Ralph Chill

Gewöhnliche Differentialgleichungen und Integration auf Mannigfaltigkeiten

February 4, 2018

© by R. Chill

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1
Beispiele gewöhnlicher Differentialgleichungen

1.1 Was ist eine gewöhnliche Differentialgleichung?

Seien $n, m \geq 1$, $D \subseteq \mathbb{R}^{1+mn}$ eine offene Menge und $f : D \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion.

Eine **(explizite) gewöhnliche Differentialgleichung der Ordnung** m ist eine Gleichung der Form

$$x^{(m)}(t) = f(t, x(t), x'(t), ..., x^{(m-1)}(t)) \quad (t \in I). \tag{1.1}$$

Hier ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $x : I \to \mathbb{R}^n$ eine m-mal differenzierbare Funktion. Diese Funktion x ist die Unbekannte in dieser Gleichung. Die Differentialgleichung (1.1) zu lösen heißt, eine m-mal differenzierbare, auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definierte Funktion x zu finden, so daß die Gleichung (1.1) für alle $t \in I$ erfüllt ist. Im Prinzip ist auch das Intervall I unbekannt bzw. nicht vorgegeben.

Bemerkung. Eine **implizite gewöhnliche Differentialgleichung** ist eine Gleichung der Form

$$f(t, x(t), x'(t), ..., x^{(m-1)}(t), x^{(m)}(t)) = 0 \quad (t \in I).$$

Hier steht die Ableitung mit der höchsten Ordnung nicht getrennt auf einer Seite der Gleichung. Diese Differentialgleichung ist allgemeiner als die explizite Differentialgleichung (1.1). Wir werden sie aber in dieser Vorlesung nicht betrachten.

Wenn $n = 1$, dann nennen wir die Differentialgleichung (1.1) eine **skalare Differentialgleichung**. Wenn $n \geq 2$, dann ist die Funktion x eine vektorwertige Funktion, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $f = (f_1, \ldots, f_n)$, und die Differentialgleichung (1.1) ist ein System von n skalaren, gekoppelten Differentialgleichungen. Anstatt der Differentialgleichung (1.1) in $\mathbb{R}^n$ könnte man also auch ein System von n skalaren, gekoppelten Differentialgleichungen schreiben, etwa

$$
\begin{aligned}
x_1^{(m)}(t) &= f_1(t,x_1(t),\ldots,x_n(t),x_1'(t),\ldots,x_n'(t),\ldots,x_1^{(m-1)}(t),\ldots,x_n^{(m-1)}(t)),\\
x_2^{(m)}(t) &= f_2(t,x_1(t),\ldots,x_n(t),x_1'(t),\ldots,x_n'(t),\ldots,x_1^{(m-1)}(t),\ldots,x_n^{(m-1)}(t)),\\
\vdots\ & \vdots\\
x_n^{(m)}(t) &= f_n(t,x_1(t),\ldots,x_n(t),x_1'(t),\ldots,x_n'(t),\ldots,x_1^{(m-1)}(t),\ldots,x_n^{(m-1)}(t)).
\end{aligned}
$$

Manchmal werden wir diese Schreibweise verwenden, obwohl die Differentialgleichung der Form (1.1) vielleicht einfacher aussieht.

Oft wird eine Differentialgleichung durch Anfangsbedingungen (oder Randbedingungen) ergänzt, zum Beispiel

$$
\begin{aligned}
x^{(m)}(t) &= f(t,x(t),x'(t),...,x^{(m-1)}(t)) \quad (t \in I),\\
x(t_0) &= x_0,\\
x'(t_0) &= x_1,\\
&\cdots\\
x^{(m-1)}(t_0) &= x_{m-1}.
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

Hier ist $t_0 \in I$ eine gegebene “Anfangszeit” und x_0, x_1, $\ldots$, $x_{m-1} \in \mathbb{R}^n$ sind gegebene Anfangswerte. Das Problem (1.2) heißt auch **Anfangswertproblem** oder **Cauchyproblem**.

Beispiel 1.1 (Exponentielles Wachstum). Sei $I = [0,T]$ ein Intervall (Modell eines *Zeit*intervalls). Für jeden Zeitpunkt $t \in I$ misst man die Anzahl $x(t)$ der Individuen einer Population, wobei “Population” sehr allgemein zu verstehen ist, zum Beispiel eine Population von Zellen oder Bakterien, eine “Population” von radioaktiven Atomen oder ein Kapital.

Wir wollen annehmen (!), daß sich die Individuen vermehren oder absterben, und daß die Zuwachsrate unabhängig vom Zeitpunkt $t \in I$ und daß der Zuwachs proportional zur Anzahl der Individuen zum Zeitpunkt t ist. Die Zuwachsrate ist negativ, wenn Individuen absterben (radioaktive Atome zerfallen). Der infinitesimale Zuwachs der Anzahl der Individuen ist gegeben durch die Ableitung $x'(t)$, er ist proportional zur Anzahl der Individuen $x(t)$, und die Proportionalitätskonstante (Zuwachsrate) ist zeitunabhängig. Wir erhalten unter diesen Annahmen die Differentialgleichung

$$x'(t) = a \cdot x(t).$$

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung. Wir wollen weiter annehmen, daß die Anzahl der Individuen zu einem gegebenen Zeitpunkt $t_0 \in I$ bekannt ist:

$$x(t_0) = x_0.$$

Wir erhalten dann ein Anfangswertproblem.

Beispiel 1.2. Wir betrachten dieselbe Situation wie im Beispiel 1.1, aber wir nehmen jetzt an, daß die Proportionalitätskonstante (Zuwachsrate) von der Zeit abhängen darf (zum Beispiel teilen sich Zellen am Tag häufiger als während der Nacht). Wir erhalten dann die Differentialgleichung

$$x'(t) = a(t)x(t),$$

welche noch mit einer Anfangsbedingung ergänzt werden kann.

Beispiel 1.3 (Das Pendel). Eine in einem Massenpunkt M konzentrierte Masse m hängt an einem masselosen, festen Stab der Länge l. Sei $\varphi(t)$ der Winkel zwischen dem Pendel (dem Stab) und der Vertikalen zum Zeitpunkt t, und sei g die Gravitationskonstante. Dann erfüllt die Funktion φ die Differentialgleichung des physikalischen Pendels:

$$m \cdot l \cdot \varphi''(t) = -mg \cdot \sin\varphi(t).$$

Für kleine Auslenkungen φ kann man den Term $\sin\varphi$ durch φ ersetzen (erster Term der Taylorentwicklung der Sinusfunktion um den Gleichgewichtspunkt 0). Dann erhält man die Differentialgleichung des mathematischen Pendels:

$$l\,\varphi''(t) = -g\varphi(t).$$

Beide Differentialgleichungen sind gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Sie sind eventuell durch die Anfangsbedingungen $\varphi(t_0) = \varphi_0$ (Anfangsauslenkung) und $\varphi'(t_0) = \varphi_1$ (Anfangsgeschwindigkeit) zu ergänzen.

Beispiel 1.4 (Johann Bernoulli[1], 1696). Gegeben seien zwei Punkte A und B in einer vertikalen Ebene. Im Brachystochronenproblem sucht man unter all den Kurven, welche die Punkte A und B verbinden, diejenige optimale Kurve, so daß die Zeit, die ein Massepunkt der Masse m braucht, um sich nur unter dem Einfluß der Gravitation entlang der Kurve von A nach B zu bewegen, minimal wird. Die Kurve ist der Graph einer reellwertigen Funktion x. Johann Bernoulli hat gezeigt, daß die Brachystochrone Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$x'(t) = \sqrt{\frac{a - x(t)}{x(t)}}$$

sein muß. Die Lösung dieses Problems war gleichzeitig Geburtsstunde der Variationsrechnung (hier: Optimierung einer reellwertigen Funktion, die auf einer Menge von Kurven definiert ist).

Einige typische Fragestellungen aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen sind:

- Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen?
- Stabilität: hängen die Lösungen stetig von den Daten (Funktion f und Anfangswert) ab?

[1] Johann Bernoulli (27.7.1667-1.1.1748)

- Explizite Berechnung von Lösungen?
- Numerische Berechnung von Lösungen?
- Qualitatives Verhalten von Lösungen: Langzeitverhalten von Lösungen, "blow up", Existenz von Gleichgewichtspunkten, Existenz von periodischen Lösungen, Stabilität und Instabilität von Gleichgewichtslösungen, Chaos, ...?
- Modellierung?

Im folgenden sei immer $D \subseteq \mathbb{R}^{1+n}$ eine offene Menge und $f : D \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion. Die Differentialgleichung erster Ordnung ist dann die Gleichung

$$x'(t) = f(t, x(t)). \tag{1.3}$$

Sie wird oft durch die Anfangsbedingung

$$x(t_0) = x_0 \tag{1.4}$$

ergänzt, wobei $(t_0, x_0) \in D$.

Definition 1.5 (Lösung). Eine **Lösung** der Differentialgleichung (1.3) (bzw. des Anfangswertproblems (1.3)–(1.4)) ist eine stetig differenzierbare Funktion $x : I \to \mathbb{R}^n$, die auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definiert ist, welches t_0 enthält, und so daß die Differentialgleichung (1.3) für alle $t \in I$ erfüllt ist (bzw. die Differentialgleichung (1.3) für alle $t \in I$ und die Anfangsbedingung (1.4) erfüllt sind).

1.2 Lineare, skalare Differentialgleichungen erster Ordnung

Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbb{R}$ und $a : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wir betrachten zuerst die **lineare, homogene, skalare Differentialgleichung erster Ordnung**:

$$\begin{cases} x'(t) = a(t)x(t), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{1.5}$$

Proposition 1.6. *Das Anfangswertproblem* (1.5) *besitzt eine auf dem ganzen Intervall I definierte, eindeutige Lösung. Diese ist gegeben durch*

$$x(t) = e^{\int_{t_0}^t a(s)\,ds} x_0 \quad (t \in I).$$

Beweis. Existenz. Man prüft leicht nach, daß die in der Aussage gegebene Funktion tatsächlich eine Lösung des Anfangswertproblems (1.5) ist.

Eindeutigkeit. Sei z eine weitere Lösung des Anfangswertproblems (1.5). Setze $v(t) := e^{-\int_{t_0}^t a(s)\,ds} z(t)$. Dann gilt, weil z eine Lösung ist,

$$\begin{aligned} v'(t) &= -a(t)e^{-\int_{t_0}^t a(s)\,ds} z(t) + e^{-\int_{t_0}^t a(s)\,ds} z'(t) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Also ist v konstant (zur Erinnerung: dies ist eine Folgerung aus dem Mittelwertsatz). Nach Definition von v und weil z eine Lösung von (1.5) ist,

$$v(t_0) = z(t_0) = x_0.$$

Also ist $v(t) = x_0$ für alle $t \in I$. Wieder aus der Definition von v folgt

$$z(t) = e^{\int_{t_0}^t a(s)\,ds} x_0 = x(t) \quad (t \in I),$$

d. h. $z = x$.

Seien I, t_0, x_0 und a wie oben, und sei des Weiteren $g : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wir betrachten die **lineare, inhomogene, skalare Differentialgleichung erster Ordnung**:

$$\begin{cases} x'(t) = a(t)x(t) + g(t), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{1.6}$$

Proposition 1.7. *Das Anfangswertproblem* (1.6) *besitzt eine auf dem ganzen Intervall I definierte, eindeutige Lösung. Diese ist gegeben durch*

$$x(t) = e^{\int_{t_0}^t a(s)\,ds} x_0 + \int_{t_0}^t e^{\int_s^t a(r)\,dr} g(s)\,ds \quad (t \in I).$$

Beweis. Existenz. Man prüft leicht nach, daß die in der Aussage gegebene Funktion tatsächlich eine Lösung des Anfangswertproblems (1.6) ist.

Eindeutigkeit. Seien x_1 und x_2 zwei Lösungen des Anfangswertproblems (1.6). Dann ist die Differenz $x(t) := x_1(t) - x_2(t)$ eine Lösung der linearen, homogenen Differentialgleichung (1.5) mit Anfangswert $x(t_0) = 0$. Nach Satz 1.6 ist $x = 0$ die eindeutige Lösung dieses Problems. Also ist $x_1 = x_2$.

1.3 Skalare Differentialgleichungen erster Ordnung mit getrennten Veränderlichen

Wir betrachten die **skalare Differentialgleichungen erster Ordnung mit getrennten Veränderlichen**:

$$\begin{cases} x'(t) = a(t)\, f(x(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{1.7}$$

Hier sind $a : I \to \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $D \subseteq \mathbb{R}$ offen) zwei stetige Funktionen.

Wir wollen zuerst einmal annehmen, daß $x : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung dieser Differentialgleichung ist. Wir nehmen des Weiteren an, daß $f(x(t)) \neq 0$ für alle $t \in I$. Letztere Bedingung ist insbesondere aus Stetigkeitsgründen in einer Umgebung von t_0

erfüllt (d. h. wenn I hinreichend klein gewählt ist), wenn $f(x_0) \neq 0$. Unter diesen Bedingungen sind folgende Umformungen erlaubt, die uns gleichzeitig eine Methode beschreiben, wie Lösungen der Differentialgleichung (1.7) berechnet werden können. Zuerst teilen wir beide Seiten der Differentialgleichung durch $f(x(t))$:

$$\frac{x'(t)}{f(x(t))} = a(t) \text{ für alle } t \in I.$$

Sodann integrieren wir diese Gleichung von t_0 bis t:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{x'(s)}{f(x(s))}\, ds = \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds,$$

Die Substitutionsregel (mit der Substitution $v := x(s)$) ergibt:

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{f(v)}\, dv = \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds.$$

Sei F eine Stammfunktion von $\frac{1}{f}$ auf dem Intervall $[x_0, x(t)]$. Eine solche Stammfunktion existiert nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, weil f stetig und nicht 0 auf diesem Intervall ist. Da f ein Vorzeichen hat, ist F streng monoton, und somit besitzt F eine Umkehrfunktion. Es ist

$$F(x(t)) = F(x_0) + \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds$$

und somit

$$x(t) = F^{-1}(F(x_0) + \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds).$$

Dies ist eine explizite Formel für die Lösung x von (1.7); wenn sie, wie angenommen, existiert, dann ist sie durch diese Formel gegeben, und somit besitzt die Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen (lokal) höchstens eine Lösung, wenn $f(x_0) \neq 0$. Umgekehrt bieten die obigen Schritte einen Algorithmus zur Berechnung einer Lösung, oder einfacher: die obige Formel liefert eine Lösung von (1.7), wie man einfach nachrechnet.

Proposition 1.8 (Lokale Existenz und Eindeutigkeit). *Sei $x_0 \in \mathbb{R}$, so daß $f(x_0) \neq 0$. Dann besitzt das Anfangswertproblem* (1.7) *eine Lösung x auf einer Intervallumgebung I_0 von t_0. Die Lösung ist gegeben durch die Gleichung*

$$\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{f(v)}\, dv \quad (t \in I_0).$$

Sind x_1 und x_2 zwei Lösungen des Anfangswertproblems (1.7)*, dann stimmen sie auf einer Intervallumgebung von t_0 überein.*

1.4 Die Differentialgleichung $x' = f(\frac{at+bx+c}{\alpha t+\beta x+\gamma})$

Wir betrachten zwei Spezialfälle dieser Differentialgleichung.

Zuerst betrachten wir die Differentialgleichung

$$\begin{cases} x'(t) = f(\frac{x(t)}{t}), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{1.8}$$

Sei $x : I_0 \to \mathbb{R}$ eine Lösung dieser Differentialgleichung. Wir substituieren $z(t) := \frac{x(t)}{t}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} z'(t) &= \frac{x'(t)}{t} - \frac{x(t)}{t^2} \\ &= \frac{1}{t}(f(z(t)) - z(t)) \end{aligned}$$

und

$$z(t_0) = \frac{x(t_0)}{t_0},$$

d. h. z ist eine Lösung einer Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen. Ist umgekehrt z eine Lösung der Differentialgleichung

$$\begin{cases} z'(t) = \frac{1}{t}(f(z(t)) - z(t)), \\ z(t_0) = \frac{x_0}{t_0}, \end{cases}$$

dann ist $x(t) := t\,z(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung (1.8). Die Substitution $z(t) = \frac{x(t)}{t}$ transformiert also die Differentialgleichung (1.8) in eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen (1.7), für die wir ein Lösungsverfahren kennen, wenn der Anfangswert keine Nullstelle von f ist. In diesem Fall haben wir also Existenz, Eindeutigkeit und eine Lösungsformel für die Differentialgleichung (1.8).

