. Weil K beliebig war, und weil man die Menge U mit einer Folge von kompakten Teilmengen ausschöpfen kann, folgt aus einem Cantorschen Diagonalfolgenargument, daß eine Teilfolge von (f_n) lokal gleichmäßig gegen f konvergiert.

Aus der lokal gleichmäßigen Konvergenz folgt für alle kompakten Dreiecke $\Delta \subseteq U$

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Delta} f(z) \,\mathrm{d}z &= \int_{\partial\Delta} \lim_{n\to\infty} f_n(z) \,\mathrm{d}z \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{\partial\Delta} f_n(z) \,\mathrm{d}z \\ &= 0, \end{aligned}$$

und somit ist f holomorph.

Korollar 5.33. *Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge, und sei (f_n) eine lokal gleichmäßig beschränkte Folge holomorpher Funktionen $U \to \mathbb{C}$. Sei des Weiteren $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *$f_n \to f$ punktweise.*

(ii) *$f_n \to f$ lokal gleichmäßig.*

(iii) *Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ lokal gleichmäßig.*

Beweis. Die Implikationen (iii)⇒(ii) und (ii)⇒(i) sind trivial.

Die Implikation (i)⇒(ii) folgt aus dem Satz von Montel (Theorem 5.32) und einem Teilteilfolgenargument.

(ii)⇒(iii) Für alle $z \in U$ und alle $r > 0$ mit $\bar{B}(z,r) \subseteq U$ folgt aus der Cauchyschen Integralformel und der lokal gleichmäßigen Konvergenz

$$\begin{aligned} f_n^{(k)}(z) &= \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial B(z,r)} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} \, \mathrm{d}\zeta \\ &\to \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial B(z,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} \, \mathrm{d}\zeta \\ &= f^{(k)}(z) \quad \text{as } n \to \infty, \end{aligned}$$

das heißt, die Folge der k-ten Ableitungen $(f_n^{(k)})$ konvergiert punktweise, und wegen der Äquivalenz (i)⇔(ii) lokal gleichmäßig, gegen $f^{(k)}$.

Theorem 5.34 (Vitali). *Seien $f_n, f : U \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen auf einer offenen, zusammenhängenden Menge $U \subseteq \mathbb{C}$. Man nehme an, daß die Folge (f_n) lokal gleichmäßig beschränkt ist. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *$f_n \to f$ punktweise.*

(ii) *$f_n \to f$ lokal gleichmäßig.*

(iii) *Die Menge $D := \{z \in U : \lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)\}$ besitzt einen Häufungspunkt in U.*

Beweis. Die Äquivalenz (i)⇔(ii) folgt aus dem Korollar 5.33, und die Implikation (i)⇒(iii) ist trivial.

(iii)⇒(ii) Nach dem Satz von Montel (Theorem 5.32) besitzt jede Teilfolge von (f_n) wiederum eine Teilfolge, die lokal gleichmäßig gegen eine holomorphe Funktion $U \to \mathbb{C}$ konvergiert. Nach Voraussetzung stimmt der Grenzwert dieser Teilfolge auf der Menge D mit der Funktion f überein, und die Menge D besitzt einen Häufungspunkt in U. Aus dem Identitätssatz (Theorem 5.25) folgt, daß der Grenzwert der Teilfolge also gleich f ist. Aus dem Teilteilfolgenargument folgt, daß die Folge (f_n) selbst schon lokal gleichmäßig gegen f konvergiert.

5.9 Der Satz von Liouville

Eine auf ganz $\mathbb{C}$ definierte, holomorphe Funktion heißt auch **ganze Funktion**.

Theorem 5.35 (Satz von Liouville). *Jede ganze, beschränkte Funktion ist konstant.*

Beweis. Aus dem Cauchyschen Integralsatz folgt für alle $z \in \mathbb{C}$ und alle $R > 0$

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z,R)} \frac{f(w)}{(w-z)^2} \, \mathrm{d}w$$

und somit

$$\begin{aligned} |f'(z)| &\leq \frac{1}{2\pi} 2\pi R \frac{\|f\|_\infty}{R^2} \\ &= \frac{\|f\|_\infty}{R} \\ &\to 0 \quad \text{as } R \to \infty, \end{aligned}$$

das heißt, $f' = 0$. Also ist f konstant.

Aus dem Beweis des Satzes von Liouville folgt, daß die Voraussetzung der Beschränktheit der ganzen Funktion abgeschwächt werden kann.

Korollar 5.36. *Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion. Es gebe ein $C \geq 0$ und ein $\alpha \in [0,1)$, so daß*

$$|f(z)| \leq C(1 + |z|^\alpha) \text{ für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Als Korollar zum Satz von Liouville erhält man den Fundamentalsatz der Algebra.

Theorem 5.37 (Fundamentalsatz der Algebra). *Jedes nichtkonstante Polynom (mit reellen oder komplexen Koeffizienten) hat mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.*

Beweis (durch Widerspruch). Wenn $p(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$, dann ist $f(z) = \frac{1}{p(z)}$ holomorph auf $\mathbb{C}$. Es ist $p(z) = a_n z^n + \ldots a_1 z + a_0$ mit $a_n \neq 0$ und $n \geq 1$. Somit ist

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{z^n} \frac{1}{a_n + \cdots + \frac{a_0}{z^n}} = 0.$$

Folglich ist f beschränkt auf $\mathbb{C}$. Aus dem Satz von Liouville folgt, daß f konstant ist. Folglich ist p konstant, ein Widerspruch zur Annahme.

5.10 Unendliche Produkte

Sei (a_n) eine komplexe Folge. Wir definieren die **Partialprodukte**

$$b_n := a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

Falls $\lim_{n\to\infty} b_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ existiert, dann heißt das Symbol

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{N\to\infty} a_1 \cdot a_2 \ldots a_N \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

unendliches Produkt. Man kann mit Polarkoordinaten zeigen, daß in diesem Fall $\lim a_n = 1$ gelten muss. Ein **unendliches Funktionenprodukt** ist $\prod_{n=1}^{\infty} f_n(z) =: f(z)$.

Beispiel 5.38. Ein Polynom kann in lineare Faktoren zerleg werden und ist dann ein (endliches) Produkt von linearen Funktionen.

Die Funktion $f(z) := \frac{\sin \pi z}{z}$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $f(0) := \pi$ hat in 0 eine hebbare Singularität, ist holomorph in $\mathbb{C}$ und es gilt (ohne Beweis)

$$f(z) = \pi \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \quad \text{für } z \in \mathbb{C}.$$

Insbesondere gilt die obige Formel für $z = \frac{1}{2}$, und daraus erhält man die Wallissche Produktdarstellung von π:

$$\pi = 2 \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}.$$

Anwendung: gegebene Funktion in Produkt entwickeln um Nullstellen zu bekommen oder auszuschliesen.

Chapter 6
Die Riemannsche Zetafunktion

6.1 Die Gammafunktion

Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z > 0$ setzen wir

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t.$$

Die Funktion $\Gamma : \{\operatorname{Re} z > 0\} \to \mathbb{C}$ heißt **Gammafunktion**. Sie ist holomorph in ihrem Definitionsbereich.

Lemma 6.1 (Erste Eigenschaften der Gammafunktion).

a) *Für alle* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $\operatorname{Re} z > 0$ *gilt* $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$.

b) *Für alle* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $\operatorname{Re} z > 0$ *gilt* $|\Gamma(z)| \leq \Gamma(\operatorname{Re} z)$.

c) *Für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt* $\Gamma(n) = (n-1)!$.

d) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

e) Γ *setzt sich eindeutig zu einer meromorphen Funktion auf* $\mathbb{C}$ *fort, mit Polen erster Ordnung in den Punkten* $z \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$. *Die Funktionalgleichung* $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$ *gilt für alle* $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$.

Beweis. (1) Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z > 0$ ergibt eine partielle Integration

$$\begin{aligned} z\Gamma(z) &= z \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t \\ &= t^z e^{-t}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty t^z e^{-t} \, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty t^{(z+1)-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t \\ &= \Gamma(z+1). \end{aligned}$$

(2) Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z > 0$ folgt aus der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} |\Gamma(z)| &= \left| \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t \right| \\ &\leq \int_0^\infty |t^{z-1} e^{-t}| \, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty t^{\operatorname{Re} z - 1} e^{-t} \, \mathrm{d}t \\ &= \Gamma(\operatorname{Re} z). \end{aligned}$$

(3) Offensichtlich gilt

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} \, \mathrm{d}t = 1.$$

Aus dieser Gleichung und der Funktionalgleichung aus (1) berechnet man induktiv $\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1, \Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2, \Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 6, \ldots$ und schließlich $\Gamma(n) = (n-1)!$.

(4) Weiter gilt mit der Substitution $s = t^{\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned} \Gamma(\frac{1}{2}) &= \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} \, \mathrm{d}t \\ &= 2 \int_0^\infty e^{-s^2} \, \mathrm{d}s \\ &= \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

(5) Aus der Funktionalgleichung aus (1) folgt für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z > 0$ und alle $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \frac{1}{z} \Gamma(z+1) \\ &= \frac{1}{z(z+1)} \Gamma(z+2) \\ &= \ldots \\ &= \Gamma(z+m) \prod_{k=0}^{m-1} \frac{1}{z+k}. \end{aligned}$$

Die Funktion auf der rechten Seite der Gleichung besitzt offensichtlich eine meromorphe Fortsetzung auf die Halbebene $\{\operatorname{Re} z > m\}$, mit Polen erster Ordnung in den Punkten $0, -1, \ldots, -(m-1)$. Da $m \in \mathbb{N}$ beliebig war, besitzt Γ eine meromorphe Fortsetzung auf $\mathbb{C}$, mit Polen erster Ordnung in den Punkten $z \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$. Eindeutigkeit der meromorphen Fortsetzung folgt aus dem Identitätssatz (Theorem 5.25). Auch die Funktionalgleichung ist eine Konsequenz aus dem Identitätssatz.