Als nächstes betrachten wir die Differentialgleichung

$$\begin{cases} x'(t) = f(at + bx(t) + c), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{1.9}$$

Sei $x : I_0 \to \mathbb{R}$ eine Lösung dieser Differentialgleichung. Wir substituieren $z(t) := at + bx(t) + c$. Dann gilt

$$\begin{aligned} z'(t) &= a + bx'(t) \\ &= a + bf(z(t)) \end{aligned}$$

und

$$z(t_0) = at_0 + bx_0 + c,$$

d. h. auch in diesem Fall ist z eine Lösung einer Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen. Ist umgekehrt z eine Lösung der Differentialgleichung

$$\begin{cases} z'(t) = a + bf(z(t)), \\ z(t_0) = at_0 + bx_0 + c, \end{cases}$$

dann ist $x(t) := \frac{z(t)-at-c}{b}$ eine Lösung der Differentialgleichung (1.9).

Die allgemeine Differentialgleichung $x' = f(\frac{at+bx+c}{\alpha t+\beta x+\gamma})$ wird in [Heuser (1989), Abschnitt 9] behandelt.

1.5 Vektorfelder

Für zwei Spezialfälle gewöhnlicher Differentialgleichungen kann man das qualitative Verhalten von Lösungen – Existenz und Eindeutigkeit vorausgesetzt – ganz gut mittels sogenannter Vektorfelder erkennen.

Skalare Differentialgleichungen erster Ordnung. Im ersten Fall sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{1.10}$$

wobei $(t_0, x_0) \in D$.

Sei $x : I_0 \to \mathbb{R}$ eine Lösung dieser Differentialgleichung. Man betrachte den Graphen dieser Lösung in einem kartesischen Koordinatensystem mit den Koordinaten t un x. Dann besagt die Differentialgleichung (1.10), daß die Steigung der Tangente an den Graphen von x im Punkt $(t, x(t))$ genau mit dem Funktionswert $f(t, x(t))$ übereinstimmt. Die Tangente im Punkt $(t, x(t))$ zeigt also in Richtung des Vektors $(1, f(t, x))$ (oder auch in Richtung $(c, cf(t, x))$ für eine feste Konstante $c > 0$). Wir tragen also in jedem Punkt (t, x) des Koordinatensystems den Vektor $(1, f(t, x))$ an. Das *Vektorfeld*, welches wir somit erhalten, gibt uns damit eine Idee, wie die Graphen von Lösungen der Differentialgleichung (1.10) aussehen müssen.

Beispiel 1.9. Betrachten wir zum Beispiel die Differentialgleichung

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{\sin t}{1+x(t)}, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

Für diese Differentialgleichung erhalten wir das folgende Vektorfeld. Die Graphen der Lösungen zu den Anfangswerten $x_0 = -0.2$ und $x_0 = 1.2$ sind ebenfalls eingezeichnet.

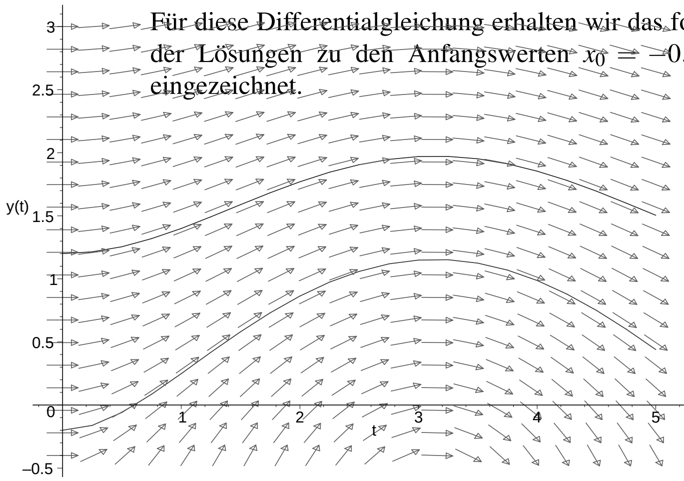

Fig. 1.1 Vektorfeld für $x' = \frac{\sin t}{1+x}$

Autonome Differentialgleichungen erster Ordnung in $\mathbb{R}^2$. Im zweiten Fall sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Menge und $f : D \to \mathbb{R}^2$ eine stetige Funktion. Wir betrachten die *autonome* (d. h. die Funktion f hängt nicht explizit von der Zeit ab) Differentialgleichung

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{1.11}$$

wobei $x_0 \in D$.

Sei $x : I_0 \to \mathbb{R}^2$ eine Lösung dieser Differentialgleichung. Man betrachte das Bild dieser Lösung in $\mathbb{R}^2$ (eine Lösung einer Differentialgleichung kann auch als Parametrisierung einer Kurve aufgefaßt werden, und hier betrachten wir das Bild dieser Kurve). Dann besagt die Differentialgleichung (1.11), daß die Tangente an diese Kurve im Punkt $x(t)$ genau mit dem Funktionswert $f(x(t))$ übereinstimmt. Wir tragen also in jedem Punkt x eines kartesischen Koordinatensystems mit den Koordinaten x_1 und x_2 den Vektor $f(x)$ an. Das *Vektorfeld*, welches wir somit erhalten, gibt uns damit eine Idee, wie die zu den Lösungen der Differentialgleichung (1.11) gehörigen Kurven aussehen müssen. Da wir eventuell nur an der

Richtung der Tangente interessiert sind, könnten wir auch den normalisierten Vektor $f(x)/\|f(x)\|$ ins Vektorfeld eintragen, aber die Länge des Vektors $f(x)$ gibt uns zusätzlich an, wie schnell die Kurve durchlaufen wird. Das zu f gehörige Vektorfeld gibt uns außerdem an, wo wir eventuell Gleichgewichtspunkte finden ($f(x) = 0$), und ob diese Gleichgewichtspunkte stabil oder instabil sind. Des Weiteren können wir eventuell periodische Lösungen finden und entscheiden, ob diese periodischen Lösungen stabil oder instabil sind.

Beispiel 1.10 (Lotka-Volterra, Räuber-Beute-Modell). Betrachten wir zwei Populationen (Räuber- und Beutepopulation). Seien $x(t)$ und $y(t)$ die jeweiligen Anzahlen der Individuen zum Zeitpunkt t. Wir nehmen an, daß die Population x von der Population y abhängt (etwa: die Räuber sind zum Überleben abhängig vom Vorhandensein von Beute), nicht aber umgekehrt. Das folgende einfache Modell wurde von Lotka[2] und Volterra[3] vorgeschlagen:

$$\begin{cases} x'(t) = -\alpha x(t) + \beta x(t)y(t), \\ y'(t) = \gamma y(t) - \delta x(t)y(t). \end{cases}$$

Hier sind α, β, γ und δ positive Konstanten.

Für die Wahl $\alpha = 1.5, \beta = 0.5, \gamma = 1$ und $\delta = 1.5$ erhält man folgendes Vektorfeld.

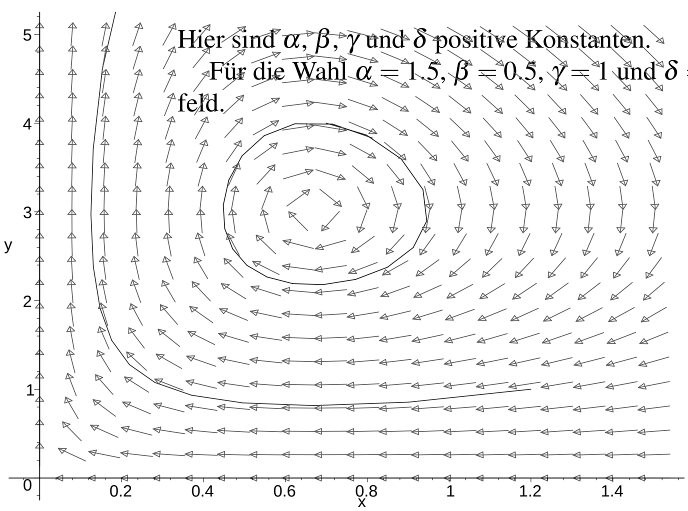

Fig. 1.2 Erstes Räuber-Beute-Modell von Lotka-Volterra

[2] Lotka ()

[3] Vito Volterra (3.5.1860-11.10.1940)

Beispiel 1.11 (Lotka-Volterra, Konkurrenzmodell). Wie im vorangegangen Beispiel betrachten wir zwei Populationen. Wie zuvor seien $x(t)$ und $y(t)$ die jeweiligen Anzahlen der Individuen zum Zeitpunkt t. In diesem Beispiel betrachten wir zwei konkurrierende Populationen (etwa: konkurrierend um dieselbe Beute). Ein einfaches Modell ist in diesem Fall die Differentialgleichung

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) - bx(t)y(t) - cx(t)^2, \\ y'(t) = \alpha y(t) - \beta x(t)y(t) - \gamma y(t)^2, \end{cases}$$

wobei a, b, c, α, β und γ positive Konstanten sind.

Für die Wahl $a = 0.8$, $b = 0.5$, $c = 0.7$, $\alpha = 1$, $\beta = 0.4$ und $\gamma = 1.1$ erhält man folgendes Vektorfeld.

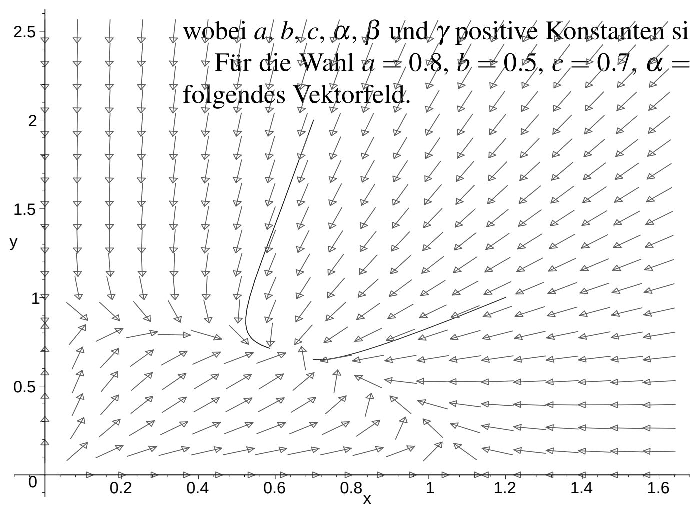

Fig. 1.3 Erstes Kokurrenzmodell von Lotka-Volterra

Kapitel 2
Die Sätze von Peano und Picard-Lindelöf

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^{1+n}$ eine offene Menge, $f : D \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion $(t_0, x_0) \in D$. Wir betrachten die Differentialgleichung erster Ordnung

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Ziel dieses Kapitels ist es Existenz und, wenn möglich, auch Eindeutigkeit von Lösungen dieser Differentialgleichung zu zeigen und einige Folgerungen zu diskutieren.

2.1 Näherungslösungen und das Theorem von Peano

Nous commençons par étudier l'existence de solutions locales. Une fonction continue $x : I_0 \to \mathbb{R}^n$ est appelée **solution ε-approchée** de (2.1) si elle est C^1 par morceaux, partout dérivable à droite, si $x(t_0) = x_0$ et si

$$\sup_{t \in I_0} \|x'(t) - f(t, x(t))\| \leq \varepsilon.$$

Lemma 2.1. *Sous la seule condition que f soit continue, il existe un intervalle $I_0 \subseteq \mathbb{R}$, voisinage de t_0, tel que pour tout $\varepsilon > 0$ le problème* (2.1) *admet une solution ε-approchée définie sur I_0.*

Beweis. Parce que D est un ouvert, on trouve $\alpha > 0$ et $r > 0$ tel que

$$D' := [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times \bar{B}(x_0, r) \subseteq D.$$

Comme f est continue et par compacité de D' on trouve $M \geq 1$ tel que

$$\|f(t, x)\| \leq M \text{ pour tout } (t, x) \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times \bar{B}(x_0, r).$$

En choisissant α plus petit, si nécessaire, on peut dans la suite supposer que $\alpha \le \frac{r}{M}$ et on pose alors $I_0 = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme D' est compact et f continue, f est uniformément continue sur D'. Donc, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout (t_1, x_1), $(t_2, x_2) \in D'$ on a

$$\|(t_1,x_1)-(t_2,x_2)\| \le \delta \quad \Rightarrow \quad \|f(t_1,x_1)-f(t_2,x_2)\| \le \varepsilon.$$

On choisit une famille finie $(\tau_i)_{0\le i\le m}$ telle que $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_m = t_0 + \alpha$ et

$$\sup_i(\tau_{i+1}-\tau_i) \le \frac{\delta}{\sqrt{2}M}.$$

Puis on définit

$$\begin{aligned} x(\tau_0) &:= x_0 \text{ et} \\ x(\tau_{i+1}) &:= x(\tau_i) + (\tau_{i+1}-\tau_i) f(\tau_i, x(\tau_i)) \text{ si } 0 \le i \le m-1 \text{ et} \\ x(t) &:= x(\tau_i) + (t-\tau_i) f(\tau_i, x(\tau_i)) \text{ si } t \in [\tau_i, \tau_{i+1}). \end{aligned}$$

Alors la fonction $x : [t_0, t_0+\alpha] \to \mathbb{R}^n$ est continue, C^1 par morceaux (même linéaire par morceaux) et partout dérivable à droite et à gauche. En plus, $x(t_0) = x_0$ par définition de x.

On montre par récurrence que $\|x(t)-x_0\| \le r$ quelque soit $t \in [t_0, t_0+\alpha]$. Premièrement, cette estimation est vraie en $t = t_0 = \tau_0$ car $x(t_0) = x_0$. Maintenant, on suppose que l'estimation est vraie sur $[\tau_0, \tau_i]$ pour un $i \in \{0, \ldots, m-1\}$. Alors, pour tout $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$

$$\begin{aligned} \|x(t)-x_0\| &\le \int_{t_0}^{t} \|x'(t)\|\, dt \\ &\le \sum_{j=0}^{i} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \|f(\tau_i, x(\tau_i))\|\, dt \\ &\le \alpha M \\ &\le r. \end{aligned}$$

Donc, $\|x(t)-x_0\| \le r$ quelque soit $t \in [t_0, t_0+\alpha]$.

Pour tout $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ on a d'un côté

$$|t-\tau_i| \le \frac{\delta}{\sqrt{2}M} \le \frac{\delta}{\sqrt{2}} \quad (\text{car } M \ge 1)$$

et d'un autre côté

$$\begin{aligned}\|x(t)-x(\tau_i)\| &= \|\int_{\tau_i}^t x'(s)\,ds\| \\ &= \|\int_{\tau_i}^t f(\tau_i,x(\tau_i))\,ds\| \\ &\le \frac{\delta}{\sqrt{2}M}M = \frac{\delta}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Ceci implique pour tout $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ on a

$$\|(t,x(t)) - (\tau_i, x(\tau_i))\| \le \delta$$

et donc

$$\|x'(t) - f(t,x(t))\| = \|f(\tau_i,x(\tau_i)) - f(t,x(t))\| \le \varepsilon.$$

pour tout $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ et tout $0 \le i \le m-1$. En conséquence, la fonction x est une solution ε-approchée sur l'intervalle $[t_0, t_0+\alpha]$. D'une manière similaire, on construit une solution ε-approchée sur $[t_0-\alpha, t_0]$ et on a donc démontré l'existence d'une solution ε-approchée sur I_0.

Bemerkung 2.2. Les solutions ε-approchées construites dans la démonstration du lemme précédent (en remplaçant la dérivée $x'(t)$ par le quotient $(x(\tau_{i+1}) - x(\tau_i))/(\tau_{i+1} - \tau_i))$ sont les exemples les plus simples de solutions ε-approchées en analyse numérique des équations différentielles. L'algorithme emprunt est l'algorithme d'Euler. Si f est de classe C^1, alors on peut estimer l'erreur ε en fonction du nombre m de points choisis dans l'intervalle $[t_0, t_0+\alpha]$.

Theorem 2.3 (Peano). *Sous la seule condition que la fonction f soit continue, le problème* (2.1) *admet une solution locale, c.à.d. il existe un intervalle $I_0 \subseteq \mathbb{R}$ voisinage de t_0 et une fonction $x : I_0 \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 qui vérifie* (2.1).

Beweis. Soit I_0 l'intervalle obtenu dans le lemme 2.1, et soit $(x_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une famille de solutions ε-approchées telle que $\sup_{t\in I_0} \|x_\varepsilon(t) - x_0\| \le r$ et $\sup_{t\in I_0} \|f(t,x_\varepsilon(t))\| \le M$ pour des constantes $r > 0$, $M \ge 1$ et pour tout $\varepsilon > 0$. Une telle famille existe d'après le lemme 2.1 et sa démonstration.

Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout t, $s \in I_0$ on a

$$\begin{aligned}\|x_\varepsilon(t) - x_\varepsilon(s)\| &\le \Big|\int_s^t \|x'_\varepsilon(r)\|\,dr\Big| \\ &\le \Big|\int_s^t (\|f(r,x_\varepsilon(r))\| + \varepsilon)\,dr \\ &\le (M+\varepsilon)|t-s|.\end{aligned}$$

Donc, toute fonction x_ε est lipschitzienne avec constante de Lipschitz $M+\varepsilon$.

Soit (ε_n) une suite convergente vers 0. On suppose que $\varepsilon_n \le 1$, quelque soit $n \in \mathbb{N}$. Pour simplifier la notation, on note x_n au lieu de x_{ε_n}.