Lemma 6.2 (Reflektionsformel für die Gammafunktion). *Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ gilt*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

Beweis. Setze $f(z) := \Gamma(z)\Gamma(1-z)\sin(\pi z)$ ($z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$). Dann gilt wegen Lemma 6.1 (5) für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} f(z+1) &= \Gamma(z+1)\,\Gamma(-z)\,\sin(\pi(z+1)) \\ &= z\,\Gamma(z)\,\Gamma(-z)\,(-\sin(\pi z)) \\ &= \Gamma(z)\,\Gamma(1-z)\,\sin(\pi z) \\ &= f(z). \end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \lim_{z\to 0} f(z) &= \lim_{z\to 0} z\,\Gamma(z)\Gamma(1-z)\frac{\sin(\pi z)}{z} \\ &= \lim_{z\to 0} \Gamma(z+1)\Gamma(1-z)\frac{\sin(\pi z)}{z} \\ &= \Gamma(1)^2\,\pi \\ &= \pi. \end{aligned}$$

Die isolierte Singularität $z = 0$ ist also hebbar, d. h. f besitzt eine holomorphe Fortsetzung in 0. Zusammen mit der 1-Periodizität ergibt sich, daß f eine ganze Funktion ist.

Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\frac{1}{2} \le \operatorname{Re} z \le \frac{3}{2}$ gilt mit Lemma 6.1 (1) und (2)

$$\begin{aligned} |\Gamma(z)\Gamma(1-z)| &= \left|\frac{\Gamma(z)\,\Gamma(2-z)}{1-z}\right| \\ &\le \frac{M^2}{|1-z|} \end{aligned}$$

mit $M := \sup_{\frac{1}{2}\le s\le\frac{3}{2}} \Gamma(s)$, und somit

$$|f(z)| \le C\frac{e^{\pi|\operatorname{Im} z|}}{1+|z|} \le C e^{\pi|\operatorname{Im} z|} \tag{6.1}$$

für eine Konstante $C \ge 0$.

Definiere nun $F : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to \mathbb{C}$ durch

$$F(w) := f\left(\frac{\log w}{2\pi i}\right),$$

wobei log ein beliebiger Ast des Logarithmus auf $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ ist. Da f 1-periodisch ist, besitzt diese Funktion F eine holomorphe Fortetzung auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Aus der Abschätzung (6.1) folgt für alle $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned}|F(w)| &= |f(\frac{\log w}{2\pi i})| \\ &\le Ce^{\pi|\mathrm{Im}\,\frac{\log w}{2\pi i}|} \\ &= Ce^{\frac{|\log|w||}{2}} \\ &= C\max\{|w|^{\frac{1}{2}}, |w|^{-\frac{1}{2}}\}.\end{aligned}$$

In der Nähe des Punktes $w = 0$ gilt also $|F(w)| \le C|w|^{-\frac{1}{2}}$, woraus folgt, daß 0 eine hebbare Singularität ist. Die Funktion F ist also eine ganze Funktion. Für große $|w|$ gilt $|F(w)| \le C|w|^{\frac{1}{2}}$, und aus dem allgemeineren Satz von Liouville folgt, daß F eine konstante Funktion ist. Dann ist aber auch f eine konstante Funktion. Aus $f(0) = \pi$ (siehe oben) folgt die Behauptung.

Bemerkung 6.3. Aus der Reflektionsformel für die Gammafunktion bekommt man ebenfalls $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

6.2 Die Riemannsche Zetafunktion

Wir definieren die **Riemannsche Zetafunktion** durch

$$\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z} \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \text{ mit } \mathrm{Re}\,z > 1,$$

wobei $n^{-z} := e^{-z\log n}$. Es gilt $|n^{-z}| = e^{-\mathrm{Re}\,z\log n} = \frac{1}{n^{\mathrm{Re}\,z}}$; also ist die Reihe für $\mathrm{Re}\,z > 1$ absolut konvergent und die Zetafunktion ist wohldefiniert. Sie ist holomorph in der Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,z > 1\}$. Es gibt viele andere Darstellungen der Zetafunktion, darunter die folgende Produktformel, die einen Zusammenhang zu den Primzahlen herstellt.

Theorem 6.4 (Eulersche Produktformel). *Für alle* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $\mathrm{Re}\,z > 1$ *gilt*

$$\zeta(z) = \prod_{p\in P}(1 - p^{-z})^{-1},$$

wobei P die Menge der Primzahlen ist.

Beweis (Idee). Umordnen, $(1 - p_i^{-z})^{-1}$ als geometrische Reihe entwickeln, unendliches Produkt unendlicher Summen umordnen. $(p_i^{-z})^k = (p_i^k)^{-z}$

Lemma 6.5. *Die Zetafunktion besitzt eine meromorphe Fortsetzung in die Halbebene* $\{\mathrm{Re}\,z > 0\}$. *Der Punkt* $z = 1$ *ist der einzige Pol von* ζ *in dieser Halbebene. Die Ordnung dieses Pols ist* 1 *und das Residuum der Zetafunktion in diesem Punkt ist* 1.

Beweis. Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z > 1$ gilt

$$\begin{aligned}\zeta(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^z} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n^z} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n\,(\frac{1}{n^z} - \frac{1}{(n+1)^z}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} nz \int_n^{n+1} \frac{1}{x^{z+1}}\, dx \\ &= z \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{[x]}{x^{z+1}}\, dx,\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}&[x] := \sup_{\substack{m\in\mathbb{Z}\\ m\le x}} m \text{ der ganzzahlige Anteil von } x \text{ ist, und} \\ &\{x\} := x - [x] \in [0,1).\end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned}\zeta(z) &= z \int_1^{\infty} \frac{1}{x^z}\, \mathrm{d}x - z \int_1^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{z+1}}\, \mathrm{d}x \\ &= \frac{z}{z-1} - z \int_0^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{z+1}}\, \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Die Funktion $z \mapsto \frac{z}{z-1}$ ist meromorph auf $\mathbb{C}$, hat einen Pol erster Ordnung in $z = 1$ und das Residuum in diesem Pol ist gleich 1. Das Integral $\int_0^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{z+1}}\, \mathrm{d}x$ hingegen konvergiert absolut für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z > 0$ und definiert in dieser Halbebene eine holomorphe Funktion. Damit folgt die Behauptung.

Theorem 6.6. *Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z > 0$ und $z \neq 1$ gilt*

$$\pi^{-\frac{z}{2}}\, \Gamma(\frac{z}{2})\zeta(z) = \frac{1}{z(z-1)} + \int_1^{\infty} (x^{\frac{z}{2}-1} + x^{-\frac{z+1}{2}})\, \omega(x)\, \mathrm{d}x, \tag{6.2}$$

wobei

$$\omega(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}.$$

Wir beweisen dieses Theorem in mehreren Schritten.

Lemma 6.7. *Für alle $a \in \mathbb{R}_{>0}$ und alle $t \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-ist}\, e^{-\frac{as^2}{2}}\, \mathrm{d}s = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{-\frac{t^2}{2a}}. \tag{6.3}$$

Beweis. Wir berechnen

$$
\begin{aligned}
e^{\frac{t^2}{2a}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ist} e^{-\frac{as^2}{2}} \, \mathrm{d}s &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(as+it)^2}{2a}} \, \mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{a} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(s+it)^2}{2a}} \, \mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{a} \int_{\mathbb{R}+it} e^{-\frac{z^2}{2a}} \, \mathrm{d}z,
\end{aligned}
$$

wobei das Integral auf der rechten Seite als komplexes Kurvenintegral über die (unbeschränkte) Gerade $\mathbb{R} + it$ aufzufassen ist. Mit dem Cauchyschen Integralsatz können wir den Integrationsweg $\mathbb{R} + it$ zu $\mathbb{R}$ verschieben, und wir erhalten

$$
\begin{aligned}
e^{\frac{t^2}{2a}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ist} e^{-\frac{as^2}{2}} \, \mathrm{d}s &= \frac{1}{a} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{z^2}{2a}} \, \mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{z^2}{2}} \, \mathrm{d}z \\
&= \sqrt{\frac{2\pi}{a}}.
\end{aligned}
$$

Das folgende Resultat aus der Theorie der Fourierreihen wird hier nicht bewiesen.

Lemma 6.8 (Fourierreihen). *Für jede stetige, 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definiert man die* **Fourierkoeffizienten**

$$\hat{f}(k) := \int_0^{2\pi} e^{-iks} f(s)\, ds \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Ist dann f zusätzlich stetig differenzierbar, dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{ikt} \hat{f}(k).$$

Das folgende Lemma ist nur ein Spezialfall der Poissonschen Summationsformel.

Lemma 6.9 (Poissonsche Summationsformel). *Für alle $a \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{a(2\pi n)^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{k^2}{2a}}$$

Setzt man insbesondere $\theta(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 x}$ $(x \in \mathbb{R}_{>0})$, dann gilt

$$\sqrt{x}\,\theta(x) = \theta(\frac{1}{x}) \qquad (x \in \mathbb{R}_{>0}).$$

Beweis. Setze

$$f(t) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{a(t+2\pi n)^2}{2}} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Dann ist f eine stetig differenzierbare, 2π-periodische Funktion auf $\mathbb{R}$. Die Fourierkoeffizienten von f berechnet man mit Hilfe von Lemma 6.7. In der Tat gilt für alle $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
\hat{f}(k) &= \int_0^{2\pi} e^{iks} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{a(s+2\pi n)^2}{2}}\,\mathrm{d}s \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} e^{ik(s+2\pi n)} e^{-\frac{a(s+2\pi n)^2}{2}}\,\mathrm{d}s \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} e^{iks} e^{-\frac{as^2}{2}}\,\mathrm{d}s \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{iks} e^{-\frac{as^2}{2}}\,\mathrm{d}s \\
&= \sqrt{\frac{2\pi}{a}}\, e^{-\frac{k^2}{2a}}.
\end{aligned}$$

Aus dem Lemma 6.8 (mit $t = 0$) folgt insbesondere

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{an^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{k^2}{2a}}.$$

Die Funktionalgleichung für die Funktion θ folgt aus dieser Gleichheit, wenn man $a = \frac{x}{2\pi}$ einsetzt.

Beweis (von Theorem 6.6). Sei zuerst $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}\, z > 1$. In der Definition der Gammafunktion substituieren wir $t = n^2\pi x$ ($n \in \mathbb{N}$) und erhalten

$$\begin{aligned}
\Gamma(\frac{z}{2}) &= \int_0^\infty t^{\frac{z}{2}-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= n^z\,\pi^{\frac{z}{2}} \int_0^\infty x^{\frac{z}{2}-1} e^{-n^2\pi x}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Wir teilen diese Gleichung durch $n^z\,\pi^{\frac{z}{2}}$ und summieren über $n \in \mathbb{N}$:

$$\pi^{-\frac{z}{2}}\,\Gamma(\frac{z}{2})\,\zeta(z) = \int_0^\infty x^{\frac{z}{2}-1}\omega(x)\,\mathrm{d}x.$$

Das Integral teilen wir in zwei Teilintegrale und führen in einem der beiden Teilintegrale die Substitution $x \to \frac{1}{x}$ durch:

$$\begin{aligned}
\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma(\frac{z}{2})\zeta(z) &= \int_0^1 x^{\frac{z}{2}-1}\omega(x)\,\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_1^\infty x^{\frac{z}{2}-1}\omega(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_1^\infty x^{-(\frac{z}{2}+1)}\omega(\frac{1}{x})\,\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_1^\infty x^{\frac{z}{2}-1}\omega(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Aus der Funktionalgleichung $\sqrt{x}\,\theta(x) = \theta(\frac{1}{x})$ für die Funktion θ aus Lemma 6.9 und der offensichtlichen Gleichheit $2\omega(x) + 1 = \theta(x)$ folgt die Funktionalgleichung

$$\omega(\frac{1}{x}) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{x} + \sqrt{x}\,\omega(x) \qquad (x \in \mathbb{R}_{>0}).$$

Setzt man diese Funktionalgleichung in die obige Gleichung ein, dann erhält man

$$\begin{aligned}
\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma(\frac{z}{2})\zeta(z) &= -\frac{1}{2}\int_1^\infty x^{-(\frac{z}{2}+1)}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_1^\infty x^{-\frac{z+1}{2}}\,\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_1^\infty (x^{\frac{z}{2}-1} + x^{-\frac{z+1}{2}})\,\omega(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} + \int_1^\infty (x^{\frac{z}{2}-1} + x^{-\frac{z+1}{2}})\,\omega(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Daraus folgt erste Behauptung für $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}\, z > 1$. Daß diese Gleichheit auch für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}\, z > 0$ und $z \neq 1$ gilt, folgt aus dem Identitätssatz.

Theorem 6.10 (Riemannsche Funktionalgleichung). *Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}\, z > 0$ und $z \neq 1$ definieren wir*

$$\xi(z) := \pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma(\frac{z}{2})\zeta(z).$$

Dann gilt die Reflektionsformel

$$\xi(z) = \xi(1-z) \textit{ für alle } z \in \mathbb{C} \textit{ mit } 0 < \mathrm{Re}\, z < 1.$$

Insbesondere besitzt die Funktion ξ eine meromorphe Fortsetzung auf $\mathbb{C}$ mit zwei Polen erster Ordnung in den Punkten 0 und 1. Schließlich besitzt auch die Riemannsche Zetafunktion eine meromorphe Fortsetzung auf $\mathbb{C}$ mit einem Pol erster Ordnung im Punkt 1. Alle Punkte der Form $z = -2, -4, \ldots$ sind Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion (triviale Nullstellen).

Beweis. Die Reflektionsformel $\xi(z) = \xi(1-z)$ gilt deswegen, weil die rechte Seite in (6.2) (siehe Theorem 6.6) die entsprechende Reflektionsformel erfüllt.

Theorem 6.11. *Die Funktion ζ ist holomorph fortsetzbar auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Der Punkt $z_0 = 1$ ist ein einfacher Pol, und $\operatorname{Res}(\zeta, 1) = 1$. Die holomorphe Fortetzung hat in $-2, -4, -6, \ldots$ Nullstellen, und keine anderen Nullstellen in $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0\}$. Außerdem hat ζ keine Nullstellen in $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq 1\}$, und unendlich viele Nullstellen in dem Streifen $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$.*

Beweis.

Theorem 6.12 (de la Vallée Poussin). *Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z \geq 1$ gilt $\zeta(z) \neq 0$.*

Beweis. Für alle $z = s + it$ mit $s = \operatorname{Re} z > 1$ gilt nach der Eulerschen Produktformel

$$\zeta(z) = \prod_{p \in P} (1 - p^{-z})^{-1},$$

Insbesondere gilt

$$\log \zeta(z) = -\sum_{p \in P} \log(1 - p^{-z}).$$

Die Potenzreihenentwicklung für den Logarithmus im Punkt 1 lautet

$$\log(1 - z) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} z^k,$$

und somit ist für $z = s + it \in \mathbb{C}$ mit $s = \operatorname{Re} z > 1$

$$\begin{aligned}
\log \zeta(z) &= \sum_{p \in P} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} p^{-zk} \\
&= \sum_{p \in P} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} p^{-sk} p^{-itk} \\
&= \sum_{p \in P} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} p^{-sk} e^{-i(\log p)tk}.
\end{aligned}$$

Also gilt

$$\operatorname{Re} \log \zeta(z) = \sum_{p \in P} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} p^{-sk} \cos((\ln p)tk).$$

Demnach ist

$$\begin{aligned}
&3 \operatorname{Re} \log \zeta(s)) + 4 \operatorname{Re} \log \zeta(s + it) + \operatorname{Re} \log \zeta(s + 2it) \\
&= \sum_{p \in P} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} p^{-sk} (3 + 4 \cos((\log p)tk) + \cos((\log p)2tk)).
\end{aligned}$$

Man beachte, daß
$$\log w = \log|w| + i \arg w$$
und
$$3 + 4\cos\theta + \cos 2\theta = 2(1+\cos\theta)^2 \geq 0.$$
Also gilt
$$3\log|\zeta(s)| + 4\log|\zeta(s+it)| + \log|\zeta(s+2it)| \geq 0,$$
beziehungsweise
$$|\zeta(s)|^3\,|\zeta(s+it)|^4\,|\zeta(s+2it)| \geq 1 \text{ für alle } s>1,\ t\in\mathbb{R}. \tag{6.4}$$

Aus dieser Beziehung folgt, daß ζ keine Nullstelle in der offenen Halbebene $\{\operatorname{Re} z > 1\}$ besitzt.

Wir nehmen nun an, daß es ein $t \in \mathbb{R}$ (notwendigerweise $t \neq 0$) gibt, so daß $\zeta(1+it) = 0$. Dann gilt (siehe Potenzreihenentwicklung in $1+it$; wir verwenden hier, daß ζ eine holomorphe Fortsetzung in einer Umgebung von $1+it$ besitzt)
$$|\zeta(s+it)| \leq A_1\,|s-1| \text{ für alle } s \text{ in einer Umgebung von } 1.$$
Wegen Stetigkeit gilt außerdem
$$|\zeta(s+2it)| \leq A_2 \text{ für alle } s \text{ in einer Umgebung von } 1.$$
Schließlich gilt, da 1 ein Pol erster Ordnung ist,
$$|\zeta(s)| \leq A_0\,|s-1|^{-1} \text{ für alle } s\in(1,1+\varepsilon).$$
Setzt man diese drei Abschätzungen in (6.4) ein, dann erhalten wir einen Widerspruch. Der Beweis ist somit komplett.

Vermutung 6.13 (Riemann, 1859). Alle Nullstellen der Funktion ζ in dem Streifen $\{z\in\mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$ liegen auf der Gerade $\{\frac{1}{2} + is : s\in\mathbb{R}\}$.

Für den Beweis dieser Aussage oder ihrer Negation ist ein Preis über 1 Million US Dollar ausgeschrieben !