Soit $(t_j) \subseteq I_0$ tel que $\{t_j : j\} = I_0 \cap \mathbb{Q}$ (on utilise que $\mathbb{Q}$ est dénombrable et qu'on troube ainsi une telle suite). On montre premièrement (en utilisant l'idée de la suite diagonale de Cantor) que la suite (x_n) admet une sous-suite qui converge en tout point t_j.

Comme la suite $(x_n(t_1))$ est bornée dans $\mathbb{R}$, il existe une sous-suite $(x_{\varphi_1(n)}(t_1))$ qui converge. Puis, comme la suite $(x_{\varphi_1(n)}(t_2))$ est bornée dans $\mathbb{R}$, il existe une sous-suite $(x_{\varphi_2(n)}(t_2))$ (de la sous-suite) qui converge. En itérant ce processus, on trouve une sous-suite $(x_{\varphi_{j+1}(n)}(t_{j+1}))$ de $(x_{\varphi_j(n)}(t_{j+1}))$ qui converge. En prenant la suite diagonale $(x_{\varphi_n(n)})$ on a donc trouvé une sous-suite de (x_n) qui converge en tout point t_j vers un $x(t_j) \in \mathbb{R}$. Pour faciliter la notation, on note cette sous-suite de nouveau (x_n).

On montre que (x_n) converge uniformément sur I_0 vers une fonction continue x. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe une suite finie $(t_{j_l})_{l=1}^k \subseteq I_0 \cap \mathbb{Q}$ telle que

$$I_0 \subseteq \bigcup_{l=1}^{k} (t_{j_l} - \frac{\varepsilon}{2(M+1)}, t_{j_l} + \frac{\varepsilon}{2(M+1)}).$$

Puisque pour tout $l \in \{1, \dots, k\}$ la suite $(x_n(t_{j_l}))$ est convergente et puisque $k < \infty$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout n, $m \geq n_0$ et tout $l \in \{1, \dots, k\}$ on a

$$\|x_n(t_{j_l}) - x_m(t_{j_l})\| \leq \varepsilon.$$

Soit $t \in I_0$. Alors il existe $l \in \{1, \dots, k\}$ tel que $|t - t_{j_l}| \leq \frac{\varepsilon}{2(M+1)}$. Donc on obtient pour tout n, $m \geq n_0$,

$$\begin{aligned} \|x_n(t) - x_m(t)\| &\leq \|x_n(t) - x_n(t_{j_l})\| + \\ &\quad + \|x_n(t_{j_l}) - x_m(t_{j_l})\| + \\ &\quad + \|x_m(t_{j_l}) - x_m(t)\| \\ &\leq 2(M+1)\,|t - t_{j_l}| + \varepsilon \\ &\leq 3\varepsilon. \end{aligned}$$

On a donc démontré que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout n, $m \geq n_0$ on a

$$\sup_{t \in I_0} \|x_n(t) - x_m(t)\| \leq 3\varepsilon.$$

Ceci implique que $(x_n(t))$ est une suite de Cauchy et donc une suite convergente vers un élément $x(t) \in \mathbb{R}$, quelque soit $t \in I_0$. C'est un exercice de montrer que (x_n) converge même uniformément vers x et comme les fonctions x_n sont continue, la fonction x est continue.

On montre troisièmement que la fonction x est une solution de notre problème. Comme (x_n) converge uniformément vers x et comme f est continue, on obtient

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{t \in I_0} \|f(t, x_n(t)) - f(t, x(t))\| = 0.$$

De plus, comme x_n est une solution ε_n-approchée, on obtient après une intégration

$$\|x_n(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, x_n(s))\, ds\| \le \varepsilon_n \alpha, \quad t \in I_0.$$

Après un passage à la limite on obtient

$$\|x(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds\| = 0, \quad t \in I_0,$$

ce qui implique

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds, \quad t \in I_0.$$

En particulier, $x(t_0) = x_0$. De plus, comme la fonction $s \to f(s, x(s))$ est continue, la fonction x est de classe C^1 et après une différentiation on obtient

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \in I_0.$$

La fonction x est donc une solution du problème (2.1).

Bemerkung 2.4. Dans la démonstration ci-dessus, on a montré que quelque soit la suite (ε_n) convergente vers 0, on trouve une sous-suite (notée de nouveau (ε_n)) telle que (x_{ε_n}) converge vers une solution du problème (2.1). On a donc seulement montré existence d'une solution du problème (2.1), mais pas unicité. En effet, on montrera qu'il existe des équations différentielles avec données initiales pour lesquelles il existe plusieurs solutions. Un exemple est l'équation différentielle

$$x'(t) = 2\sqrt{|x(t)|}, \quad x(0) = 0.$$

Ce problème admet comme solutions $x(t) \equiv 0$ et $x(t) = t^2 \mathrm{sgn}\, t$. Ici, la fonction $f(x) = 2\sqrt{|x|}$ est continue. Dans cet exemple, l'équation est une équation différentielle à variables séparées. Pourquoi est que cet exemple ne contredit pas la Proposition 1.8?

2.2 Le théorème de Picard-Lindelöf

Dans cette section, on va étudier l'unicité d'une solution locale. A cause de l'exemple de la Remarque 2.4, la condition que f soit continue ne suffit pas pour garantir l'unicité. On verra dans le théorème de Picard-Lindelöf que c'est la condition que f soit localement lipschitzienne (par rapport à la deuxième variable seulement) qui implique unicité.

Pour cela, on aura besoin du lemme de Gronwall[1].

Lemma 2.5 (Gronwall). *Soit $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle, $\varphi : I \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue et C, $\varepsilon \ge 0$. On suppose que*

[1] Gronwall ()

$$\varphi(t) \leq C + \int_a^t (L\varphi(s) + \varepsilon)\, ds, \quad t \in I.$$

Alors on a

$$\varphi(t) \leq Ce^{L(t-a)} + \frac{\varepsilon}{L}(e^{L(t-a)} - 1), \quad t \in I.$$

Beweis. On pose $\psi(t) := C + \int_a^t (L\varphi(s) + \varepsilon)\, ds$ ($t \in I$). Comme φ est continue, la fonction ψ est continûment différentiable. L'hypothèse implique que pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= L\varphi(t) + \varepsilon \\ &\leq L\psi(t) + \varepsilon. \end{aligned}$$

La proposition 1.7 implique que pour tout $t \in I$ on a

$$\psi(t) \leq Ce^{L(t-a)} + \frac{\varepsilon}{L}(e^{L(t-a)} - 1).$$

Comme $\varphi(t) \leq \psi(t)$, le lemme est démontré.

Theorem 2.6 (Picard-Lindelöf). *Supposons que la fonction $f : D \to \mathbb{R}^n$ est continue et qu'elle est en (t_0, x_0) localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, c.à.d. il existe un voisinage $U \subseteq D$ de (t_0, x_0) et une constante $L \geq 0$, tel que pour tout (t, x_1), $(t, x_2) \in U$ on a l'inégalité*

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\|_2 \leq L\|x_1 - x_2\|_2.$$

Alors l'équation différentielle (2.1) *admet une solution locale unique. Ceci veut dire qu'il existe un intervalle $I_0 \subseteq \mathbb{R}$ voisinage de t_0 et une solution $x : I_0 \to \mathbb{R}^n$ du problème* (2.1)*; en plus, si $z : I_1 \to \mathbb{R}^n$ est une deuxième solution de* (2.1)*, alors $x = z$ sur $I_0 \cap I_1$.*

Beweis. Par le théorème de Peano (Théorème 2.3) il existe une solution $x : I_0 \to \mathbb{R}^n$ du problème (2.1). Par continuité de x et en choisissant l'intervalle I_0 plus petit, si nécessaire, on peut supposer que

$$\{(t, x(t)) : t \in I_0\} \subseteq U,$$

ou U est le voisinage de (t_0, x_0) de l'énoncé.

Soit $z : I_1 \to \mathbb{R}^n$ une deuxième solution du problème (2.1). Pour $t \in I_0 \cap I_1$ on pose $\varphi(t) := \|x(t) - z(t)\|$. Par continuité de z, l'ensemble $\{t \in I_0 \cap I_1 : (t, z(t)) \in U\}$ est un voisinage de t_0. Pour ces t ($t \geq t_0$) on a, par l'hxpothèse sur f,

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \|x(t)-z(t)\| \\
&= \|\int_{t_0}^{t} (f(s,x(s))-f(s,z(s)))\,ds\| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} \|f(s,x(s))-f(s,z(s))\|\,ds \\
&\leq L\int_{t_0}^{t} \|x(s)-z(s)\|\,ds \\
&= L\int_{t_0}^{t} \varphi(s)\,ds.
\end{aligned}$$

Par le lemme de Gronwall (Lemme 2.5), on obtient

$$\varphi(t)=0 \text{ et donc } x(t)=z(t)$$

pour tout $t\in I_0\cap I_1$, $t\geq t_0$, tel que $(t,z(t))=(t,x(t))\in U$. On en déduit que $z(t)=x(t)$ pour tout $t\in I_0\cap I_1$, $t\geq t_0$. Pour $t\in I_0\cap I_1$, $t\leq t_0$, on fait un argument similaire en inversant le temps. On a donc démontré que $z=x$ sur $I_0\cap I_1$.

Dans la pratique, au lieu de vérifier que la fonction f est localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, on vérifie plutôt que la fonction f est de classe C^1. En fait, on a le lemme suivant.

Lemma 2.7. *Supposons que la fonction $f:D\to\mathbb{R}^n$ est de classe C^1 dans un voisinage de (t_0,x_0). Alors f est en (t_0,x_0) localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable et le problème* (2.1) *admet une solution locale unique.*

Beweis. On peut supposer que f est de classe C^1 dans un voisinage de la forme $I_0\times B(x_0,r)$. Par continuité de f' et en choisissant le voisinage plus petit, si nécessaire, on trouve $L\geq 0$ tel que

$$\|f'(t,x)\|\leq L \text{ pour tout } (t,x)\in I_0\times B(x_0,r).$$

Soient (t,x_1), $(t,x_2)\in I_0\times B(x_0,r)$. Alors

$$\begin{aligned}
\|f(t,x_2)-f(t,x_1)\| &= \|\int_0^1 \frac{d}{ds}f(t,x_1+s(x_2-x_1))\,ds\| \\
&\leq \int_0^1 \|f'(t,x_1+s(x_2-x_1))\,(x_2-x_1)\|\,ds \\
&\leq \int_0^1 L\|x_2-x_1\|\,ds \\
&= L\|x_2-x_1\|.
\end{aligned}$$

La fonction f est donc en (t_0,x_0) localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable. Le fait que le problème (2.1) admet une solution locale unique est juste le théorème de Picard-Lindelöf (Théorème 2.6).

2.3 Solutions maximales

Definition 2.8. Une solution $x_{max} : I_{max} \to \mathbb{R}^n$ ($I_{max} \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle) du problème (2.1) est appelée *solution maximale* si toute autre solution $x : I \to \mathbb{R}^n$ du problème (2.1) est une restriction de celle-ci à un intervalle plus petit, c.à.d. $I \subseteq I_{max}$ et $x = x_{max}$ sur I. En cas d'existence d'une solution maximale, l'intervalle I_{max} est appelé *intervalle (maximale) d'existence* correspondant à la donnée initiale (t_0, x_0).

Lemma 2.9. *On suppose que $f : D \to \mathbb{R}^n$ est continue. La solution maximale du problème* (2.1) *(si elle existe) est unique et l'intervalle d'existence est ouvert.*

Beweis. L'unicité de la solution maximale est une conséquence immédiate de sa définition: si on a deux solutions maximales, alors l'une est restriction de l'autre et vice versa.

Pour montrer que l'intervalle d'existence est ouvert, supposons le contraire, c.à.d. $x_{max} : I_{max} \to \mathbb{R}^n$ est solution maximale et l'intervalle d'existence I_{max} n'est pas ouvert. Alors I_{max} est de la forme $(\alpha, \beta]$ avec $-\infty \leq \alpha < \beta < \infty$, $[\alpha, \beta)$ avec $-\infty < \alpha < \beta \leq \infty$, ou $[\alpha, \beta]$ avec $-\infty < \alpha < \beta < \infty$. Supposons le premier cas. Dans ce cas, $(\beta, x_{max}(\beta)) \in D$ et on peut résoudre l'équation différentielle

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(\beta) = x_{max}(\beta).$$

Par le théorème de Peano (Théorème 2.3), cette équation différentielle admet une solution locale $x : I_0 \to \mathbb{R}^n$, définie dans un intervalle I_0 qui est voisinage de β. Si on définit maintenant $z(t) = x_{max}(t)$ pour $t \in I_{max}$ et $z(t) = x(t)$ pour $t \geq \beta$, $t \in I_0$, alors on obtient une solution du problème (2.1) qui est définie sur un intervalle strictement plus grand que I_{max}. Ceci contredit la définition de la solution maximale et donc I_{max} ne peut pas être de la forme $(\alpha, \beta]$. Dans les autres cas, on procède d'une manière similaire. L'intervalle I_{max} est donc ouvert.

Theorem 2.10. *Soit $D \subseteq \mathbb{R}^{1+n}$ un ouvert et $f : D \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1. Alors pour tout $(t_0, x_0) \in D$ le problème* (2.1) *admet une solution maximale.*

Beweis. On montre que si $x_1 : I_1 \to \mathbb{R}^n$ et $x_2 : I_2 \to \mathbb{R}^n$ sont deux solutions du problème (2.1), alors $x_1 = x_2$ sur $I_1 \cap I_2$. Par le théorème de Picard-Lindelöf (Théorème 2.6 et Lemme 2.7) et par l'hypothèse que f est de classe C^1, si $x_1(t) = x_2(t)$, alors $x_1 = x_2$ dans un voisinage de t. En particulier, $x_1 = x_2$ dans un voisinage de t_0. Par continuité des fonctions x_1 et x_2, l'ensemble des $t \in I_1 \cap I_2$ tel que $x_1(t) = x_2(t)$ est fermé dans $I_1 \cap I_2$. On ne trouve donc pas $t_1 \in I_1 \cap I_2$, tel que $x_1(t_1) = x_2(t_1)$ et $x_1 \neq x_2$ dans tout voisinage de t_1. Ainsi $x_1 = x_2$ sur $I_1 \cap I_2$.

Soit $\mathscr{L} := \{(x, I_x) : x : I_x \to \mathbb{R}^n$ est solution de (2.1) $\}$ l'ensemble de toutes les solutions et soit

$$I_{max} := \bigcup_{(x, I_x) \in \mathscr{L}} I_x.$$

Sur l'intervalle I_{max} on définit la solution x_{max} par

$$x_{max}(t) := x(t) \quad \text{si } t \in I_x \text{ et } (x, I_x) \in \mathscr{L}.$$

La fonction x_{max} est bien définie par la première étape. Elle est solution du problème (2.1) (en particulier $(x_{max}, I_{max}) \in \mathscr{L}$), et par définition elle est la solution maximale.

Bemerkung 2.11. Par le théorème de Picard-Lindelöf (Théorème 2.6), le Théorème 2.10 reste vrai si la fonction f est en tout $(t_0, x_0) \in D$ localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, c.à.d. si pour tout $(t_0, x_0) \in D$ il existe un voisinage $U \subseteq D$ et une constante $L \geq 0$ tels que pour tout (t, x_1), $(t, x_2) \in U$ on a

$$\|f(t,x_1) - f(t,x_2)\|_2 \leq L\|x_1 - x_2\|_2.$$

Comparer aussi avec le Lemme 2.7.

Lemma 2.12. *On suppose que $f : D \to \mathbb{R}^n$ est continue. Soit $x_{max} : I_{max} \to \mathbb{R}^n$ une solution maximale du problème* (2.1)*, $I_{max} =]\alpha, \beta[$ pour $-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty$. Si $\alpha \neq -\infty$, alors pour tout $K \subseteq D$ compact il existe $t_K \in]\alpha, t_0[$ tel que $(t, x_{max}(t)) \notin K$ pour $\alpha < t < t_K$. Et si $\beta \neq \infty$, alors pour tout $K \subseteq D$ compact il existe $t_K \in]t_0, \beta[$ tel que $(t, x_{max}(t)) \notin K$ pour $t_K < t < \beta$.*

Autrement dit, si la solution maximale n'est pas une solution globale, alors le graphe de la solution maximale quitte finalement tout compact de D.

Beweis. Supposons que $\beta < \infty$ et qu'il existe un compact $K \subseteq D$ et une suite $(t_n) \nearrow \beta$ telle que $(t_n, x_{max}(t_n)) \in K$. Comme K est compact et D est ouvert, il existe $\delta > 0$ tel que

$$K_\delta := \{(t,x) \in \mathbb{R}^{1+n} : \operatorname{dist}((t,x),K) \leq \delta\} \subseteq D.$$

On notera que K_δ est aussi compact. Comme la fonction f est continue, et comme K_δ est compact, la fonction f est bornée sur K_δ, c.à.d. $\sup_{(t,x)\in K_\delta} \|f(t,x)\| =: M < \infty$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit

$$s_n := \sup\{t \geq t_n : t < \beta \text{ et } (s, x_{max}(s)) \in K_\delta \text{ pour tout } s \in [t_n, t]\} \leq \beta.$$

Comme $(t_n, x(t_n)) \in K$, et par continuité de x_{max}, $s_n > t_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t < s_n$ on a

$$\begin{aligned} \|x_{max}(t) - x_{max}(t_n)\| &\leq \int_{t_n}^t \|x'_{max}(s)\|\, ds \\ &= \int_{t_n}^t \|f(s, x_{max}(s))\|\, ds \\ &\leq M(t - t_n). \end{aligned}$$

Pour n suffisamment grand, le côté à droite est strictement plus petit que $\delta/2$ et en même temps $\beta - t_n < \delta/2$. Ainsi, pour n suffisamment grand, on a $(t, x_{max}(t)) \in K_\delta$ quelque soit $t \in [t_n, \beta[$.

En plus, la fonction x_{max} est lipschitzienne et donc uniformément continue sur $[t_n, \beta[$. Mais une fonction uniformément continue sur l'intervalle borné $[t_n, \beta[$ admet un prolongement continue sur l'intervalle fermé $[t_n, \beta]$. Soit $x_\beta := \lim_{t \to \beta} x_{max}(t)$. On a $(\beta, x_\beta) \in K_\delta \subseteq D$.

Par le théorème de Peano (Théorème 2.3), la solution x_{max} peut être prolongée en une solution dans un voisinage de β, mais ceci est une contradiction à la définition de solution maximale. On a démontré que si $\beta < \infty$, alors le graphe $\{(t, x_{max}(t)) : t_0 \leq t < \beta\}$ quitte tout compact de D.

Le cas $\alpha \neq -\infty$ se démontre d'une manière similaire.

Korollar 2.13. *Sous les hypothèses du Lemme 2.12 on a:*

(a) *Ou bien* $\beta = \infty$ *(existence globale pour* $t \geq t_0$*), ou bien* $\beta < \infty$. *Si* $\beta < \infty$, *alors ou bien* $\lim_{t\to\beta} \|x(t)\|_2 = \infty$ *(explosion en temps fini) ou* $\lim_{t\to\beta} \mathrm{dist}((t,x(t)), \partial D) = 0$.

(b) *Ou bien* $\alpha = -\infty$ *(existence globale pour* $t \leq t_0$*), ou bien* $\alpha > -\infty$. *Si* $\alpha > -\infty$, *alors ou bien* $\lim_{t\to\alpha} \|x(t)\|_2 = \infty$ *(explosion en temps fini) ou* $\lim_{t\to\alpha} \mathrm{dist}((t,x(t)), \partial D) = 0$.

Beweis. Ceci est une conséquence directe du Lemme 2.12.

Bemerkung 2.14. Dans beaucoup de situations, on a $D = \mathbb{R}^{1+n}$. Dans ce cas, $\partial D = \emptyset$ et on n'a que deux cas possibles pour une solution maximale et son comportement près du temps d'existence β: ou bien on a existence globale ($\beta = \infty$), ou bien on a explosion en temps fini ($\beta < \infty$ et $\lim_{t\to\beta} \|x(t)\|_2 = \infty$). La même remarque reste vrai près du temps d'existence α.

Korollar 2.15. *On suppose que* $f : \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}^n$ *est de classe* C^1 *(ou en tout point localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable) et que*

$$\sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^{1+n}} \|f(t,x)\| =: M < \infty.$$

Alors pour tout $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{1+n}$ *la solution maximale du problème* (2.1) *est en fait une solution globale, c.à.d. l'intervalle d'existence est tout* $\mathbb{R}$.

Beweis. Soit $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{1+n}$. Rappelons du Théorème 2.10 que le problème (2.1) admet une solution maximale x. Soit (α, β) l'intervalle d'existence de cette solution maximale. Supposons que $\beta < \infty$. D'après le Corollaire 2.13 et la Remarque 2.14, ça implique que $\lim_{t\to\beta} \|x(t)\| = \infty$. Par contre, pour $t \in [t_0, \beta)$ on a d'après l'hypothèse sur f

$$\begin{aligned}
\|x(t)\| &\leq \|x(t) - x(t_0)\| + \|x(t_0)\| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} \|x'(s)\| \, ds + \|x_0\| \\
&= \int_{t_0}^{t} \|f(s, x(s))\| \, ds + \|x_0\| \\
&\leq M(\beta - t_0) + \|x_0\|,
\end{aligned}$$

et ceci contredit à l'explosion en temps fini. Donc, on a démontré que $\beta = \infty$. D'une manière pareil on montre que $\alpha = -\infty$, et donc l'intervalle d'existence est égal à $\mathbb{R}$.

2.4 Sensibilité par rapport aux données

Dans ce pararagraphe, on considère le problème (2.1) *et* le problème suivant

$$\begin{cases} z'(t) = g(t, z(t)), \\ z(t_0) = z_0, \end{cases} \tag{2.2}$$

où $g : D \to \mathbb{R}^n$ est continue sur l'ouvert D.

On étudie la question suivante: si les données initiales (t_0, x_0) und (t_0, z_0) sont proches, et si les fonctions f et g sont proches, alors est-ce que les solutions x et z des problèmes (2.1) et (2.2) sont proches? Sous la condition que la fonction f est lipschitzienne, on peut en effet estimer la distance entre x et z.

Theorem 2.16. *Soient x, $z : I \to \mathbb{R}^n$ solutions des problèmes* (2.1) *respectivement* (2.2)*. On suppose qu'il existe une boule $B \subseteq \mathbb{R}^n$ tel que $I \times B \subseteq D$ et $(t, x(t))$, $(t, z(t)) \in I \times B$ pour tout $t \in I$. On suppose aussi que la fonction f est sur $I \times B$ lipschitzienne par rapport à la deuxième variable avec constante de Lipschitz $L \geq 0$. Soit $\varepsilon := \sup_{(t,w)\in I\times B} \|f(t,w) - g(t,w)\|_2 < \infty$. Alors pour tout $t \in I$*

$$\|x(t) - z(t)\|_2 \leq e^{L|t-t_0|} \|x_0 - z_0\|_2 + \frac{\varepsilon}{L} (e^{L|t-t_0|} - 1).$$

Beweis. Le fait que x et z sont solutions des problèmes (2.1) et (2.2) implique que pour tout $t \in I$ on a

$$\begin{aligned} x(t) - z(t) &= x_0 - z_0 + \int_{t_0}^{t} (f(s, x(s)) - g(s, z(s)))\, ds \\ &= x_0 - z_0 + \int_{t_0}^{t} (f(s, x(s)) - f(s, z(s)))\, ds + \\ &\quad + \int_{t_0}^{t} (f(s, z(s)) - g(s, z(s)))\, ds. \end{aligned}$$

L'inégalité du triangle implique que pour tout $t \in I$

$$\|x(t) - z(t)\|_2 \leq \|x_0 - z_0\|_2 + \left| \int_{t_0}^{t} (L\|x(s) - z(s)\|_2 + \varepsilon)\, ds \right|.$$

Le théorème suit alors du lemme de Gronwall (Lemme 2.5) appliqué à la fonction $\varphi = \|x - z\|_2$.

2.5 L'équation différentielle d'ordre m

On considère maintenant l'équation différentielle d'ordre $m \geq 2$:

$$\begin{cases} x^{(m)}(t) = f(t, x(t), x'(t), ..., x^{(m-1)}(t)), \\ x(t_0) = x_0, \\ \vdots \\ x^{(m-1)}(t_0) = x_{m-1}. \end{cases} \tag{2.3}$$

Ici, $f : D \to \mathbb{R}^n$ est une fonction continue sur l'ouvert $D \subseteq \mathbb{R}^{1+mn}$ et $(t_0, x_0, \ldots, x_{m-1}) \in D$.

On montrera que cette équation différentielle d'ordre m est équivalente à une équation différentielle du premier ordre dans le sens du Lemme 2.17 ci-dessous. Ainsi, tous les résultats de ce chapitre s'appliquent aussi à l'équation différentielle d'ordre m. Par exemple, sous la seule condition que la fonction f est continue, le problème (2.3) admet une solution locale, et si f est en $t - 0, x_0, \ldots, x_{m-1})$ de plus localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, alors le problème (2.3) admet une unique solution locale. Si de plus f est localement lipschitzienne en tout point de son domaine de définition, alors le problème (2.3) admet une (unique) solution maximale.

Tout dépend alors du lemme suivant.

Lemma 2.17. *On définit la fonction $g : D \to \mathbb{R}^{mn}$ par*

$$g(t, \eta_0, \ldots, \eta_{m-1}) := (\eta_1, \ldots, \eta_{m-1}, f(t, \eta_0, \ldots, \eta_{m-1}))$$

et on considère l'équation différentielle du premier ordre (dans $\mathbb{R}^{mn}$)

$$\begin{cases} u'(t) = g(t, u(t)), \\ u(t_0) = (x_0, \ldots, x_{m-1}). \end{cases} \tag{2.4}$$

Si $u : I \to \mathbb{R}^{mn}$, $u = (u_0, \ldots, u_{m-1})$ est une solution du problème (2.4)*, alors $x := u_0 : I \to \mathbb{R}^n$ est une solution du problème* (2.3)*.*

Inversement, si $x : I \to \mathbb{R}^n$ est une solution du problème (2.3)*, alors la fonction $u := (x, x', \ldots, x^{(m-1)}) : I \to \mathbb{R}^{mn}$ est une solution du problème* (2.4)*.*

Beweis. La démonstration de ce lemme est un exercice.

Korollar 2.18. *Sous la seule condition que la fonction f est continue, le problème* (2.3) *admet une solution locale.*

Beweis. Il suffit de remarquer que la fonction g du Lemme 2.17 est continue si et seulement si la fonction f est continue, et puis d'appliquer le théorème de Peano (Théorème 2.3) et le Lemme 2.17.

Korollar 2.19. *On suppose que la fonction $f : D \to \mathbb{R}^n$ est continue et qu'elle est de classe C^1 dans un voisinage de $(t_0, x_0, \ldots, x_{m-1}) \in D$. Alors le problème* (2.3) *admet une unique solution locale.*

Beweis. Il suffit de remarquer que la fonction g du Lemme 2.17 est de classe C^1 dans un voisinage de $(t_0, x_0, \ldots, x_{m-1})$ si et seulement si la fonction f est de classe C^1 dans une voisinage de $(t_0, x_0, \ldots, x_{m-1})$, et puis d'appliquer le théorème de Picard-Lindelöf (Théorème 2.6 et Lemme 2.7) et le Lemme 2.17.

Bien sur, l'hypothèse que f est de classe C^1 peut être remplacée par l'hypothèse plus faible que f est seulement localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable.

Kapitel 3
Equations différentielles linéaires

Une équation différentielle linéaire d'ordre m est un problème de la forme

$$\begin{cases} x^{(m)}(t) + A_{m-1}(t)x^{(m-1)}(t) + \ldots + A_0(t)x(t) = f(t), \\ x(t_0) = x_0, \ldots, x^{(m-1)}(t_0) = x_{m-1}, \end{cases} \tag{3.1}$$

où les fonctions $A_j : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ $(0 \leq j \leq m-1)$ et $f : I \to \mathbb{R}^n$ sont continues sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$, et $x_j \in \mathbb{R}^n$ $(0 \leq j \leq m-1)$.

L'équation différentielle (3.1) est linéaire dans le sens que si le second membre f est nulle, et si x et z sont deux solutions de (3.1) (pour deux données initiales différentes), et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors la combinaison linéaire $\lambda x + z$ est aussi une solution. En fait, toujours pour $f = 0$, l'ensemble des solutions de (3.1) forme un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions continues $I \to \mathbb{R}^n$.

Dans le lemme suivant on montre qu'il suffit en principe d'étudier les équations différentielles linéaires du premier ordre (comparer avec le Lemme 2.17).

Lemma 3.1. *Soit*

$$A(t) := \begin{pmatrix} 0 & I & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & I \\ -A_0(t) & \cdots & -A_{m-2}(t) & -A_{m-1}(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{mn\times mn}$$

où $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est la matrice identité, et soit

$$F(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{mn},$$

Alors le problème (3.1) *et le problème du premier ordre*

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + F(t), \\ u(t_0) = (x_0, \ldots, x_{m-1}) \end{cases} \tag{3.2}$$

sont équivalents dans le sens suivant:

(a) *Si* $x : I \to \mathbb{R}^n$ *est une solution du problème* (3.1)*, alors* $u := (x, \ldots, x^{(m-1)})$ *est une solution du problème* (3.2)*.*

(b) *Si* $u : I \to \mathbb{R}^{mn}$*,* $u = (u_0, \ldots, u_{m-1})$*, est une solution du problème* (3.2)*, alors* $x := u_0$ *est une solution du problème* (3.1)*.*

Beweis. La démonstration est un exercice.

On remarque aussi que le problème linéaire (3.1) admet toujours une solution qui est définie sur tout l'intervalle I. Pour cela, on introduit une nouvelle norme sur l'espace $\mathbb{R}^{n\times n}$ des matrices.

Lemma 3.2. *Pour tout* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *on définit*

$$\|A\| := \sup_{\|x\|_2 \le 1} \|Ax\|_2.$$

Alors on a:

(a) *L'application* $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}_+$ *est une norme sur* $\mathbb{R}^{n\times n}$*.*

(b) *Pour tout* A*,* $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *on a* $\|AB\| \le \|A\|\,\|B\|$*.*

(c) *Pour tout* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *et tout* $x \in \mathbb{R}^n$ *on a* $\|Ax\| \le \|A\|\,\|x\|$*.*

Beweis. La démonstration est un exercice.

Theorem 3.3 (Existence et unicité de solutions). *Pour tout* $x_0, \ldots, x_{m-1} \in \mathbb{R}^n$ *le problème* (3.1) *admet une unique solution* $x : I \to \mathbb{R}^n$*.*

Beweis. En fait, par le Lemme 3.1 il suffit de résoudre le problème linéaire du premier ordre (3.2). Pour ce problème, on suppose que $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, pour simplifier un peu la notation.

On suppose d'abord que $I = \mathbb{R}$ et que $\sup_{t\in\mathbb{R}} \|A(t)\| =: L < \infty$. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\|A(t)x_1 - A(t)x_2\| = \|A(t)(x_1 - x_2)\| \le L\,\|x_1 - x_2\|.$$

La fonction $f : \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}^n$, $f(t,x) := -A(t)x + F(t)$, est donc globalement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable. Par le théorème de Picard-Lindelöf (Théorème 2.6), le problème (3.2) admet une unique solution locale. Mais comme f est globalement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, on obtient même une unique solution maximale u par le Théorème 2.10 et la Remarque 2.11. Soit (α, β) l'intervalle d'existence. Supposons que $\beta < \infty$. Alors, $\sup_{t\in[t_0,\beta)} \|F(t)\| =: \varepsilon < \infty$ par continuité de F. En plus, par le Corollaire 2.13 et la Remarque 2.14, on obtient que $\lim_{t\to\beta} \|u(t)\| = \infty$. Par contre, pour tout $t \in [t_0, \beta)$ on a

$$\begin{aligned}
\|u(t)\| &\leq \|u(t)-u(t_0)\| + \|u(t_0)\| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} \|u'(s)\|\, ds + \|u(t_0)\| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} \|A(s)u(s)\|\, ds + \int_{t_0}^{t} \|F(s)\|\, ds + \|u(t_0)\| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} (L\|u(s)\| + \varepsilon)\, ds + \|u(t_0)\|.
\end{aligned}$$

Par le lemme de Gronwall (Lemme 2.5), appliqué à la fonction $\varphi = \|u\|$, ceci implique

$$\|u(t)\| \leq \|u(t_0)\| e^{L(t-t_0)} + \frac{\varepsilon}{L}(e^{L(t-t_0)} - 1), \quad t \in [t_0, \beta),$$

ce qui contredit à l'explosion en temps fini. Donc, nécessairement on a $\beta = \infty$, et d'une manière similaire on montre que $\alpha = -\infty$. On a donc démontré existence et unicité d'une solution globale sous la condition que $I = \mathbb{R}$ et que $\sup_{t\in\mathbb{R}} \|A(t)\| < \infty$.

Dans le cas général, on choisit un intervalle $I_0 \subseteq I$ tel que I_0 est compact, et on considère la fonction $A(t)$ sur I_0, prolongée d'une manière constante et continue en déhors de I_0. Alors on se ramène au cas considéré ci-dessous et on trouve une unique solution sur l'intervalle I_0. Comme I_0 est arbitraire, ceci démontre le lemme.