6.3 Ein Tauberscher Satz

Theorem 6.14. *Sei (a_n) eine beschränkte Folge in $\mathbb{C}$. Die Funktion f, gegeben durch*
$$f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{z+1}} \qquad (\operatorname{Re} z > 0),$$
besitze eine holomorphe Fortsetzung in eine Umgebung von $i\mathbb{R}$. Dann gilt

$$f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$$

und

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} a_n = 0.$$

Beweis. Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z > 0$ gilt

$$\begin{aligned} |f(z)| &\le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^{\operatorname{Re} z+1}} \\ &\le \|a\|_\infty \, \zeta(\operatorname{Re} z + 1) \\ &\le \frac{C}{\operatorname{Re} z}. \end{aligned}$$

Sei $R > 0$, $N \in \mathbb{N}$. Aus dem Cauchyschen Integralsatz folgt

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) N^z (1 + \frac{z^2}{R^2}) \frac{1}{z} \, \mathrm{d}z,$$

wobei $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ der Weg ist, der sich aus den Stücken

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \ge -\alpha \text{ and } |z| = R\}, \\ \gamma_2 &= \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = -\alpha \text{ und } |z| \le R\} \end{aligned}$$

zusammensetzt und noch ganz im Holomorphiegebiet von f liegt (d. h. $\alpha > 0$ ist klein genug, in Abhängigkeit von R). Setze

$$\begin{aligned} s_N(z) &:= \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n^{z+1}} \text{ und} \\ r_N(z) &:= \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{z+1}}. \end{aligned}$$

Die Funktion s_N ist dann eine ganze Funktion. Es gilt

$$\begin{aligned} s_N(0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} s_N(z) N^z (1 + \frac{z^2}{R^2}) \frac{1}{z} \, \mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{|z|=R \\ \operatorname{Re} z \ge 0}} s_N(z) N^z (1 + \frac{z^2}{R^2}) \frac{1}{z} \, \mathrm{d}z \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{|z|=R \\ \operatorname{Re} z \ge 0}} s_N(-z) N^{-z} (1 + \frac{z^2}{R^2}) \frac{1}{z} \, \mathrm{d}z, \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
f(0) - s_N(0) = &\frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{z\in\gamma\\ \mathrm{Re}\, z\geq 0}} r_N(z) N^z (1 + \frac{z^2}{R^2}) \frac{1}{z} \, \mathrm{d}z \\
&- \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{z\in\gamma\\ \mathrm{Re}\, z\geq 0}} s_N(-z) N^{-z} (1 + \frac{z^2}{R^2}) \frac{1}{z} \, \mathrm{d}z \\
&+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{z\in\gamma\\ \mathrm{Re}\, z\leq 0}} f(z) N^z (1 + \frac{z^2}{R^2}) \frac{1}{z} \, \mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

Nun gilt

$$\begin{aligned}
|\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}| &= \frac{2|\mathrm{Re}\, z|}{R^2} \text{ falls } |z| = R, \\
|\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}| &\leq \frac{2}{\alpha} \text{ falls } \mathrm{Re}\, z = -\alpha \text{ und } |z| \leq R, \\
|N^{-z} s_N(-z)| &\leq \|a\|_\infty N^{-\mathrm{Re}\, z} \sum_{n=1}^{N} n^{\mathrm{Re}\, z - 1} \\
&\leq \frac{\|a\|_\infty}{\mathrm{Re}\, z} \text{ falls } \mathrm{Re}\, z > 0, \\
|N^z r_N(z)| &\leq \|a\|_\infty N^{\mathrm{Re}\, z} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{\mathrm{Re}\, z + 1}} \\
&\leq \frac{\|a\|_\infty}{\mathrm{Re}\, z} \text{ falls } \mathrm{Re}\, z > 0,
\end{aligned}$$

und somit

$$|(r_N(z) N^z - s_N(-z) N^{-z}) (\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2})| \leq \frac{4\|a\|_\infty}{R^2} \text{ falls } \mathrm{Re}\, z > 0.$$

Daraus und aus der Dreiecksungleichung für Integrale folgt

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{z\in\gamma\\ \mathrm{Re}\, z\geq 0}} (r_N(z) N^z - s_N(-z) N^{-z}) (1 + \frac{z^2}{R^2}) \frac{1}{z} \, \mathrm{d}z \right| \leq \frac{\|a\|_\infty}{2R}.$$

Schließlich ist die Funktion $|f|$ wegen Stetigkeit auf dem Weg $\{z \in \gamma : \mathrm{Re}\, z \leq 0\}$ durch eine Konstante M beschränkt (wobei M natürlich von R abhängt). Somit gilt

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{z\in\gamma\\ \mathrm{Re}\, z\leq 0}} f(z) N^z (1 + \frac{z^2}{R^2}) \frac{1}{z} \, \mathrm{d}z \right| &\leq \frac{M}{2\pi} \int_{-R}^{R} N^{-\alpha} \frac{2}{\alpha} \, ds + \frac{M}{2\pi} \int_{-\alpha}^{0} N^s \frac{2|s|}{R^2} \, ds \\
&\leq \frac{2MR}{\alpha N^\alpha} + \frac{M}{\pi R^2 (\log N)^2}.
\end{aligned}$$

Fasst man die Abschätzungen zusammen, dann folgt

$$\limsup_{N\to\infty} |f(0) - s_N(0)| \le \frac{\|a\|_\infty}{2R}.$$

Da $R > 0$ beliebig war, erhalten wir

$$\lim_{N\to\infty} s_N(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} = f(0).$$

6.4 Der Primzahlsatz

Die Primzahlzählfunktion π ist gegeben durch

$$\pi(x) := \text{ Anzahl der Primzahlen kleiner oder gleich } x \quad (x > 0).$$

Theorem 6.15 (Primzahlsatz). *Es gilt*

$$\pi(x) = \frac{x}{\log x} + o(\frac{x}{\log x}).$$

Wir erklären im Folgenden, wie im (analytischen) Beweis des Primzahlsatzes die Riemannsche Zetafunktion eine Rolle spielt, und wie er schließlich bewiesen werden kann. Wir bemerken im Vorbeigehen aber auch, daß die Riemannsche Vermutung (siehe 6.13) äquivalent zur Aussage

$$\pi(x) = \frac{x}{\log x} + O(\sqrt{x}\log x)$$

ist. Sie ist also äquivalent zu einer besseren Abschätzung des Fehlerterms $\pi(x) - \frac{x}{\log x}$.

6.4.1 Dirichletreihen

Eine (formale) **Dirichletreihe** ist eine Reihe der Form

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z},$$

wobei (a_n) eine Folge in $\mathbb{C}$ ist und $z \in \mathbb{C}$. Wenn diese Reihe für ein $z_0 \in \mathbb{C}$ konvergiert, dann konvergiert sie auch für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} z_0$ (d. h. der natürliche Konvergenzbereich einer Dirichletreihe ist eine rechte Halbebene in $\mathbb{C}$) und definiert dort eine holomorphe Funktion.

Lemma 6.16 (Ableitung von Dirichletreihen). *Ist $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z}$ eine Dirichletreihe, dann ist*

$$f'(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \log n}{n^z}$$

ebenfalls eine Dirichletreihe, die in derselben Halbebene wie f konvergiert.

Lemma 6.17 (Produkte von Dirichletreihen). *Seien (a_n) und (b_n) zwei komplexe Folgen, so daß die Dirichletreihen*

$$f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z} \text{ und } g(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^z}$$

für wenigstens ein $z \in \mathbb{C}$ konvergieren (und dann sind f und g holomorphe Funktionen auf einer gemeinsamen Halbebene). Dann ist das Produkt $f\,g$ ebenfalls eine Dirichletreihe,

$$f(z)\,g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^z},$$

mit

$$c_n = \sum_{k|n} a_k\, b_{\frac{n}{k}}.$$

Beweis. Einfaches Nachrechnen.

Beispiel 6.18. (a) Die Riemannsche Zetafunktion besitzt in der Halbebene $\{\operatorname{Re} z > 1\}$ keine Nullstelle, d. h. die Funktion $\frac{1}{\zeta}$ ist holomorph in dieser Halbebene. Mit dem Lemma 6.17 und einem Koeffizientenvergleich findet man

$$\frac{1}{\zeta(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^z} \quad (\operatorname{Re} z > 1),$$

wobei $(\mu(n))$ die **Möbiusfunktion** ist, die implizit durch

$$\begin{aligned} &\mu(1) = 1 \text{ und} \\ &\sum_{k|n} \mu(k) = 0 \text{ für } n \geq 2 \end{aligned} \tag{6.5}$$

gegeben ist, d. h.