Korollar 3.4 (Espace des solutions). *Soit $\mathscr{L} \subseteq C(I;\mathbb{R}^n)$ l'ensemble de toutes les solutions de l'équation différentielle*

$$x^{(m)}(t) + A_{m-1}(t)x^{(m-1)}(t) + \ldots + A_0(t)x(t) = 0, \quad t \in I.$$

Alors $\mathscr{L}$ est un sous-espace vectoriel de $C(I;\mathbb{R}^n)$, de dimension nm.

Beweis. Le fait que $\mathscr{L}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $C(I;\mathbb{R}^n)$ est une conséquence immédiate de la linéarité des $A_j(t)$. Soit $t_0 \in I$ arbitraire. Alors l'application

$$\begin{aligned}
\mathscr{L} &\to \mathbb{R}^{nm}, \\
x &\mapsto (x(t_0), \ldots, x^{m-1}(t_0))
\end{aligned}$$

est linéaire, injectif (par l'unicité des solutions) et surjectif (par l'existence de solutions).

3.1 L'équation différentielle du premier ordre. La fonction exponentielle

Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice. Dans la suite on va identifier toute matrice dans $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ avec une application linéaire sur $\mathbb{R}^n$.

On considère l'équation différentielle linéaire, non-homogène, du premier ordre, à coefficients constants:

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + f(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{3.3}$$

où en plus $f : I \to \mathbb{R}^n$ est une fonction continue sur l'intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$t, $t_0 \in I$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Si $n = 1$, alors on a déjà résolu le problème (3.3) en donnant même une formule explicite de la solution (voir Proposition 1.7). On veut montrer dans la suite que cette formule reste vraie dans le cas $n \geq 2$ si on définit bien l'exponentielle d'une matrice.

Proposition 3.5 (Fonction exponentielle). *Pour toute matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la série*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

est absolument convergente, et donc convergente vers une matrice notée e^A ou $\exp(A)$. *La fonction* $\exp : A \mapsto \exp(A)$ *est appelée* fonction exponentielle.

Beweis. Le Lemme 3.2 implique que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|\frac{A^k}{k!}\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} \leq e^{\|A\|} < \infty.$$

Alors la série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ est absolument convergente. L'espace $\mathbb{R}^{n\times n}$ des matrices étant complet (c.à.d. toute suite de Cauchy converge), on en déduit que la série converge dans $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Proposition 3.6 (Propriétés de la fonction exponentielle). *Les assertions suivantes sont vraies:*

(a) *La fonction exponentielle* exp *est continue (et même de classe C^∞).*

(b) *Pour tout A, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tel que $AB = BA$ on a*

$$e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A.$$

(c) *Pour tout $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la fonction $t \mapsto e^{tA}$ est de classe C^1 (même de classe C^∞) et*

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = Ae^{tA} = e^{tA}A.$$

Beweis. (a) Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Alors pour $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ on a

$$\begin{aligned}
\|e^{A+H} - e^{A}\| &= \| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A+H)^k}{k!} - \frac{A^k}{k!} \| \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} \|A\|^{k-j} \|H\|^j \\
&\to 0 \quad H \to 0.
\end{aligned}$$

Donc, exp est continue. Le fait que la fonction exponentielle est même de classe C^∞ est un exercice. (b) Soient A, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tel que $AB = BA$. Alors

$$\begin{aligned}
e^{A+B} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A+B)^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A^j B^{k-j} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=j}^{\infty} \frac{1}{j!(k-j)!} A^j B^{k-j} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!} \\
&= e^A e^B.
\end{aligned}$$

Cette égalité et l'égalité $e^{A+B} = e^{B+A}$ impliquent (ii).
(c) Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, et soient t, $h \in \mathbb{R}$. Comme les matrices tA et hA commutent, on obtient avec (ii) que

$$\begin{aligned}
\frac{e^{(t+h)A} - e^{tA}}{h} &= \frac{e^{tA} e^{hA} - e^{tA}}{h} \\
&= e^{tA} \frac{e^{hA} - I}{h} \\
&= e^{tA} \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^k A^k}{k!} \\
&= e^{tA} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^{k-1} A^k}{k!} \\
&\to e^{tA} A \quad (h \to 0).
\end{aligned}$$

Le fait que $e^{tA} A = A e^{tA}$ est un simple exercice.

Proposition 3.7. *Pour tout* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *le problème* (3.3) *admet une unique solution* $x : I \to \mathbb{R}^n$. *Cette solution est donnée par*

$$x(t) = e^{(t-t_0)A} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} f(s)\, ds, \quad t \in I.$$

Beweis. Dans le Théorème 3.3 on a déjà établit l'existence et l'unicité d'une solution $x : I \to \mathbb{R}^n$ à l'aide du théorème de Picard-Lindelöf (Théorème 2.6). Il reste donc seulement à vérifier directement que la fonction x de l'énoncé *est* une solution. Ceci est un exercice pour lequel on utilise la Proposition 3.6.

La Proposition 3.7 donne une formule explicite pour la solution du problème (3.3). Afin de pouvoir l'utiliser, il faut pouvoir calculer l'exponentielle d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Pour cela, on aura besoin d'un peu d'algèbre linéaire. Dans deux cas simples, c.à.d. si A est une matrice diagonale et si A est un bloc de Jordan, on peut calculer e^{tA} directement en utilisant la définition de la fonction exponentielle. L'algèbre linéaire nous dit ensuite qu'il suffit de connaître ces deux cas parce que toute matrice A est similaire à une matrice de Jordan, c.à.d. une matrice diagonale avec sur la diagonale des blocs de Jordan.

1$^{\textbf{er}}$ **cas:** On considère d'abord le cas d'une matrice D qui est *diagonale*, c.à.d.

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

pour des valeurs propres $\lambda_i \in \mathbb{C}$. Ceci est le cas le plus simple. Les puissances D^k sont diagonales aussi, $D^k = \mathrm{diag}\,(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k)$, et donc

$$e^{tD} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k D^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{diag}\,(\frac{t^k \lambda_1^k}{k!}, \ldots, \frac{t^k \lambda_n^k}{k!}) = \mathrm{diag}\,(e^{t\lambda_1}, \ldots, e^{t\lambda_n^k}).$$

2$^{\textbf{ème}}$ **cas:** On considère ensuite le cas d'une matrice A qui est *diagonalisable*, c.à.d. il existe une matrice diagonale $D = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ ($\lambda_i \in \mathbb{C}$) et une matrice inversible $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tel que $A = S^{-1}DS$. Dans ce cas on a

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k (S^{-1}DS)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k S^{-1} D^k S}{k!} = S^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k D^k}{k!} S = S^{-1} e^{tD} S.$$

La matric e^{tD} aètè calculée dans le premier cas. Toujours, la diagonale de D contient les valeurs propres de A.

3$^{\textbf{ème}}$ **cas:** Plus généralement, si

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k \end{pmatrix}$$

pour des matrices $J_1, \ldots, J_k$, alors

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{tJ_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{tJ_k} \end{pmatrix}.$$

et si $A = S^{-1}JS$ pour une matrice J comme ci-dessus et une matrice inversible S, alors

$$e^{tA} = S^{-1}e^{tJ}S.$$

4$^{\text{ème}}$ **cas:** On considère le cas d'un bloc de Jordan[1] J_λ ($\lambda \in \mathbb{C}$), c.à.d. une matrice de la forme

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

Une telle matrice n'a qu'une valeur propre (qui est λ). En utilisant la définition de la fonction exponentielle on montre que

$$e^{tJ_\lambda} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & te^{t\lambda} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{t\lambda} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & te^{t\lambda} \\ & & & e^{t\lambda} \end{pmatrix}.$$

5$^{\text{ème}}$ **cas:** Le cas d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ arbitraire est réduit aux cas 3 et 4. En fait, pour toute matrice A il existe une matrice de Jordan

$$J = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{\lambda_k} \end{pmatrix}$$

où les J_{λ_i} sont des blocs de Jordan, λ_i les valeurs propres de A, et il existe une matrice S inversible tel que $A = S^{-1}JS$. Dans ce cas on a donc

$$e^{tA} = S^{-1} \begin{pmatrix} e^{tJ_{\lambda_1}} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{tJ_{\lambda_k}} \end{pmatrix} S,$$

[1] Camille Jordan (5.1.1838-22.1.1922)

et on utilise le 4$^{\text{ème}}$ cas pour calculer $e^{tJ_{\lambda_i}}$.

3.2 L'équation différentielle d'ordre m à coefficients constants

On considère l'équation différentielle d'ordre m à coefficients constants:

$$x^{(m)}(t) + a_{m-1}x^{(m-1)}(t) + \cdots + a_0 x(t) = 0. \tag{3.4}$$

On suppose que $a_j \in \mathbb{R}$ $(0 \leq j \leq m-1)$.

D'après le Lemme 3.1, cette équation d'ordre m est équivalent à l'équation différentielle du premier ordre

$$u'(t) = Au(t)$$

où

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 \\ -a_0 & \cdots & & -a_{m-2} & -a_{m-1} \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

On peut donc essayer de résoudre cette équation du premier ordre (en calculant l'exponentielle e^{tA}) et puis d'en déduire les solutions de (3.4). On verra dans cette section qu'il suffit de faire ça une fois dans le cadre abstrait et on va trouver un autre moyen plus direct pour trouver les solutions de (3.4).

On calcul d'abord le spectre de la matrice A.

Lemma 3.8 (Polynome caractéristique). *Soit p le polynome caractéristique de la matrice A. Alors*

$$p(\lambda) = (\lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + a_0), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Beweis. On démontre le lemme par récurrence.

Si $m = 1$, alors l'assertion est vraie; la matrice A est dans ce cas égale à $-a_0$.

Supposons que l'assertion est vraie pour toutes les matrices de dimension $m \times m$ étant de la forme (3.5). Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ on a

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(\lambda I - A) \\ &= \begin{vmatrix} \lambda & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & -1 \\ a_0 & \cdots & a_{m-1} & \lambda + a_m \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

On développe la déterminante par rapport à la première colonne. On obtient

$$p(\lambda) = \lambda \cdot \begin{vmatrix} \lambda & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & -1 \\ a_1 & \cdots & a_{m-1} & \lambda + a_m \end{vmatrix} + (-1)^m a_0 \begin{vmatrix} -1 & & & \\ \lambda & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & -1 \end{vmatrix}.$$

Les deux déterminantes sont des déterminantes de matrices de dimension m. Comme l'assertion est vraie dans ce cas, on obtient

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda(\lambda^m + a_m\lambda^{m-1} + \cdots + a_1) + a_0 \\ &= (\lambda^{m+1} + a_m\lambda^m + \cdots + a_1\lambda + a_0). \end{aligned}$$

Proposition 3.9 (Solutions complexes de (3.4)**).** *Soit p le polynome caractéristique de la matrice A. Soient $\lambda_j \in \mathbb{C}$ ($1 \le j \le k$) les racines complexes de p et soient $m(\lambda_j)$ leurs multiplicités, c.à.d.*

$$p(\lambda) = \prod_{j=1}^{k} (\lambda - \lambda_j)^{m(\lambda_j)}.$$

Alors les fonctions

$$t^l e^{\lambda_j t} \quad 1 \le j \le k, 0 \le l \le m(\lambda_j) - 1,$$

sont m solutions (complexes) linéairement indéndentes du problème (3.4). *Toute solution de* (3.4) *est combinaison linéaire de ces solutions élémentaires.*

Beweis. On vérifie que les fonctions de l'énoncé sont vraiement des solutions de (3.4). En plus, on voit facilement que ces fonctions sont linéairement indépendentes.

D'autre part, d'après la Proposition 3.4, l'espace de toutes les solutions de (3.4) est un sous-espace de $C(\mathbb{R})$ de dimension m. Ainsi, les fonctions de l'énoncé forment une base vectorielle de ce sous-espace et toute solution est donc combinaison linéaire des solutions élémentaires.

Korollar 3.10 (Solutions réelles de (3.4)**).** *Soit p le polynome caractéristique de la matrice A. Soient $\lambda_j \in \mathbb{C}$ ($1 \le j \le k_1$) les racines réelles de p, et soient $\mu_j = \alpha_j + i\beta_j$ et $\overline{\mu_j} = \alpha_j - i\beta_j$ ($1 \le j \le k_2$) les racines purement complexes de p (on remarquera que comme la matrice A est réelle, si μ est valeur propre de A, alors $\bar{\mu}$ l'est aussi). Soient $m(\lambda_j)$ resp. $m(\mu_j)$ les multiplicités de ces racines, c.à.d.*

$$p(\lambda) = \prod_{j=1}^{k_1} (\lambda - \lambda_j)^{m(\lambda_j)} \prod_{j=1}^{k_2} ((\lambda - \alpha_j)^2 + \beta_j^2)^{m(\mu_j)}.$$

Alors les fonctions

$$t^l e^{\lambda_j t} \quad 1 \le j \le k_1, 0 \le l \le m(\lambda_j) - 1,$$

et

$$t^l\, e^{\alpha_j t}\, \sin(\beta_j t) \textit{ und } t^l\, e^{\alpha_j t}\, \cos(\beta_j t) \quad 1 \le j \le k_2, 0 \le l \le m(\mu_j)-1,$$

sont m solutions (réelles) linéairement indéndentes du problème (3.4). *Toute solution de* (3.4) *est combinaison linéaire de ces solutions élémentaires.*

Beweis. Dans la Proposition 3.9 on a déjà vu m solutions linéairement indépendentes. Si, dans la Proposition 3.9, λ_j est une racine réelle, alors les solutions correspondantes sont déjà réelles. Elles se retrouvent dans l'énoncé.

Si, par contre $\lambda_j = \mu_j = \alpha_j + i\beta_j$ est une racine purement complexe de p ($\beta_j \neq 0$), alors $\bar{\mu}_j$ est aussi racine (avec la même multiplicité!), parce que la matrice A est une matrice réelle. En remplaçant les deux solutions $t^l\, e^{\mu_j t}$ et $t^l\, e^{\mu_j t}$ par leurs combinaisons linéaires

$$\frac{1}{2}\big(t^l\, e^{\mu_j t} + t^l\, e^{\mu_j t}\big) = t^l\, e^{\alpha_j t}\, \cos(\beta_j t)$$

et

$$\frac{1}{2i}\big(t^l\, e^{\mu_j t} - t^l\, e^{\mu_j t}\big) = t^l\, e^{\alpha_j t}\, \sin(\beta_j t)$$

on trouve finalement m solutions élémentaires à valeurs dans $\mathbb{R}$, linéairement indépendentes. Toute solution de (3.4) est combinaison linéaire de ces solutions élémentaires.

3.3 Stabilité et instabilité. Premier théorème de Liapunov

In diesem Abschnitt studieren wir das asymptotische Verhalten / Langzeitverhalten von Lösungen und Stabilität / Instabilität des Gleichgewichtspunkts 0 des linearen Gleichungssystems erster Ordnung

$$x'(t) = Ax(t), \tag{3.6}$$

wobei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Sous comportement asymptotique nous comprenons le comportement des solutions lorsque $t \to \infty$, en particulier la convergence (exponentielle ou non) vers 0, la bornitude des solutions ou l'explosion (exponentielle) en temps infini. Ces questions sont liées à la stabilité, la stabilité asymptotique, la stabilité exponentielle et l'instabilité du point d'équilibre 0 qui est le point d'équilibre canonique du système linéaire (3.6).

Dans le cas $n = 1$ la question du comportement asymptotique des solutions est très simple. Les solutions de (3.6) sont de la forme $x(t) = e^{At}x_0$. On voit donc que si $A > 0$, alors toutes solutions (sauf la solution constante 0) explosent en temps infini; en particulier, elles sont non bornées. On dira dans ce cas que le point d'équilibre 0 est *instable*. Si $A < 0$, alors toutes les solutions converges, lorsque $t \to \infty$, vers le point d'équilibre 0; on dira que le point 0 est *exponentiellement stable* ou, plus faiblement, *asymptotiquement stable*. Si $A = 0$, alors toutes les solutions sont constantes. Toutes les solutions avec donnée initiale dans un voisinage de 0 restent dans ce voisinage; on dira que 0 est *stable*.

Dans le cas $n \geq 2$, la question du comportement asymptotique des solutions (ou de la stabilité du point 0) n'est pas aussi simple et plusieurs cas sont possibles. On verra dans ce paragraphe que le comportement asymptotique des solutions dépend du spectre de la matrice A.

Afin d'illustrer le comportement asymptotique des solutions de l'équation différentielle (3.6) on considère d'abord le cas $n = 2$.

Dans le cas $n = 2$ on peut dessiner le champs de vecteurs associé à la matrice A. Ce champs de vecteurs nous montrera les différents comportements possibles, selon la position des valeurs propres de A. Dans la suite on considère toujours le spectre de A dans le plan complexe. La matrice A a donc soit deux valeurs propres distincts, ou une valeur propre qui est racine de mulitiplicité 2 du polynome caractéristique.

1$^{\text{er}}$ **cas:** Les deux valeurs propres de A sont toutes les deux réelles, et soit elles sont toutes les deux positives, soit elles sont toutes les deux négatives. Exemples:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A_2 = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de A_1 sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$ et les vecteurs propres correspondants sont $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Toutes les solutions de l'équation différentielle (3.6) explosent exponentiellement à l'infini. On dit que le point d'équilibre 0 est *instable*.

Les valeurs propres de A_2 sont $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = -3$ et les vecteurs propres correspondants sont $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Toutes les solutions de l'équation différentielle (3.6) convergent (exponentiellement) vers 0. On dit que le point d'équilibre 0 est *asymptotiquement stable* ou ici même *exponentiellement stable*.

2$^{\text{ème}}$ **cas:** Les valeurs propres de la matrice A sont toutes les deux réelles, une est strictement positive et l'autre et strictement négative. Exemple:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice A_3 a les valeurs propres $\lambda_1 = -2$ et $\lambda_2 = 3$, et les vecteurs propres correspondants sont $x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Il y a des solutions qui convergent exponentiellement vers 0 (notamment celles avec donnée initiale dans l'espace propre engendré par x_1) et il y a des solutions qui explosent exponentiellement à l'infini (en fait, toutes les autres solutions). On dit que le point d'équilibre 0 est *hyperbolique* (voir le champs de vecteurs!). En particulier, il est instable.

3ème **cas:** Les deux valeurs propres de A sont complexes conjuguées, c.à.d. $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 = \alpha + i\beta$. Selon le cas, si $\alpha > 0$, $\alpha < 0$ ou $\alpha = 0$, le point d'équilibre 0 est instable, asymptotiquement stable ou stable. Exemples:

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de la matrice A_4 sont $\lambda_1 = i$ et $\lambda_2 = -i$. Toutes les solutions de l'équation différentielle (3.6) sont périodiques; dans ce cas le point d'équilibre 0 est *stable* dans le sens qu'il existe deux voisinages bornés U et V de 0 tels que toute solution avec donnée initiale dans U reste dans V.

Les valeurs propres de la matrice A_5 sont $\lambda_1 = -\frac{1}{2} + i\sqrt{\frac{3}{4}}$ et $\lambda_2 = -\frac{1}{2} - i\sqrt{\frac{3}{4}}$. Comme la partie réelle de λ_1 et λ_2 est négative, toutes les solutions de l'équation différentielle (3.6) convergent (exponentiellement) vers 0. Le point d'équilibre 0 est asymptotiquement stable.

4ème **cas:** La matrice A n'a qu'une valeur propre réelle, et elle n'est pas diagonalisable. Exemple:

$$A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'unique valeur propre de la matrice A_6 est $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, et A n'est pas diagonalisable. Comme la valeur propre est strictement positive, toutes les solutions de l'équation différentielle (3.6) explosent exponentiellement à l'infini. Le point d'équilibre 0 est instable.

Essentiellement, les cas considérés ci-dessus sont tous les cas possibles dans $\mathbb{R}^2$. Les exemples ci-dessus servent pour illustration comment le *spectre* $\sigma(A)$ (c.à.d. l'ensemble des valeurs propres de A) permet de caractériser le comportement asymptotique des solutions de l'équation différentielle (3.6) et ainsi la stabilité ou instabilité du point d'équilibre 0.

Notre premier théorème *caractérise* dans le cas général la stabilité asymptotique (ou exponentielle) du point d'équilibre 0.

Theorem 3.11 (Liapunov[2]). *Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) *Il existe des constantes M, $\omega > 0$, tel que pour tout $x_0 \in \mathbb{C}^n$*

$$\|e^{tA}x_0\|_2 \le M\, e^{-\omega t}\, \|x_0\|_2,$$

c.à.d. 0 *est* exponentiellement stable.

(ii) *Pour tout $x_0 \in \mathbb{C}^n$ on a*

---

[2] Aleksandr Mikhailovich Liapunov (6.6.1857-3.11.1918)

$$\lim_{t\to\infty} \|e^{tA}x_0\| = 0,$$

c.à.d. 0 *est* asymptotiquement stable.

(iii) *Si* $\sigma(A)$ *est le spectre de A, alors la* borne spectrale

$$s(A) := \sup_{\lambda\in\sigma(A)} \operatorname{Re}\lambda < 0,$$

c.à.d. toutes les valeurs propres ont partie réelle strictement négative.

Beweis. L'implication (i)⇒(ii) est triviale.

On montre l'implication (ii)⇒(iii) avec un raisonnement par contraposition, c.à.d. on montre que si $s(A) \geq 0$, alors 0 n'est pas asymptotiquement stable. En fait, si $s(A) \geq 0$, alors il existe une valeur propre $\lambda \in \sigma(A)$ telle que $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$. Soit $x_0 \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé. Alors

$$\|e^{tA}x_0\| = \| \sum_{k\geq 0} \frac{t^k A^k x_0}{k!} \| = \| \sum_{k\geq 0} \frac{t^k \lambda^k x_0}{k!} \| = \|e^{\lambda t}x_0\| = e^{\operatorname{Re}\lambda\, t} \|x_0\| \not\to 0.$$

On a donc montré que 0 n'est pas asymptotiquement stable.

(iii)⇒(i). Finalement, on suppose que $s(A) < 0$. Soit S une matrice inversible telle que $A = S^{-1}JS$ pour une matrice de Jordan $J = \operatorname{diag}(J_{\lambda_1}, \dots, J_{\lambda_k})$. Alors

$$\begin{aligned} \|e^{tA}x_0\|_2 &= \|S^{-1}e^{tJ}Sx_0\|_2 \\ &\leq \|S^{-1}\| \, \|e^{tJ}\| \, \|S\| \, \|x_0\|_2. \end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer que $\|e^{tJ}\| \leq M\, e^{-\omega t}$ pour des constantes M, $\omega > 0$ et pour tout $t \geq 0$. Mais $e^{tJ} = \operatorname{diag}(e^{tJ_{\lambda_1}}, \dots, e^{tJ_{\lambda_k}})$, et la formule explicite pour $e^{tJ_{\lambda_j}}$ (voir page 33) nous montre que pour tout $\omega \in (0, -s(A))$ il existe une constante $M \geq 0$ tel que

$$\|e^{tJ}\| \leq Me^{-\omega t}, \quad t \geq 0.$$

Ceci montre donc que (i) est une conséquence de (iii).

Beweis (Démonstration alternative pour l'implication (iii)⇒(i) du Théorème 3.11). On suppose que $s(A) < 0$ et on suppose en plus que

$$(Ax, x) \leq -\omega^2 \, \|x\|_2^2$$

pour un $\omega > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$ (ici $(\cdot,\cdot)$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$). Cette condition en plus est en particulier satisfait si A est une matrice symétrique négative.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$, et soit $x(t) := e^{tA}x_0$. Alors pour tout $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|x(t)\|^2 &= 2(x'(t), x(t)) \\ &= 2(Ax(t), x(t)) \\ &\leq -2\omega \, \|x(t)\|_2^2. \end{aligned}$$

Cette inégalité implique

$$\|x(t)\|_2 \le e^{-\omega t}\,\|x_0\|_2, \quad t \ge 0,$$

ce qui est l'assertion (i).

La démonstration du théorème suivant est un exercice (utiliser de nouveau les formules explicites pour e^{tA}).

Theorem 3.12. *Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tel que (au moins) une valeur propre a partie réelle strictement positive, c.à.d $s(A) > 0$. Alors le point* 0 *est* instable *dans le sens qu'il existe des solutions non-bornées.*

3.4 Développement en séries entières

Dans ce dernier paragraphe sur les équations linéaires on considère l'équation linéaire non-autonome d'ordre m

$$x^{(m)}(t) + a_{m-1}(t)x^{(m-1)}(t) + \cdots + a_0(t)x(t) = 0. \tag{3.7}$$

On suppose que les coefficients a_j sont continue sur l'intervalle $(-r,r)$, et on suppose même que toute fonction a_j admet en 0 en développement illimité en série entiere avec rayon de convergence $\ge r$, c.à.d.

$$a_j(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{kj} t^k, \quad t \in (-r,r).$$

Dans ce cas, on a la proposition suivante.

Proposition 3.13. *Soit x une solution de l'équation différentielle* (3.7). *Alors*

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k t^k, \quad t \in (-r,r),$$

la série étant absolument convergente.

On ne va pas démontrer cette proposition mais plutôt l'illustrer dans l'exemple suivant.

Beispiel 3.14 (Equation d'Airy). On considère *l'équation différentielle d'Airy*[3]

$$x''(t) - tx(t) = 0. \tag{3.8}$$

On suppose que la solution de cette équation différentielle admet un développement illimité de la forme

[3] George Biddell Airy (27.7.1801-2.1.1892)

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k t^k,$$

la série étant absolument convergente pour $|t| < r$.

En remplaçant la solution x dans (3.8) par cette série entière on obtient

$$\sum_{k=2}^{\infty} \eta_k k(k-1)t^k - \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k t^{k+1} = 0,$$

ou

$$2\eta_2 + \sum_{k=1}^{\infty} (\eta_{k+2}(k+2)(k+1) - \eta_{k-1})\, t^k = 0.$$

Le théorème d'unicité pour les séries entières dit que tous les coefficients dans cette série sont nécessairement 0. En particulier,

$$\eta_2 = 0.$$

Sinon, le coefficients η_0 et η_1 peuvent être choisis arbitrairement. Si η_0 et η_1 sont fixes, alors pour tout $k \geq 1$

$$\eta_{k+2} = \frac{1}{(k+2)(k+1)} \eta_{k-1}.$$

Ceci implique que pour tout $k \geq 1$

$$\begin{aligned} \eta_{3k} &= \frac{1}{3k(3k-1)} \eta_{3k-3}, \\ \eta_{3k+1} &= \frac{1}{(3k+1)3k} \eta_{3k-2}, \\ \eta_{3k+2} &= 0. \end{aligned}$$

Les solutions x de l'équation d'Airy sont alors complètement déterminées dès qu'on connaît les conditions initiales $x(0) = \eta_0$ et $x'(0) = \eta_1$.

Kapitel 4
Stabilité

Dans ce chapitre, on va étudier la stabilité et l'instabilité des points d'équilibre de l'équation différentielle *autonome*

$$x'(t) = f(x(t)), \tag{4.1}$$

où $f : D \to \mathbb{R}^n$ est une fonction continue sur un domaine $D \subseteq \mathbb{R}^n$; la fonction f ne dépend donc pas explicitement de la variable t.

Definition 4.1. Un point $x_0 \in D$ est appelé *point d'équilibre* (ou: *point stationnaire*, *solution stationnaire*, *point critique*) de l'équation (4.1) si $f(x_0) = 0$.

Cette définition s'explique par la simple observation que si $f(x_0) = 0$ alors la fonction constante $x(t) \equiv x_0$ est solution du problème (4.1).

Dans le chapitre précèdent sur les équations différentielles linéaires on a déjà utilisé la notion de point d'équilibre. En fait, le point 0 est toujours point d'équilibre de l'équation linéaire $x'(t) = Ax(t)$, et si le noyau de A est reduit à $\{0\}$ (c.à.d. si A est inversible), alors 0 est le seul point d'équilibre pour cette équation.

Definition 4.2. Soit x_0 un point d'équilibre de l'équation (4.1).

(a) On dit que x_0 est *(positivement) stable* si pour tout voisinage $U \subseteq D$ de x_0 il existe un voisinage $V \subseteq D$ tel que toute solution x de (4.1) de donnée initiale $x(0) \in V$ existe globalement pour tout $t \geq 0$ et $x(t) \in U$ pour tout $t \geq 0$.

(b) On dit que x_0 est *asymptotiquement stable* s'il existe un voisinage $U \subseteq D$ de x_0 tel que toute solution x de (4.1) de donnée initiale $x(0) \in U$ existe globalement pour tout $t \geq 0$ et $\lim_{t\to\infty} x(t) = x_0$.

(c) On dit que x_0 est *exponentiellement stable* s'il existe un voisinage $U \subseteq D$ de x_0 et des constantes M, $\omega > 0$ tel que toute solution x de (4.1) de donnée initiale $x(0) \in U$ existe globalement pour tout $t \geq 0$ et $\|x(t) - x_0\| \leq M e^{-\omega t} \|x(0) - x_0\|$.

(d) On dit que x_0 est *(positivement) instable* si x_0 n'est pas (positivement) stable.

Dans la suite on va tout simplement dire qu'un point d'équilibre est stable s'il est positivement stable. En fait, un point d'équilibre est *négativement stable* s'il est positivement stable pour l'équation $x'(t) = -f(x(t))$, ce qui revient à un remplacement du temps t par $-t$. Dans la suite, on ne va considérer que des solutions globales définies pour tout $t \geq 0$ et on ne s'intéresse pas explicitement aux temps négatives.

Lemma 4.3. *Soit x_0 un point d'équilibre de l'équation* (4.1)*. Alors les implications suivantes sont vraies:*

$$\begin{gathered} x_0 \text{ est stable} \\ \Downarrow \\ x_0 \text{ est asymptotiquement stable} \\ \Downarrow \\ x_0 \text{ est exponentiellement stable .} \end{gathered}$$

On rappelle du premier théorème de Liapunov (Téorème 3.11) que dans le cas linéaire, stabilité asymptotique et stabilité exponentielle sont des propriétés équivalentes. Cette équivalence n'est plus vraie dans le cas général.

Stabilité exponentielle pour l'équation linéaire $x'(t) = Ax(t)$ est caractérisée par la propriété que $s(A) < 0$, $s(A)$ étant la borne spectrale. Si $s(A) > 0$, alors le point 0 est instable. On note ici que si $s(A) = 0$, alors on ne peut rien dire sur la stabilité ou instabilité du point d'équilibre 0.

4.1 Stabilité linéarisée. Deuxième théorème de Liapunov

Le théorème suivant est une conséquence du premier théorème de Liapunov (et du lemme de Gronwall). Il donne une condition suffisante pour qu'un point d'équilibre est exponentiellement stable.

Theorem 4.4 (Lyapunov). *Soit $x_0 \in D$ un point d'équilibre de l'équation* (4.1)*. On suppose que la fonction f est de classe C^1 dans un voisinage de x_0 et on suppose que les valeurs propres de la dérivée $f'(x_0) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ont toutes une partie réelle strictement négative.*

Alors x_0 est exponentiellement stable.

Beweis. En remplaçant la fonction f par la fonction translatée $f(\cdot - x_0)$ et en remplaçant la solution x par $x - x_0$ nous pouvons sans perte de généralité supposer que $x_0 = 0$.

Soit $A := f'(0) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Par définition de la dérivée (ou par le théorème de Taylor)

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + r(x) \\ &= Ax + r(x), \quad x \in D, \end{aligned}$$

où le reste r est sous-linéaire dans le sens que $\lim_{\|x\|_2 \to 0} \frac{\|r(x)\|}{\|x\|_2} = 0$. L'équation (4.1) devient donc l'équation différentielle

$$x'(t) = Ax(t) + r(x(t)).$$

Par l'hypothèse sur A et par le premier théorème de Liapunov (Théorème 3.11) le point 0 est un point d'équilibre exponentiellement stable pour l'équation linéaire $x'(t) = Ax(t)$, c.à.d. il existe des constantes M, $\omega > 0$ tels que pour tout $x_1 \in \mathbb{R}^n$

$$\|e^{tA}x_1\|_2 \leq Me^{-\omega t}\|x_1\|_2, \quad t \geq 0.$$

On choisit $\delta > 0$ tel que $\|r(x)\|_2 \leq \frac{\omega}{2M}\|x\|_2$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_2 \leq \delta$. Un tel δ existe par la sous-linéarité de la fonction r.

Soit $x_1 \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x_1\|_2 \leq \frac{\delta}{2M}$ et soit $x : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ une solution locale de l'équation (4.1) pour la donnée initiale $x(0) = x_1$. On choisit l'intervalle $[0,T]$ tel que $\|x(t)\| \leq \delta$ pour tout $t \in [0,T]$.

Le Théorème 3.7 implique que

$$x(t) = e^{tA}x_1 + \int_0^t e^{(t-s)A} r(x(s))\, ds, \quad t \in [0,T].$$

Ainsi, par l'inégalité du triangle

$$\|x(t)\|_2 \leq Me^{-\omega t}\|x_1\|_2 + \int_0^t Me^{-\omega(t-s)} \frac{\omega}{2M}\|x(s)\|_2\, ds$$

ou

$$e^{\omega t}\|x(t)\|_2 \leq M\|x_1\|_2 + \int_0^t \frac{\omega}{2} e^{\omega s}\|x(s)\|_2\, ds.$$

Le lemme de Gronwall (Lemme 2.5) implique que

$$e^{\omega t}\|x(t)\|_2 \leq Me^{\frac{\omega}{2}t}\|x_1\|_2, \quad t \in [0,T].$$

Par le choix de x_1, cette inégalité implique premièrement $\|x(t)\| \leq \frac{\delta}{2}$ pour tout $t \in [0,T]$ et donc la solution x ne peut pas quitter la boule $B(0,\delta)$. Ceci implique deuxièmement que la solution maximale associée est une solution globale (elle existe pour tout $t \geq 0$). Finalement, l'estimation ci-dessus implique alors que $\|x(t)\| \leq Me^{-\frac{\omega}{2}}\|x_1\|$ pour tout $t \geq 0$, et comme ceci est vrai pour tout x_1 dans un petit voisinage de 0, le point 0 est exponentiellement stable.