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1, \\ 0 & \text{falls } n \text{ eine Quadratzahl als Teiler enthält,} \\ (-1)^k & \text{falls } n = p_1 \cdot \cdots \cdot p_k \text{ für paarweise verschiedene Primzahlen } p_i. \end{cases} \tag{6.6}$$

(b) Aus Lemma 6.16, Lemma 6.17 und dem Beispiel (a) folgt

$$-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^z},$$

wobei

$$\Lambda(n) := \sum_{k|n} \mu(k) \log(\frac{n}{k}) \qquad (n \in \mathbb{N}) \tag{6.7}$$

die **Mangoldtfunktion** ist. Man prüft leicht nach, daß

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{falls } n = p^k \text{ für eine Primzahl } p \text{ und ein } k \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{6.8}$$

Aus den Gleichungen (6.5) für die Möbiusfunktion und (6.7) für die Mangoldtfunktion folgt

$$\Lambda(n) = -\sum_{k|n} \mu(k) \log k. \tag{6.9}$$

(c) Mit dem Lemma 6.17 erhält man außerdem, daß

$$\zeta(z)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^z},$$

wobei

$$\tau(n) = \sum_{k|n} 1 = \text{ Anzahl der Teiler von } n.$$

Aus einem Koeffizientenvergleich der Dirichletreihen auf beiden Seiten der Gleichung $\zeta = \frac{1}{\zeta}\zeta^2$, wiederum unter Verwendung von Lemma 6.17, folgt

$$\sum_{k|n} \mu(k)\, \tau(\frac{n}{k}) = 1 \text{ für alle } n \geq 1. \tag{6.10}$$

Andererseits folgt aus einem Koeffizientenvergleich der Dirichletreihen auf beiden Seiten der Gleichung

$$-\frac{d}{dz}\frac{1}{\zeta(z)} = \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)^2},$$

unter Verwendung von Lemma 6.16 und Lemma 6.17,

$$\mu(n)\log n = \sum_{k|n} \mu(k)\Lambda(\frac{n}{k}). \tag{6.11}$$

6.4.2 Elementare Eigenschaften der Möbius-, der Mangoldt- und anderer Funktionen

Ausgehend von der Möbius- und der Mangoldtfunktion definiert man die jeweiligen Partialsummen

$$M(x) := \sum_{n\leq x} \mu(n)$$

und

$$\psi(x) := \sum_{n\leq x} \Lambda(n).$$

Die Funktion ψ heißt **zweite Tschebyschewkunktion**. Die **erste Tschebyschewfunktion** ist durch

$$\theta(x) := \sum_{p\leq x} \log p$$

gegeben.

Lemma 6.19. *Für alle $x > 0$ gilt*

$$\theta(x) \leq x\log 4.$$

Beweis. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}
2^{2n-1} &= (1+1)^{2n-1}\\
&= \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{k}\\
&\geq \binom{2n-1}{n-1} + \binom{2n-1}{n}\\
&= 2\,\frac{(2n-1)\cdot\dots\cdot(n+1)}{(n-1)!}\\
&\geq 2 \prod_{n<p<2n-1} p\\
&= 2e^{\theta(2n-1)-\theta(n)},
\end{aligned}$$

und somit

$$\theta(2n-1) - \theta(n) \leq \log 2^{2n-2} = (n-1)\log 4.$$

Nun gilt

$$\theta(x) = 0 < x \log 4 \text{für } x < 2, \text{ und}$$
$$\theta(x) = \log 2 \leq x \log 4 \text{für } 2 \leq x < 3.$$

Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, so daß die Behauptung für alle $x \in (0, 2n-1)$ gilt. Dann gilt für alle $x \in [2n-1, 2n+1)$,

$$\begin{aligned} \theta(x) &= \theta(2n-1) \\ &= \theta(n) + (\theta(2n-1) - \theta(n)) \\ &\leq n \log 4 + (n-1) \log 4 \\ &\leq x \log 4, \end{aligned}$$

d. h. die Behauptung gilt für alle $x \in (0, 2(n+1)-1)$.

Lemma 6.20. *Es gilt*

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\pi(x) \log x}{x} = \liminf_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} = \liminf_{x\to\infty} \frac{\theta(x)}{x}$$

und

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\pi(x) \log x}{x} = \limsup_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} = \limsup_{x\to\infty} \frac{\theta(x)}{x}$$

Beweis. Für alle $x \geq 1$ gilt

$$\begin{aligned} \theta(x) &= \sum_{p\leq x} \log p \\ &\leq \sup_{p\leq x} \left[\frac{\log x}{\log p}\right] \log p \\ &= \psi(x) \\ &\leq \sum_{p\leq x} \log x \\ &= \pi(x) \log x. \end{aligned}$$

Aus diesen Ungleichungen folgt

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\pi(x) \log x}{x} \geq \liminf_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} \geq \liminf_{x\to\infty} \frac{\theta(x)}{x}.$$

Sei nun $\varepsilon \in (0,1)$. Dann gilt für alle $x \geq 1$,

$$\begin{aligned}\theta(x) &\geq \sum_{x^{1-\varepsilon}<p\leq x} \log p \\ &\geq \log(x^{1-\varepsilon}) \sum_{x^{1-\varepsilon}<p\leq x} 1 \\ &= (1-\varepsilon)\log x\,(\pi(x)-\pi(x^{1-\varepsilon})) \\ &\geq (1-\varepsilon)\log x\,(\pi(x)-x^{1-\varepsilon}).\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\theta(x)}{x} \geq (1-\varepsilon) \liminf_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x}.$$

Da $\varepsilon \in (0,1)$ beliebig war, folgt die erste Behauptung. Die zweite Behauptung zeigt man analog.

Lemma 6.21. *Der Grenzwert*

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \log(N+1) =: \gamma$$

existiert. Genauer gilt

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = \log(N+1) + \gamma + O(\frac{1}{N}).$$

Die Konstante γ heißt **Euler-Mascheroni-Konstante***.*

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \log(N+1) &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \int_1^{N+1} \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s \\ &= \sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} (\frac{1}{n}-\frac{1}{s})\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Aus dieser Gleichheit folgt schon einmal, daß die Folge $(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \log(N+1))_{N\in\mathbb{N}}$ positiv und monoton wachsend ist. Wir können aber die rechte Seite folgendermaßen abschätzen:

$$\sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} (\frac{1}{n}-\frac{1}{s})\,\mathrm{d}s \leq \sum_{n=1}^{N} (\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} < +\infty.$$

Also konvergiert die Folge $(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \log(N+1))_{N\in\mathbb{N}}$ gegen ein $\gamma \in \mathbb{R}_{>0}$. Andererseits folgt aus der obigen Gleichheit auch

$$\left|\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\log(N+1)-\gamma\right| = \left|\sum_{n=N+1}^{\infty}\int_{n}^{n+1}(\frac{1}{n}-\frac{1}{s})\,\mathrm{d}s\right|$$
$$\leq \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$
$$= O(\frac{1}{N}).$$

Lemma 6.22. *Es gilt*

$$\sum_{m\leq x}(\tau(m)-\log m+2\gamma) = O(\sqrt{x}),$$

wobei γ die Euler-Mascheroni-Konstante ist.

Beweis. Es gilt

$$\tau(n) = \sum_{k|n} 1 = 2\sum_{\substack{k|n\\ k<\sqrt{n}}} 1+\delta(n),$$

wobei

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ Quadratzahl ist,}\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

Daraus folgt

$$\sum_{n\leq x}\tau(n) = 2\sum_{n\leq x}\sum_{\substack{k|n\\ k<\sqrt{n}}} 1+\sum_{n^2\leq x} 1$$
$$= \sum_{k<\sqrt{x}}(1+2\sum_{k^2\leq n\leq x \top k|n} 1)$$
$$= \sum_{k<\sqrt{x}}(1+2[\frac{x}{d}]-2d).$$

Unter Verwendung von Lemma 6.21 erhält man

$$\sum_{n\leq x}\tau(n) = x\log x - x + 2\gamma x + O(\sqrt{x}).$$

Daraus und aus

$$\sum_{n\leq x}\log n = x\log x - x + O(\log x) \quad \text{(Übung!)}$$

folgt direkt die Behauptung.

6.4.3 Äquivalente Formulierungen des Primzahlsatzes

Theorem 6.23. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) $\pi(x) = \frac{x}{\log x} + o(\frac{x}{\log x})$.

(ii) $\psi(x) = x + o(x)$.

(iii) $M(x) = o(x)$.

(iv) $\sum_{n\geq 1} \frac{\mu(n)}{n} = 0$.

Beweis. Die Äquivalenz (1)⇔(2) folgt aus Lemma 6.20.

(3)⇒(2) Für natürliche Zahlen x gilt

$$\begin{aligned}\psi(x) - x &= \sum_{n\leq x}(\Lambda(n) - 1)\\ &= \sum_{n\leq x}\sum_{k|n}\mu(k)\,(\log(\frac{n}{k}) - \tau(\frac{n}{k}) + 2\gamma) - 2\gamma\\ &= \sum_{k\cdot m\leq x}\mu(k)\,(\log m - \tau(m) + 2\gamma) - 2\gamma.\end{aligned}$$

Man teilt diese Summe auf in eine Summe über die Paare (k,m), in denen $m \leq B$ ist, und über die Paare (k,m), in denen $m > B$ ist. Für die eine Summe gilt

$$\sum_{\substack{k\cdot m\leq x\\ m\leq B}}\mu(k)\,(\log m - \tau(m) + 2\gamma) = \sum_{m\leq B} M(\frac{x}{m})\,(\log m - \tau(m) + 2\gamma),$$

und somit, aufgrund der Voraussetzung $M(x) = o(x)$,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sum_{\substack{k\cdot m\leq x\\ m\leq B}}\mu(k)\,(\log m - \tau(m) + 2\gamma) = 0.$$

Für die andere Summe gilt unter Benutzung von (**??**) die Abschätzung

$$\left|\sum_{\substack{k\cdot m\leq x\\ m>B}}\mu(k)\,(\log m - \tau(m) + 2\gamma)\right| \leq \sum_{k<\frac{x}{B}}|\mu(k)|\,\sqrt{\frac{x}{k}},$$

und somit, aufgrund der Voraussetzung $M(x) = o(x)$,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sum_{\substack{k\cdot m\leq x\\ m>B}}\mu(k)\,(\log m - \tau(m) + 2\gamma) = 0.$$

(4)⇒(3)

Bemerkung 6.24. Theorem 6.23 sagt nicht, daß der Primzahlsatz (d. h. Aussage (1) in Theorem 6.23) wahr ist, sondern daß der Primzahlsatz äquivalent zu anderen asymptotischen Aussagen ist. In der Tat beweisen wir aber im folgenden Abschnitt, daß die Aussage (4) von Theorem 6.23 wahr ist.