On peut aussi démontrer le théorème suivant qui correspond au Théorème 3.12 dans le cas linéaire.

Theorem 4.5. *Soit $x_0 \in D$ un point d'équilibre de l'équation* (4.1)*. On suppose que la fonction f est de classe C^1 dans un voisinage de x_0 et on suppose que la dérivée $f'(x_0) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a (au moins) une valeur propre avec partie réelle strictement positive.*

Alors x_0 est instable.

On note ici que comme dans le cas linéaire, si toutes les valeurs propres de $f'(x_0)$ ont partie réelle strictement négative ou nulle (!), alors on ne peut rien dire sur la stabilité ou instabilité du point d'équilibre x_0.

4.2 Fonctions de Liapunov

On considère toujours l'équation différentielle autonome (4.1) où $f : D \to \mathbb{R}^n$ est maintenant une fonction de classe C^1 (pour simplicité) sur un ouvert $D \subseteq \mathbb{R}^n$.

Definition 4.6 (Fonction de Liapunov).

(a) Une fonction $V : D \to \mathbb{R}$ s'appelle *fonction de Liapunov (au sens large)* pour l'équation (4.1) si V est de classe C^1 et

$$\dot V(x) := \langle V'(x), f(x)\rangle \leq 0 \quad \text{pour tout } x \in D.$$

(b) Une fonction $V : D \to \mathbb{R}$ s'appelle *fonction de Liapunov stricte* pour l'équation (4.1) si V est fonction de Liapunov au sens large et si pour tout $x \in D$ on a

$$\dot V(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = 0.$$

Une fonction de Liapunov est caractérisée par la propriété importante suivante.

Lemma 4.7. (a) *Une fonction $V : D \to \mathbb{R}$ de classe C^1 est fonction de Liapunov au sens large pour l'équation* (4.1) *si et seulement si pour toute solution x de* (4.1) *la composée $V(x)$ est décroissante.*

(b) *Si $V : D \to \mathbb{R}$ est une fonction de Liapunov au sens stricte pour l'équation* (4.1) *alors si la composée $V(x)$ est constante pour une solution x de* (4.1)*, alors la solution x est constante.*

Beweis. (a) Soit x une solution de (4.1). Alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x(t)) &= \langle V'(x(t)), x'(t)\rangle \\ &= \langle V'(x(t)), f(x(t))\rangle \\ &= \dot V(x(t)) \leq 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Donc, $V(x)$ est décroissante.

L'inverse se démontre de la même façon, en utilisant (4.2).

(b) Soit V une fonction de Liapunov stricte. Alors elle est fonction de Liapunov, et si pour une solution x de (4.1) la composée $V(x)$ est constante, alors, d'après (4.2), $\dot V(x(t)) = 0$ pour tout t. Ceci implique que $f(x(t)) = 0$ pour tout t, et puis $x'(t) = 0$. Donc, x est constante.

Beispiele 4.8. (a) SYSTÈMES GRADIENTS: Soit $F : D \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur l'ouvert $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Alors $V = F$ est fonction de Liapunov stricte pour le *système gradient*

$$x'(t) + \nabla F(x(t)) = 0,$$

où ∇F est le gradient de F. En effet, si $x : I \to \mathbb{R}^n$ est solution de cette équation différentielle, alors

$$\begin{aligned}\dot{F}(x(t)) &= \frac{d}{dt}F(x(t)) \\ &= \langle \nabla F(x(t)), x'(t)\rangle \\ &= -\|x(t)\|_2^2 \quad \leq \quad 0,\end{aligned}$$

c.à.d. la fonction $t \mapsto F(x(t))$ est décroissante, et elle est constante si et seulement si x est constante.

(b) SYSTÈMES HAMILTONIENS: Soit $H : D \to \mathbb{R}$, $H = H(x,p)$ une fonction de classe C^2 sur l'ouvert $D \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Alors H est fonction de Liapunov pour le *système hamiltonien*

$$\begin{aligned}x'(t) &= \nabla_p H(x(t), p(t)), \\ p'(t) &= -\nabla_x H(x(t), p(t)).\end{aligned}$$

En effet, si $(x,p) : I \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ est solution de cette équation différentielle, alors

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}H(x(t),p(t)) &= \big\langle \nabla H(x(t),p(t)), (x'(t),p'(t))\big\rangle_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \\ &= \big\langle \nabla_x H(x(t),p(t)), x'(t)\big\rangle_{\mathbb{R}^n} + \big\langle \nabla_p H(x(t),p(t)), p'(t)\big\rangle_{\mathbb{R}^n} \\ &= -\langle p'(t), x'(t)\rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle x'(t), p'(t)\rangle_{\mathbb{R}^n} \\ &= 0,\end{aligned}$$

c.à.d. la fonction $t \mapsto H(x(t),p(t))$ est constante.

(c) PENDULE MATHÉMATIQUE: Pour $\alpha \geq 0$ on considère l'équation différentielle du pendule mathématique

$$x''(t) + \alpha x'(t) + x(t) = 0.$$

Cette équation différentielle est équivalente au problème

$$u'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\alpha \end{pmatrix} u(t).$$

La fonction $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$V(u_0,u_1) := \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u_1\|_2^2$$

est fonction de Liapunov pour ce système. En effet, si $x : I \to \mathbb{R}$ est solution de l'équation du pendule mathématique, alors

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V(x(t),x'(t)) &= \langle x(t), x'(t)\rangle + \langle x'(t), x''(t)\rangle \\ &= -\alpha\|x'(t)\|_2^2 \leq 0.\end{aligned}$$

(d) SYSTÈME GRADIENT DU SECOND ORDRE: Soit F comme dans l'exemple (a) et soit $\alpha \geq 0$. On considère l'équation différentielle

$$x''(t) + \alpha x'(t) + \nabla F(x(t)) = 0.$$

Si $x : I \to \mathbb{R}^n$ est solution de ce problème, alors

$$\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}\|x'(t)\|_2^2 + F(x(t))) = -\alpha\|x'(t)\|_2^2 \leq 0,$$

c.à.d. la fonction $V(u_0,u_1) := \frac{1}{2}\|u_1\|_2^2 + F(u_1)$ est une fonction de Liapunov.

Definition 4.9 (Ensemble ω-limite). Soit $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ une solution globale, bornée (c.à.d. $\sup \|x(t)\| < \infty$) de l'équation différentielle (4.1). On appelle

$$\omega(x) := \{z \in D : \exists (t_j) \nearrow \infty \text{ t.q. } x(t_j) \to z \, (j \to \infty)\}$$

l'ensemble ω-limite de x.

L'ensemble ω-limite est l'ensemble des points d'accumulation de la solution x, lorsque $t \to \infty$. Une autre description de $\omega(x)$ est donnée dans le lemme suivant.

Lemma 4.10. *Soit $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ une solution globale, bornée. Alors*

$$\omega(x) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\{x(s) : s \geq t\}}.$$

Beweis. Soit $z \in \omega(x)$. Alors, par définition, il existe une suite $(t_j) \nearrow \infty$ tel que $\lim_{j\to\infty} x(t_j) = z$. Comme la suite (t_j) est non-bornée, $z \in \overline{\{x(s) : s \geq t\}}$ quelque soit $t \geq 0$. Donc, $z \in \bigcap_{t\geq 0} \overline{\{x(s) : s \geq t\}}$.

Inversement, soit $z \in \bigcap_{t\geq 0} \overline{\{x(s) : s \geq t\}}$. Alors $z \in \overline{\{x(s) : s \geq t\}}$ quelque soit $t \geq 0$. Ceci implique que pour tout $j \in \mathbb{N}$ il existe $t_j \geq j$ tel que $\|x(t_j) - z\| \leq 1/j$. Pour la suite $(t_j) \nearrow \infty$ ainsi obtenu on a $\lim_{j\to\infty} x(t_j) = z$. Donc, $z \in \omega(x)$.

Lemma 4.11. *Soit $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ une solution globale, bornée. Alors:*

(a) *L'ensemble ω-limite $\omega(x)$ est non-vide, compact et connexe.*

(b) *Si $z_0 \in \omega(x)$ et si z est la solution maximale de* (4.1) *pour la donnée initiale $z(0) = z_0$, alors z est solution globale, bornée et $z(t) \in \omega(x)$, c.à.d. $\omega(x)$ est* invariant *par l'équation différentielle.*

(c) *On a* $\lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}(x(t), \omega(x)) = 0$.

(d) *On a $\omega(x) = \{z\}$ (c.à.d. l'ensemble ω-limite est reduit à un point) si et seulement si* $\lim_{t\to\infty} x(t) = z$.

Beweis. (a) Comme la solution x est bornée, les ensembles

$$\overline{\{x(s) : s \geq t\}}$$

sont non-vides, compacts, connexes (cette propriété vient de la continuité de x), et décroissant en t. C'est un exercice de démontrer qu'alors $\omega(x)$ est aussi non-vide, compact et connexe.

(b) Soit $z_0 \in \omega(x)$, et soit z la solution maximale de (4.1) pour cette donnée initiale. Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Par définition, il existe une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \nearrow \infty$, telle que

$$\lim_{n\to\infty} x(t_n) = z_0.$$

Par la sensibilité par rapport aux données initiales, et comme x est bornée, on obtient alors

$$\lim_{n\to\infty} x(t+t_n) = z(t).$$

En particulier, z est solution globale et bornée. En plus, par la définition de $\omega(x)$, $z(t) \in \omega(x)$.

(c) Par le théorème de Bolzano, pour toute suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \nearrow \infty$ il existe une sous-suite $(t_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\lim_{k\to\infty} x(t_{n_k}) = z \in \omega(x).$$

En particulier, pour cette sous-suite,

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{dist} x(t_{n_k}), \omega(x)) = 0.$$

Comme (t_n) était arbitraire, on obtient l'assertion.

L'assertion (d) est une conséquence directe de (c) et de la définition de $\omega(x)$.

Theorem 4.12 (Principe d'invariance de La Salle[1]). *Soit V une fonction de Liapunov pour l'équation différentielle* (4.1)*, et soit $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ une solution globale, bornée (c.à.d.* $\sup \|x(t)\| < \infty$*) de cette équation différentielle telle que* $\overline{\{x(t) : t \geq 0\}} \subseteq D$*. Alors:*

(a) *La limite* $\lim_{t\to\infty} V(x(t)) =: V_\infty$ *existe.*

(b) *La fonction V est constante $= V_\infty$ sur $\omega(x)$.*

(c) *Si V est fonction de Liapunov stricte, alors tout élément $z \in \omega(x)$ est point d'équilibre.*

Beweis. (a) L'image $\{x(t) : t \geq 0\}$ de la solution est bornée par hypothèse. Son adhérence est donc compact, et par hypothèse inclus dans D. Comme V est continue sur D, la fonction $t \mapsto V(x(t))$ est bornée. Mais comme V est fonction de Liapunov, cette fonction est aussi décroissante. Donc, $\lim_{t\to\infty} V(x(t))$ existe.

(b) Soit $z \in \omega(x_0)$ arbitraire. Alors il existe $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \nearrow \infty$ tel que $\lim_{n\to\infty} x(t_n) = z$. La continuité de V implique

$$V(z) = \lim_{n\to\infty} V(x(t_n)) = V_\infty.$$

[1] La Salle ()

(c) On suppose en plus que V est fonction de Liapunov stricte. Si z est solution de l'équation différentielle (4.1) telle que $z(0) \in \omega(x)$, alors la fonction $t \to V(z(t))$ est constante d'après (ii) et le lemme 4.11. Par la caractérisation d'une fonction de Liapunov stricte, la solution z est ainsi constante et donc $z(0) \in \omega(x)$ est point d'équilibre.

Dans la suite, on suppose que $f : D \to \mathbb{R}^n$ est définie dans un voisinage de 0 et que 0 est point d'équilibre. En fait, on peut toujours se ramener à cette situation.

Afin d'appliquer le principe d'invariance de La Salle à l'étude de la stabilité (asymptotique) du point d'équilibre 0, on fait la définition suivante.

Definition 4.13. On dit qu'une fonction $V : D \to \mathbb{R}$ est **définie positive** (en 0) et on note $V > 0$ s'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in D$, $\|x\| \leq \delta$,

$$\begin{aligned} &V(x) \geq 0 \text{ et si} \\ &V(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0. \end{aligned}$$

On dit qu'une fonction $V : D \to \mathbb{R}$ est *définie négative* (en 0) et on note $V < 0$ si $-V$ est définie positive.

Beispiel 4.14. Les fonctions $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ et $V(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4$ sont définies positives.

Bemerkung 4.15. Si $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est telle que $\dot{V} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est définie négative ($\dot{V} < 0$), alors V est fonction de Liapunov stricte dans un voisinage de 0. Si on a seulement $\dot{V} \leq 0$ (dans un voisinage de 0), alors V est fonction de Liapunov.

Theorem 4.16. *Soit $V : D \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et définie positive.*

(a) *Si $\dot{V} \leq 0$ (c.à.d. si V est une fonction de Liapunov), alors le point* 0 *est stable.*

(b) *Si en plus $\dot{V} < 0$ (c.à.d. si V est définie négative), alors* 0 *est asymptotiquement stable.*

Beweis. (a) Par hypothèse, V est définie positive et une fonction de Liapunov au sens large. Soit δ comme dans la Définition 4.13. On suppose que δ est assez petit tel que la boule fermé $\bar{B}(0, \delta)$ est inclus dans D. Par continuité de V,

$$m := \inf\{V(x) : \|x\| = \delta\} > 0.$$

Soit $0 < c < m$. On pose

$$U_c := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq \delta \text{ et } V(x) \leq c\}.$$

Alors U_c est un voisinage compact de 0. Soit $x_1 \in U_c$ et soit x la solution maximale de (4.1) pour la donnée initiale $x(0) = x_1$. Comme V est une fonction de Liapunov, $V(x)$ est décroissante, et donc, par définition de U_c et de m, la solution maximale reste dans U_c pour tout t de l'intervalle d'existence. L'ensemble U_c étant compact, la solution x ne peut donc pas exploser en temps fini. Par conséquent, elle est globale, et comme elle reste dans U_c, elle est aussi bornée.

Pour montrer que 0 est stable, soit U un voisinage de 0. Alors, comme V est définie positive et continue, il existe $c > 0$ tel que $U_c \subseteq U$. On vient de démontrer que pour toute donnée initiale $x_1 \in U_c$, la solution maximale correspondante est globale et reste dans U_c. A fortiori, elle reste dans U. Donc, 0 est stable.

(b) Soient $\delta > 0$ et $m > 0$ comme ci-dessus. En choisissant δ assez petit, et par hypothèse, on a $\dot{V}(x) \leq 0$ pour tout $x \in \bar{B}(0,\delta)$ (c.à.d. V est fonction de Liapunov) et V est stricte dans $\bar{B}(0,\delta)$. L'hypothèse que $\dot{V}$ soit définie négative implique même que 0 est le seul point d'équilibre dans $\bar{B}(0,\delta)$.

On fixe $0 < c < m$ et on définit U_c comme ci-dessus. On a vu que pour $x_1 \in U_c$ la solution maximale de (4.1) pour la donnée initiale $x(0) = x_1$ est globale et reste dans $U_c \subseteq B(0,\delta)$. Comme V est fonction de Liapunov stricte, et par le principe d'invariance de La Salle (Théorème 4.12), tout élément de $\omega(x) \subseteq \bar{B}(0,\delta)$ est un point d'équilibre. Comme 0 est le seul point d'équilibre dans $\bar{B}(0,\delta)$, on obtient donc $\omega(x) = \{0\}$. Ceci implique que $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ (Lemme 4.11). Ainsi, le point 0 est asymptotiquement stable.

Kapitel 5
Mannigfaltigkeiten

5.1 Definition und Grundbegriffe

Wenn wir im Folgenden Teilmengen $\mathscr{M}$ des euklidischen Raums betrachten, dann betrachten wir sie immer auch versehen mit der induzierten, euklidischen Metrik. Es existieren in der Literatur mehrere Definitionen von Mannigfaltigkeiten. Für die Definition von Untermannigfaltigkeiten des euklidischen Raums ist es praktisch, das folgende Theorem als Grundlage zu nehmen.