Ohne Beweis bemerken wir außerdem, daß die Riemannsche Vermutung äquivalent zur Aussage

$$M(x) = O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}) \text{ für alle } \varepsilon > 0$$

ist.

6.4.4 Beweis des Primzahlsatzes

Beweis (Beweis des Primzahlsatzes - Theorem 6.15). Die Möbiusfunktion $(\mu(n))_{n\geq 1}$ ist beschränkt, und die zugehörige Dirichletreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^z} = \frac{1}{\zeta(z)}$$

besitzt nach Theorem 6.12 eine holomorphe Fortsetzung in eine Umgebung der Abszisse $1 + i\mathbb{R}$. Aus dem Tauberschen Satz (Theorem 6.14) und der Tatsache, daß die Riemannsche Zetafunktion im Punkt $z = 1$ einen Pol besitzt, folgt, daß $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} = 0$. Der Primzahlsatz folgt hieraus und aus Theorem 6.23.

Chapter 7
Euklidische und nichteuklidische Geometrie

7.1 Winkeltreue und konforme Abbildungen

Seien $\gamma_1 : I \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_2 : I_2 \to \mathbb{R}^2$ zwei stetig differenzierbare Kurven ($I_j \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle), die sich einem Punkt $z := \gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$ schneiden. Wir nehmen an, daß die beiden Kurven **regulär** in dem Sinne sind, daß $\gamma_1'(t) \neq 0$ für alle $t \in I_1$ und ähnlich für γ_2. Der Winkel zwischen γ_1 und γ_2 im Punkt z ist dann

$$\arg \gamma_2'(t_2) - \arg \gamma_1'(t_1),$$

also der Winkel zwischen den beiden Tangentialvektoren. Hier ist $\arg z$ die Winkelkomponente in der Polarkoordinatendarstellung von $z \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, d. h. die eindeutig bestimmte Zahl $\theta \in (-\pi, \pi]$, so daß $z = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

Eine stetig reell differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}^2$ ($U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen) ist **winkeltreu im Punkt** $z \in U$, falls $f'(z) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ invertierbar ist und falls für alle stetig differenzierbaren Kurven $\gamma_1 : I_1 \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_2 : I_2 \to \mathbb{R}^2$, die sich im Punkt $z = \gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$ schneiden, die Gleichheit

$$\arg \gamma_2'(t_2) - \arg \gamma_1'(t_1) = \arg(f \circ \gamma_2)'(t_2) - \arg(f \circ \gamma_1)'(t_1)$$

gilt. (Man beachte, daß die Verknüpfung $f \circ \gamma_j$ wenigstens in einer Umgebung von t_j wohldefiniert ist). Dieselbe Funktion f ist winkeltreu, wenn sie in jedem Punkt $z \in U$ winkeltreu ist.

Aufgrund der Kettenregel $(f \circ \gamma_j)'(t_j) = f'(\gamma(t_j))\gamma_j'(t_j) = f'(z)\gamma_j'(t_j)$ ist eine Funktion f genau dann winkeltreu in einem Punkt z, wenn ihre Abbleitung $f'(z)$ invertierbar und winkeltreu ist.

Theorem 7.1. *Sei $f : U \to \mathbb{C}$ ($U \subseteq \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ offen) stetig reell differenzierbar. Dann ist f genau dann holomorph, wenn f auf der Menge $\{z \in U : f'(z) \neq 0\}$ winkeltreu ist.*

Beweis. Wir identifizieren in diesem Theorem $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{C}$ in der kanonischen Weise. Ist $f = u + iv$ mit $u, v : U \to \mathbb{R}$, dann ist

$$f'(z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(z) & \frac{\partial u}{\partial y}(z) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(z) & \frac{\partial v}{\partial y}(z) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Wie oben bemerkt, ist f genau dann winkeltreu in einem Punkt $z \in U$, falls $f'(z)$ invertierbar und winkeltreu ist. Die einzigen winkeltreuen, linearen Abbildungen auf $\mathbb{R}^2$ sind jedoch die Drehstreckungen, also lineare Abbildungen, die durch eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \qquad (a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 > 0)$$

dargestellt werden. Also ist f genau dann winkeltreu in einem Punkt z, wenn

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z)^2 + \frac{\partial v}{\partial y}(z)^2 > 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(z) = \frac{\partial v}{\partial y}(z) \text{ und}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(z) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z).$$

Die letzten beiden Gleichungen gelten trivialerweise auch in Punkten $z \in U$, in denen $f'(z) = 0$.

Die Funktion $f = u + iv$ ist also genau dann winkeltreu auf der Menge $\{z \in U : f'(z) \neq 0\}$, wenn u und v die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen auf U erfüllen. Nach Theorem 3.2 erfüllen u und v jedoch genau dann die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, wenn f holomorph ist.

Eine holomorphe Abbildung $f : U \to V$ ($U, V \subseteq \mathbb{C}$ offen) heißt **konform** , wenn sie bijektiv und ihre Umkehrabbildung f^{-1} holomorph ist. Übung: die Ableitung einer bijektive, holomorphen Abbildung zwischen zwei offenen Teilmengen von $\mathbb{C}$ verschwindet in keinem Punkt. Eine konforme Abbildung ist also, ebenso wie ihre Umkehrabbildung, winkeltreu.

Zwei offene Teilmengen $U, V \subseteq \mathbb{C}$ heißen **konform äquivalent**, wenn es eine konforme Abbildung $f : U \to V$ gibt. Eine konforme Abbildung $f : U \to U$ ($U \subseteq \mathbb{C}$ offen) heißt **Automorphismus** von U. Die Menge der Automorphismen von U wird mit $\mathrm{Aut}(U)$ bezeichnet. Versehen mit der Verknüpfung / Komposition von Automorphismen ist $\mathrm{Aut}(U)$ eine Gruppe. Die identische Abbildung ist dabei das Einselement von $\mathrm{Aut}(U)$.

7.2 Die Automorphismengruppe von $\mathbb{C}$

Eine ganze Funktion, die kein Polynom ist, heißt auch **transzendente Funktion**.

Theorem 7.2. *Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze, transzendente Funktion. Dann gibt es zu jedem $w \in \mathbb{C}$ eine Folge (z_n) in $\mathbb{C}$, so daß*

$$\lim_{n\to\infty} |z_n| = \infty \text{ und}$$
$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = w.$$

Beweis. Wir wollen umgekehrt annehmen, daß f eine ganze Funktion ist, und daß es ein $w \in \mathbb{C}$, ein $\varepsilon > 0$ und ein $R > 0$ gibt, so daß

$$|f(z) - w| \geq \varepsilon \text{ für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| \geq R.$$

Wir zeigen, daß dann f ein Polynom ist. Ohne Beschränkung können wir annehmen, daß f nicht konstant ist, denn sonst wäre f ja schon ein Polynom.

Die Funktion $z \mapsto f(z) - w$ besitzt dann in der abgeschlossenen Kreisscheibe $\bar{B}(0,R)$ höchstens endlich viele Nullstellen $z_1, \ldots, z_m$, jeweils mit Vielfachheiten $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$. Die Funktion

$$g(z) := \frac{f(z) - w}{\prod_{j=1}^{m} (z - z_j)^{\alpha}_j}$$

setzt sich dann zu einer ganzen Funktion ohne Nullstellen fort. Die Funktion $\frac{1}{g}$ ist also ebenfalls eine ganze Funktion. Für diese gilt die Abschätzung

$$\left|\frac{1}{g(z)}\right| \leq \frac{1}{\varepsilon} \prod_{j=1}^{m} |z - z_j|^{\alpha}_j \text{ für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| \geq R.$$

Aus einer Variante des Satzes von Liouville folgt, daß $\frac{1}{g}$ ein Polynom ist. Da dieses Polynom aber keine Nullstelle besitzt, muß es wegen des Fundamentalsatzes der Algebra konstant sein. Insbesondere ist g konstant und somit, aufgrund der Definition von g,

$$f(z) = w + c \prod_{j=1}^{m} (z - z_j)^{\alpha}_j \quad (z \in \mathbb{C}),$$

d. h. f ist ein Polynom.

Eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt **affin**, wenn $f(z) = az + b$ für Konstanten $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Affine Abbildungen sind Verknüpfungen von **Streckungen / Dilatationen** $z \mapsto rz$ ($r \in \mathbb{R}_{>0}$), **Drehungen** $z \mapsto e^{i\theta} z$ ($\theta \in \mathbb{R}$) und **Verschiebungen** $z \mapsto z + b$ ($b \in \mathbb{C}$). Die Abbildungen $z \mapsto az$ mit $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, heißen auch **Drehstreckungen**. Affine Abbildungen bilden Geraden auf Geraden ab. Eine affine Abbildung ist genau dann **abstandstreu** (vgl. Geometrie), wenn $|a| = 1$. Affine Abbildungen sind offensichtlich holomorph, bijektiv, und ihre Umkehrabbildungen $f^{-1}(z) = \frac{z-b}{a}$ sind wieder affin. Insbesondere sind affine Funktionen also Automorphismen von $\mathbb{C}$. Es gibt keine weiteren Automorphismen.

Korollar 7.3. *Die Automorphismengruppe* $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ *besteht genau aus der Menge der affinen Abbildungen.*

Beweis. Offensichtlich sind Automorphismen von $\mathbb{C}$ ganze Funktionen. Da sie zudem bijektiv sind, können sie aufgrund des Theorems 7.2 nicht transzendent sein. Also sind Automorphismen notwendigerweise Polynome. Die einzigen injektiven Polynome sind aber die Polynome vom Grad 1, d. h. die affinen Funktionen.

7.3 Die Riemannsche Sphäre und ihre Automorphismengruppe

7.3.1 Die Riemannsche Sphäre

Die **Riemannsche Sphäre** $\hat{\mathbb{C}}$ ist nichts anderes als die zweidimensionale Sphäre

$$\hat{\mathbb{C}} := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\} \quad (= S^2).$$

Der Punkt $N = (0, 0, 1)$ heißt dabei **Nordpol**. Die **stereographische Projektion** der Riemannschen Sphäre ohne den Nordpol, $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{N\}$ auf die komplexe Ebene

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\} = \mathbb{C}$$

bildet jeden Punkt $(x_1, x_2, x_3) \in \hat{C} \setminus \{N\}$ auf den eindeutigen Schnittpunkt der Geraden durch N und (x_1, x_2, x_3) mit der komplexen Ebene ab. Umgekehrt wird jeder Punkt $x + iy = (x, y, 0)$ der komplexen Ebene auf den eindeutigen Schnittpunkt der Geraden durch N und $(x, y, 0)$ mit der Riemannschen Sphäre abgebildet. Die stereographische Projektion ist konform (bijektiv und in beide Richtungen winkeltreu). Sie bildet die südliche Hemisphäre auf die Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$, den Äquator auf den Einheitskreis, und die nördliche Hemisphäre auf das Komplement der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$ ab. Wird $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{N\}$ unter der stereographischen Projektion mit $\mathbb{C}$ identifiziert, so entspricht der Nordpol N einem Punkt "im Unendlichen". Für die stereographische Projektion $p : \hat{\mathbb{C}} \setminus \{N\} \to \mathbb{C}$ rechnet man einfach nach, daß

$$p(x_1, x_2, x_3) = .$$

und

$$p^{-1}(x + iy) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}\right).$$

Die “natürliche Topologie” der Riemannschen Sphäre erzeugt eine Topologie auf $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Genauer: Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine Teilmenge, so daß es eine positive reelle Zahl r gibt mit $\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\} \subseteq U$. Dann heißt $U \cup \{\infty\}$ **Umgebung von** ∞ (in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$). Die Umgebungen von $z \in \mathbb{C}$ in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ sind Mengen, die auch Umgebungen von z in $\mathbb{C}$ sind. Damit wird die Riemannsche Sphäre ein topologischer Raum (sogar ein metrischer Raum, wenn man die von der Sphäre induzierte Metrik betrachtet). Sie heißt auch Einpunktkompaktifizierung der komplexen Ebene. In der Tat ist die Riemannsche Sphäre als beschränkte und abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^3$ nach dem Satz von Heine-Borel kompakt. Anders ausgedrückt haben wir den folgenden

Proposition 7.4. *Jede Folge in $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Fazit: Auch auf der Riemannschen Sphäre sind Umgebungen, offene Mengen und abgeschlossene Mengen definiert. Ebenso kann man Konvergenz und den Begriff der Cauchyfolge definieren. Die Riemannsche Sphäre ist aber kein Körper und kein Vektorraum; es gibt auch keine natürliche Ordnungsrelation.

7.3.2 Möbiustransformationen

Die Riemannsche Sphäre ist zwar kein Vektorraum (z.B. weil der Punkt ∞ keine Inverse bezüglich der Addition besitzt), die Abbildungen “Translation”, “Drehstreckung” und “Inversion” $z \mapsto \frac{1}{z}$ (Inverse bezüglich der Multiplikation in $\mathbb{C}$, nicht bezüglich der Komposition von Funktionen !) spielen jedoch wichtige Rolle. Es sind diejenigen Funktionen, die Winkel erhalten. Wir betrachten Kompositionen dieser Abbildungen.

Lemma 7.5. *Seien $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ mit $ad - bc \neq 0$. Die Abbildung $f : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, definiert durch*

$$f(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & \text{für} \quad z \in \mathbb{C}, z \neq -\frac{d}{c} \\ \infty & \text{für} \quad z = -\frac{d}{c} \\ \frac{a}{c} & \text{für} \quad z = \infty \end{cases} \tag{7.1}$$

ist bijektiv. Ihre Einschränkung auf $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ ist holomorph.

Die Abbildungen, die in (7.1) definiert werden, heißen **Möbiustransformationen** oder manchmal auch **gebrochen affine Transformationen** der Riemannschen Sphäre (in der Tat fassen wir die Möbiustransformationen auch als Abbildungen der Riemannschen Sphäre auf die Riemannsche Sphäre auf). Mit der Bedingung $ad - bc \neq 0$ werden die konstanten Abbildungen ausgeschlossen. In der Tat ist jede Möbiustransformation eine konforme Abbildung der Riemannschen Sphäre.

Lemma 7.6. *Für jede Matrix* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ *sei* f_A *die durch*

$$f_A(z) = \frac{a_{11}z + a_{12}}{a_{21}z + a_{22}}$$

gegebene Möbiustransformation. Dann gilt für alle $A, B \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$

$$f_{AB} = f_A \circ f_B,$$

d. h.

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}}), \quad A \mapsto f_A$$

ist ein Gruppenhomomorphismus. Die Menge aller Möbiustransformationen bildet eine Untergruppe der Automorphismengruppe der Riemannschen Sphäre.

Spezielle Möbiustransformationen sind die **Drehstreckungen** $z \mapsto az$ ($a \in \mathbb{C}, a \neq 0$), die **Verschiebungen** $z \mapsto z + b$ ($b \in \mathbb{C}$) und die **Inversion** $z \mapsto \frac{1}{z}$.

Lemma 7.7. a) *Möbiustransformationen sind Kompositionen von Drehstreckungen, Verschiebungen und Inversionen.*

b) *Für die Einschränkung einer Möbiustransformation auf* $\mathbb{C}$ *gilt: das Bild einer Gerade oder einer Kreislinie ist eine Gerade oder eine Kreislinie.*

Beweis. (a) Sei f eine Möbiustransformation wie in (7.1). Ist $c = 0$, dann ist $f = f_2 \circ f_1$ mit

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{a}{d} z \quad \text{und} \\ f_2(z) &= z + \frac{b}{d}. \end{aligned}$$

Ist $c \neq 0$, dann ist $f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$ mit

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \\ f_2(z) &= \\ f_3(z) &= \quad \text{und} \\ f_4(z) &= . \end{aligned}$$

(b) Aufgrund der Faktorisierung einer Möbiustransformation in eine Verknüpfung von Drehstreckungen, Verschiebungen und / oder eine Inversion genügt es, die Aussage für diese speziellen Möbiustransformationen zu beweisen.

Ein spezielles Beispiel einer Möbiustransformation ist die Abbildung $f(z) = \frac{z+i}{iz+1}$; diese heißt auch **Cayleytransformation**.

7.3.3 Automorphismengruppe der Riemannschen Sphäre

Theorem 7.8. *Die Automorphismengruppe der Riemannschen Sphäre,* $\mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$, *besteht genau aus der Menge der Möbiustransformationen.*

Beweis. Sei $f \in \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$. Ist $f(\infty) = \infty$, dann ist die Einschränkung von f auf $\mathbb{C}$ ein Automorphismus von $\mathbb{C}$, d. h. nach Korollar 7.3,

$$f(z) = az + b.$$

Insbesondere ist f eine Möbiustransformation.

Ist $f(\infty) = d \in \mathbb{C}$, dann ist mit $g(z) = \frac{1}{z-d}$ die Verknüpfung $h := g \circ f$ ein Automorphismus der Riemannschen Sphäre, der den Punkt ∞ auf sich selbst abbildet. Nach dem ersten Teil des Beweises ist h eine Möbiustransformation (sogar eine affine Abbildung), und somit ist $f = g^{-1} \circ h$ eine Möbiustransformation.

7.4 Die Automorphismengruppe von $\mathbb{D}$

Sei $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$, und $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ die Einheitskreislinie.

Lemma 7.9. *Alle Möbiustransformation* $f \in \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$, *die* $\mathbb{D}$ *auf sich selbst abbilden, sind von der Form*

$$f(z) = c\,\frac{z-a}{\bar{a}z-1} \quad (z \in \mathbb{D})$$

für ein $a \in \mathbb{D}$ *und ein* $c \in \mathbb{T}$.

Beweis. Hat eine Möbiustransformation f die spezielle Form wie in der Behauptung, dann rechnet man leicht nach, daß sie $\mathbb{D}$ auf sich selbst abbildet.

Sei umgekehrt $f \in \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ eine Möbiustransformation, die $\mathbb{D}$ auf sich selbst abbildet. Allgemein ist f von der Form

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

mit a, b, c, $d \in \mathbb{C}$, so daß $ab - cd \neq 0$. Aus $f(0) = \frac{b}{d} \in \mathbb{D}$ folgt $d \neq 0$. Da f außerdem bijektiv auf der Riemannschen Sphäre ist, gilt $f(z) \notin \mathbb{D}$ für alle $z \notin \mathbb{D}$, und insbesondere $f(\infty) = \frac{a}{c} \notin \mathbb{D}$. Daraus folgt auch $a \neq 0$. Nach einer Umbenennung und Normalisierung der Parameter ist also f von der Form

$$f(z) = c\,\frac{z-a}{bz-1}$$

mit $a, b, c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$. Aus $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ und der Stetigkeit von f und f^{-1} folgt $f(\mathbb{T}) = \mathbb{T}$. Es gilt also

$$|bz-1|^2 = |c|^2\,|z-a|^2 \text{ für alle } z \in \mathbb{T},$$

beziehungsweise

$$|b|^2 + 1 - 2\,\mathrm{Re}\,(bz) = |c|^2\,(1+|a|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(\bar{a}z) \text{ für alle } z \in \mathbb{T}.$$

Dies ist äquivalent zu

$$|b|^2 + 1 = |c|^2\,(1+|a|^2) \text{ und } b = |c|^2\,\bar{a}.$$

Setzt man die zweite Bedingung in die erste Bedingung ein, dann erhält man

$$(1-|ac|^2) = |c|^2\,(1-|ac|^2),$$

also entweder $|ac| = 1$ oder $|c| = 1$. Wegen $f(0) = ca \in \mathbb{D}$ können wir aber $|ac| = 1$ ausschließen. Also gilt $|c| = 1$ und $b = \bar{a}$.

Lemma 7.10 (Schwarz). *Sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, so daß $f(0) = 0$ und $f(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$. Dann gilt*

$$|f(z)| \leq |z| \text{ für alle } z \in \mathbb{D} \text{ und } |f'(0)| \leq 1.$$

Gilt des Weiteren $|f(z)| = |z|$ für ein $z \in \mathbb{D}$ oder $|f'(0)| = 1$, dann ist $f(z) = cz$ für ein $c \in \mathbb{C}$ mit $|c| \leq 1$.

Beweis.

Theorem 7.11. *Es gilt*

$$\begin{aligned}\mathrm{Aut}(\mathbb{D}) &= \{f \in \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}}) : f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}\}\\ &= \{f \in \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}}) : f(z) = c\,\frac{z-a}{\bar{a}z-1} \text{ für ein } a \in \mathbb{D}, c \in \mathbb{T}\}.\end{aligned}$$

Beweis. Die zweite Gleichheit ist gerade Lemma 7.9. Was die erste Gleichheit angeht, so ist die Inklusion "$\supseteq$" offensichtlich. Wir zeigen also die Inklusion "$\subseteq$".

Sei $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. Falls $f(0) = 0$, dann gilt nach dem Lemma von Schwarz (Lemma 7.10)

$$|f(z)| \leq z \text{ für alle } z \in \mathbb{D}.$$

Da aber auch f^{-1} die Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$ auf sich selbst abbildet und $f^{-1}(0) = 0$, folgt aus dem Lemma von Schwarz auch

$$|f^{-1}(z)| \leq |z| \text{ für alle } z \in \mathbb{D}.$$

Aus beiden Ungleichungen folgt

$$|f(z)| = |z| \text{ für alle } z \in \mathbb{D},$$

was nach dem Zusatz im Lemma von Schwarz nur möglich ist, wenn f von der Form $f(z) = cz$ für ein $c \in \mathbb{T}$ ist. Insbesondere ist also f eine Möbiustransformation.

Falls $f(0) = a \in \mathbb{D}$, $a \neq 0$, dann ist mit $g(z) = \frac{a-z}{\bar{a}z-1}$ ($g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$) auch $h = g \circ f$ ein Automorphismus von $\mathbb{D}$, der zudem die Eigenschaft $h(0) = 0$ erfüllt. Nach dem ersten Teil des Beweises ist h eine Möbiustransformation, und somit ist $f = g^{-1} \circ h$ eine Möbiustransformation.

Für eine stückweise differenzierbare Kurve $\gamma : [0,1] \to \mathbb{D}$ heißt die Variation

$$\mathrm{L}(\gamma) := \int_0^1 |\varphi'(t)|\, \mathrm{d}t \in [0, +\infty]$$

auch **euklidische Länge** der Kurve und

$$\mathrm{L}_{hyp}(\gamma) := \int_0^1 \frac{|\varphi'(t)|}{1 - |\varphi(t)|^2}\, \mathrm{d}t \in [0, +\infty]$$

hyperbolische Länge der Kurve.

Die hyperbolische Länge erzeugt eine sogenannte **hyperbolische Metrik** d_{hyp} auf $\mathbb{D}$, nämlich durch

$$d_{hyp}(z_1, z_2) := \inf\{\mathrm{L}_{hyp}(\gamma) : \gamma(0) = z_1, \gamma(1) = z_2\}.$$

Der Abstand zwischen z_1, $z_2 \in \mathbb{D}$ ist also das Infimum aller hyperbolischen Längen von Kurven von z_1 nach z_2. Man nennt **hyperbolische Geraden** (auch **Orthokreise**) die kürzesten Strecken bezüglich der nichteuklidischen Länge.

Lemma 7.12. *Sei $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. Dann gelten folgende Aussagen:*

a) *Für alle $z \in \mathbb{D}$ gilt $\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} = \frac{1}{1-|z|^2}$.*

b) *Für alle z_1, $z_2 \in \mathbb{D}$ gilt $d_{hyp}(f(z_1), f(z_2)) = d_{hyp}(z_1, z_2)$, das heißt f ist* **abstandstreu** *(oder:* **isometrisch***) bezüglich der hyperbolischen Metrik.*

c) *f bildet eine hyperbolische Gerade auf eine hyperbolische Gerade ab.*

Beweis. Die Aussage in (a) erfolgt durch einfaches Nachrechnen, unter Zuhilfenahme von Theorem 7.11. Ist $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, $f(z) = c\,\frac{z-a}{\bar{a}z-1}$ mit $a \in \mathbb{D}$, $c \in \mathbb{T}$, dann gilt für alle $z \in \mathbb{D}$,

$$\begin{aligned}
\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} &= \frac{\frac{1-|a|^2}{|\bar{a}z-1|^2}}{1-\frac{|z-a|^2}{|\bar{a}z-1|^2}} \\
&= \frac{1-|a|^2}{|\bar{a}z-1|^2-|z-a|^2} \\
&= \frac{1-|a|^2}{(|az|^2-2\mathrm{Re}\,(\bar{a}z)+1)-(|z|^2-2\mathrm{Re}\,(\bar{a}z)+1)} \\
&= \frac{1}{1-|z|^2}.
\end{aligned}$$

(b) Für alle stetig differenzierbaren Kurven $\gamma : [0,1] \to \mathbb{D}$ folgt, wegen (a),

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}_{hyp}(f\circ\gamma) &= \int_0^1 \frac{|f'(\gamma(t))\,\gamma'(t)|}{1-|f(\gamma(t))|^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{|\varphi'(t)|}{1-|\varphi(t)|^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \mathrm{L}_{hyp}(\gamma).
\end{aligned}$$

Daraus folgt direkt die Behauptung.
(c) ...

Verfahren um $d_{hyp}(z_1,z_2)$ zu berechnen: Für $s \in (0,1)$ kann man direkt ausrechnen daß $d_{hyp}(0,s) = \frac{1}{2}\log\frac{1+s}{1-s}$. Sonst finde ein $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ mit $f(z_1) = 0, s := f(z_2) \in (0,1)$, das Urbild $f^{-1}([0,s])$ liefert die nichteuklidische Strecke zwischen z_1 und z_2.

Der metrischer Raum $(\mathbb{D}, d_{hyp})$ ist nicht euklidisch, das heißt zu eine nichteuklidische Gerade g und einen Punkt $P \notin g$ kann es mehrere nichteuklidische Geraden geben die P erhalten und "parallel" zu g sind.

Die Summe der inneren Winkeln eines nichteuklidischen Dreiecks ist kleiner als π.

Die nichteuklidische Metrik liefert die gleiche Topologie auf $\mathbb{D}$ wie die euklidische Metrik.

Zusammenfassung. Die *Geometrie* (das heißt Punktmenge, Geradenmenge, Metrik und Axiome)

- des $(\mathbb{C}, \|.\|)$ ist die euklidische Ebene $\mathbb{R}^2$
- des $\mathbb{C}\cup\{\infty\} \equiv \mathbb{S}$ mit Großkreisen und spherischen Abstand ist die Geometrie der zweidimensionale Sphäre. Die Summe der inneren Winkeln eines spherischen Dreiecks ist größer als π.
- des $(\mathbb{D}, d_{hyp})$ ist die hyperbolische Geometrie der Kreisscheibe.

Die Automorphismen heißen **Bewegungen**.

References

Index