Theorem 5.1. *Sei $\mathscr{M} \subseteq \mathbb{R}^{N+M}$ eine Menge, $a \in \mathscr{M}$ und $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) **(Lokale Parameterdarstellung I)** *Es gibt eine offene Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^{N+M}$ von a, eine offene Teilmenge $\bar{W} \subseteq \mathbb{R}^N$ und eine C^k-Funktion $\psi : \bar{W} \to V \subseteq \mathbb{R}^{N+M}$, so daß*

(a) $\psi(\bar{W}) = \mathscr{M} \cap V$,

(b) $\psi : \bar{W} \to \mathscr{M} \cap V$ *ist ein Homöomorphismus, und*

(c) $J_\psi(\psi^{-1}(a)) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N+M})$ *ist injektiv.*

(ii) **(Lokale Parameterdarstellung II)** *Es gibt eine offene Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^{N+M}$ von a, eine offene Teilmenge $W \subseteq \mathbb{R}^{N+M}$ und einen C^k-Diffeomorphismus $\Psi : W \to V$, so daß $\Psi(\{x \in W : x_{N+1} = \cdots = x_{N+M} = 0\}) = \mathscr{M} \cap V$.*

(iii) **(Lokale Darstellung über implizite Funktion)** *Es gibt eine offene Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^{N+M}$ von a und eine C^k-Funktion $F : V \to \mathbb{R}^M$, so daß*

(a) $F|_{\mathscr{M} \cap V} = 0$ *und*

(b) $J_F(a) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^{N+M}, \mathbb{R}^M)$ *ist surjektiv.*

(iv) **(Lokale Darstellung als Graph)** *Es gibt, nach Permutation der Koordinaten in $\mathbb{R}^{N+M}$ (!), eine offene Umgebung $\bar{W} \subseteq \mathbb{R}^N$ von $\bar{a}$, eine offene Umgebung $W' \subseteq \mathbb{R}^M$ von a' (hierbei ist $a = (\bar{a}, a')$), und eine C^k-Funktion $f : \bar{W} \to W'$, so daß*

$$\{(\bar{x},x') = x \in \bar{W} \times W' : x \in \mathscr{M}\} = \{(\bar{x}, f(\bar{x})) : \bar{x} \in \bar{W}\}.$$

Beweis. Die Implikation (iii)⇒(iv) ist eine direkte Konsequenz aus dem Satz über die implizite Funktion.

Aus der Aussage (iv) folgt die Aussage (i), wenn man $\psi : \bar{W} \to \mathbb{R}^{N+M}$ durch $\psi(\bar{x}) = (\bar{x}, f(\bar{x}))$ definiert.

(i)⇒(ii) Seien ψ und $\bar{W}$ wie in (i). Ergänze eine Basis $\{n_1, \ldots, n_N\}$ des Bildes von $J_\psi(\psi^{-1}(a))$, welches nach Voraussetzung ein N-dimensionaler Unterraum von $\mathbb{R}^{N+M}$ ist, mit den Vektoren $n_{N+1}, \ldots, n_{N+M} \in \mathbb{R}^{N+M}$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^{N+M}$. Definiere sodann die Funktion $\Psi : \bar{W} \times \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^{N+M}$ durch $\Psi(x) := \Psi(\bar{x},x') := \psi(\bar{x}) + \sum_{j=1}^M x_{N+j} n_{N+j}$. Die Jacobimatrix $J_\Psi(\Psi^{-1}(a))$ ist dann invertierbar! Aus dem Satz über die lokale Inverse folgt dann, daß es eine offene Umgebung $W \subseteq \mathbb{R}^{N+M}$ von $\Psi^{-1}(a) = (\psi^{-1}(a), 0, \ldots, 0)$ und eine offene Umgebung $\tilde{V}$ von a gibt, so daß $\Psi : W \to V$ ein Diffeomorphismus ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man die Umgebung $\tilde{V}$ so klein wählen, daß $\tilde{V} \subseteq V$. Nach Definition von Ψ gilt offensichtlich $\Psi(\{x \in W : x_{N+1} = \cdots = x_{N+M} = 0\}) = \mathscr{M} \cap \tilde{V}$.

(ii)⇒(iii) Definiere $F : V \to \mathbb{R}^M$ durch $F(x) := \Psi^{-1}(x)' := (\Psi^{-1}(x)_{N+j})_{1 \le j \le M}$ (die Funktion Ψ^{-1} verknüpft mit der Projektion P auf die letzten M Koordinaten). Dann ist $F(\mathscr{M} \cap V) = 0$ und $J_F(a) = P \circ J_{\Psi^{-1}}(a)$ ist surjektiv.

Eine Teilmenge $\mathscr{M} \subseteq \mathbb{R}^{N+M}$ heißt **C^k-Mannigfaltigkeit** oder genauer **C^k-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{N+M}$**, wenn in jedem Punkt $a \in \mathscr{M}$ eine der vier äquivalenten Aussagen (und damit jede Aussage) aus Theorem 5.1 gilt, wobei N, M nicht vom Punkt a abhängen sollen. Die Zahl N ist dann die **Dimension** der Mannigfaltigkeit, und M ihre **Kodimension**.

Beispiele 5.2. (a) **Kurven.** Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $\psi : I \to \mathbb{R}^{1+M}$ eine injektive C^k-Funktion (ersetze "injektiv" durch stärkere Bedingung), so daß $\psi'(t) \neq 0$ for every $t \in I$. Dann ist $\mathscr{M} = \psi(I)$ eine eindimensionale C^k-Mannigfaltigkeit (wir benutzen hier die Eigenschaft (i) aus Theorem 5.1).

(b) **Die N-Sphären.** Die **N-Sphäre**

$$S^N := \{x \in \mathbb{R}^{N+1} : \sum_{i=1}^{N+1} x_i^2 = 1\}$$

ist eine N-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit. In der Tat ist die N-Sphäre Nullstellenmenge der Funktion $F : \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \sum_{i=1}^{N+1} x_i^2 - 1$ und für alle $x \in S^N$ ist die Jacobimatrix (der Gradient) $J_F(x) = (2x_1, \ldots, 2x_{N+1})$ surjektiv (da $\neq 0$) (wir benutzen hier die Eigenschaft (iii) aus Theorem 5.1).

(c) **Zylinder.**

(d) **Die speziellen, linearen Gruppen.** Für jedes $N \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ ist die spezielle, lineare Gruppe

$$SL(N) := \{A \in \mathbb{R}^{N \times N} : \det A = 1\}$$

eine $(N^2 - 1)$-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit (und gleichzeitig eine Gruppe bezüglich der Matrixmultiplikation!). In der Tat ist die spezielle, lineare Gruppe $SL(N)$ Nullstellenmenge der Funktion $F : \mathbb{R}^{N\times N} \to \mathbb{R}$, $F(A) = \det A - 1$, und für alle $A \in SL(N)$ ist die Jacobimatrix (der Gradient) $J_F(A)$ surjektiv (da $\neq 0$; man zeige zum Beispiel $J_F(A)A \neq 0$) (wir benutzen wieder die Eigenschaft (iii) aus Theorem 5.1).

(e) **Das Möbiusband.**

(f) **Produktmannigfaltigkeiten.** Sind $\mathscr{M} \subseteq \mathbb{R}^m$ und $\mathscr{N} \subseteq \mathbb{R}^n$ zwei C^k-Mannigfaltigkeiten, dann ist das kartesische Produkt $\mathscr{M} \times \mathscr{N} \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{m+n}$ ebenfalls eine Mannigfaltigkeit, nämlich der Dimension $\dim \mathscr{M} + \dim \mathscr{N}$, wie man leicht nachprüft. Zum Beispiel ist $T_2 := S_1 \times S_1 \subseteq \mathbb{R}^4$ eine (kompakte) 2-dimensionale Mannigfaltigkeit; sie heißt **Torus**. Für jedes $0 < r < R$ ist der Torus T_2 "diffeomorph" zur Menge

$$T := \{((R + r\cos\alpha)\cos\beta, (R + r\cos\alpha)\sin\beta, r\sin\alpha) : (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\},$$

die eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ und damit leichter vorstellbar ist.

Sei $\mathscr{M} \subseteq \mathbb{R}^{N+M}$ eine N-dimensionale Mannigfaltigkeit. Seien $V \subseteq \mathbb{R}^{N+M}$, $\bar{W} \subseteq \mathbb{R}^N$ offene Mengen, und $\psi : \bar{W} \to \mathbb{R}^{N+M}$ wie in Eigenschaft (i) des Theorems 5.1. Sei $U := V \cap \mathscr{M} = \psi(\bar{W}) \subseteq \mathscr{M}$ das Bild von ψ (eine offene Teilmenge von $\mathscr{M}$), und sei $\varphi = \psi^{-1}$. Dann heißt (φ, U) **Karte** von $\mathscr{M}$. Eine Familie $((\varphi_\alpha, U_\alpha))_{\alpha\in A}$ von Karten von $\mathscr{M}$ heißt **Atlas**, wenn $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ eine Überdeckung von $\mathscr{M}$ ist, d. h. $\mathscr{M} = \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$. Jede Mannigfaltigkeit besitzt nach Theorem 5.1 einen Atlas: in der Tat gibt es nach Theorem 5.1 (i) für jedes $a \in \mathscr{M}$ eine Karte (φ_a, U_a), so daß U_a eine Umgebung von a (in $\mathscr{M}$!) ist. Wählt man für jedes $a \in \mathscr{M}$ eine solche Karte, dann ist $(U_a)_{a\in\mathscr{M}}$ eine Überdeckung von $\mathscr{M}$, und somit $((\varphi_a, U_a))_{a\in\mathscr{M}}$ ein Atlas. Ist die Mannigfaltigkeit kompakt, dann besitzt sie immer einen endlichen Atlas (d. h. die Indexmenge A kann endlich gewählt werden). Dies folgt direkt aus der Definition eines Atlas und der Kompaktheit.

Übung 5.3 *Man zeige, daß es für den Kreis S_1 einen Atlas gibt, der aus zwei Karten besteht, nicht aber einen Atlas, der nur aus einer Karte besteht.*

Sei $\mathscr{M} \subseteq \mathbb{R}^{N+M}$ eine N-dimensionale Mannigfaltigkeit. Sei $a \in \mathscr{M}$ und sei (φ, U) eine Karte mit $a \in U$. Dann heißt

$$T_a\mathscr{M} := \{a\} \times \operatorname{Rg} J_{\varphi^{-1}}(\varphi(a))$$

Tangentialraum und

$$N_a\mathscr{M} := \{a\} \times (\operatorname{Rg} J_{\varphi^{-1}}(\psi(a)))^{\perp}$$

Normalenraum an die Mannigfaltigkeit $\mathscr{M}$ im Punkt a (das orthogonale Komplement ist hier bezüglich des euklidischen Skalarprodukts zu nehmen). Des Weiteren heißt

$$T\mathscr{M} := \bigcup_{a\in\mathscr{M}} T_a\mathscr{M}$$

Tangentialbündel bzw. **Tangentialmannigfaltigkeit** und entsprechend

$$N\mathscr{M} := \bigcup_{a\in\mathscr{M}} N_a\mathscr{M}$$

Normalenbündel.

Eine stetige Funktion $f : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ zwischen zwei C^k-Mannigfaltigkeiten $\mathscr{M}$ und $\mathscr{N}$ ist **differenzierbar** (bzw. l**-mal stetig differenzierbar** oder $\in C^l$ für ein $1 \le l \le k$), wenn für jede Karte (φ, U) von $\mathscr{M}$ und jede Karte (ψ, V) von $\mathscr{N}$ die Abbildung $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ von $\varphi(f^{-1}(V) \cap U))$ nach $\psi(V)$ differenzierbar (bzw. l-mal stetig differenzierbar) ist. Mit $C^l(\mathscr{M}, \mathscr{N})$ bezeichnen wir die Menge aller l-mal stetig differenzierbaren Funktionen von $\mathscr{M}$ nach $\mathscr{N}$; wir schreiben kurz $C^l(\mathscr{M})$ anstelle von $C^l(\mathscr{M}, \mathbb{R})$.

5.2 Integration auf Mannigfaltigkeiten

Für eine Funktion $f : \mathscr{M} \to \mathbb{R}$ heißt die Menge

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in \mathscr{M} \,:\, f(x) \neq 0\}}^{\mathscr{M}}$$

Träger der Funktion.

Lemma 5.4. (a) *Die Funktion $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ gegeben durch*

$$f(x) := \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{1-\|x\|^2}\right) & \textit{falls } \|x\| < 1, \\ 0 & \textit{falls } \|x\| \geq 1, \end{cases}$$

ist beliebig oft differenzierbar und $\operatorname{supp} f = \bar{B}(0,1)$ *(abgeschlossene Einheitskugel).*

(b) *Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ eine Funktion mit kompakten Träger und $g \in R(\mathbb{R}^N)$ (Riemannintegrierbare Funktionen). Dann ist die* **Faltung** *$f * g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ gegeben durch*

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^N} f(y)g(x-y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\, dy$$

beliebig oft differenzierbar und hat kompakten Träger.

(c) *Sei $\mathscr{M}$ eine C^k-Mannigfaltigkeit, (ψ, U) eine Karte und $K \subseteq U$ kompakt. Dann gibt es eine Funktion $f \in C^k(\mathscr{M})$ mit*

$$\begin{aligned} &0 \le f \le 1, \\ &f = 1 \textit{ auf } K \textit{ und} \\ &\operatorname{supp} f \subseteq U. \end{aligned}$$

Beweis. (a) Nachrechnen.

(b)

Lemma 5.5. *Sei $\mathscr{M} \subseteq \mathbb{R}^N$ eine beliebige, nichtleere Menge, versehen mit der induzierten, euklidischen Metrik. Dann gilt:*

(a) *Die Menge*
$$\mathscr{B} := \{B(x,r) \cap \mathscr{M} \,:\, x \in \mathbb{Q}^N, r \in \mathbb{Q}_{>0}\}$$
ist eine abzählbare **topologische Basis** *von $\mathscr{M}$ in dem Sinne, daß jedes Element von $\mathscr{B}$ eine offene Teilmenge von $\mathscr{M}$ ist, und daß es für jede offene Menge $U \subseteq \mathscr{M}$ eine Teilmenge $\mathscr{B}' \subseteq \mathscr{B}$ gibt, so daß $U = \bigcup_{V \in \mathscr{B}'} V$.*

(b) *Jede offene Überdeckung von $\mathscr{M}$ besitzt eine abzählbare Teilüberdeckung.*

Bemerkung. Man sagt, daß ein metrischer Raum, der eine abzählbare, topologische Basis besitzt, das **zweite Abzählbarkeitsaxiom** erfüllt. Ein metrischer Raum, in dem jede offene Überdeckung eine abzählbare Teilüberdeckung besitzt, heißt auch **Lindelöfraum**. Der Beweis von von Lemma 5.5 (b) zeigt, daß jeder metrische Raum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, ein Lindelöfraum ist.

Beweis. (a) Die Abzählbarkeit der Menge $\mathscr{B}$ folgt aus der Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$. Es ist auch klar, daß jedes Element von $\mathscr{B}$ eine offene Teilmenge von $\mathscr{M}$ ist; man verwendet dazu im Wesentlichen, daß die Kugeln $B(x,r)$ offen in $\mathbb{R}^N$ sind. Sei nun schließlich $U \subseteq \mathscr{M}$ offen. Für jedes $x \in U$ gibt es nun ein $V_x \in \mathscr{B}$, so daß $x \in V_x$ und $V_x \subseteq U$. Sei $\mathscr{B}' := \{V_x \,:\, x \in U\}$. Dann ist $\bigcup_{V \in \mathscr{B}'} = U$.

(b) Sei $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine offene Überdeckung von $\mathscr{M}$, d. h. die Mengen U_α sind offen in $\mathscr{M}$ und $\mathscr{M} = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Sei $\mathscr{B}$ eine abzählbare topologische Basis von $\mathscr{M}$ (zum Beispiel wie in (a)). Für jedes $\alpha \in A$ gibt es dann eine (notwendigerweise abzählbare) Teilmenge $\mathscr{B}_\alpha \subseteq \mathscr{B}$, so daß $U_\alpha = \bigcup_{V \in \mathscr{B}_\alpha} V$. Sei $\mathscr{B}' := \bigcup_{\alpha \in A} \mathscr{B}_\alpha$. Dann ist auch $\mathscr{B}' \subseteq \mathscr{B}$ abzählbar, und offensichtlich ist auch $\mathscr{B}'$ eine offene Überdeckung von $\mathscr{M}$, d. h. $\mathscr{M} = \bigcup_{V \in \mathscr{B}'} V$. Für jedes $V \in \mathscr{B}'$ gibt es ein $\alpha_V \in A$ mit $V \subseteq U_{\alpha_V}$. Damit ist $(U_{\alpha_V})_{V \in \mathscr{B}'}$ eine abzählbare Teilüberdeckung von $\mathscr{M}$.

Eine Teilmenge eines metrischen Raums heißt **relativ kompakt**, wenn ihr Abschluß kompakt ist. Ein metrischer Raum, in dem jeder Punkt eine kompakte Umgebung besitzt, heißt **lokal kompakt**. Der Raum $\mathbb{R}^N$ ist lokal kompakt, weil für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}^N$ die abgeschlossene Kugel $B(x,r)$ ($r > 0$ beliebig) eine kompakte Umgebung ist.

Lemma 5.6. *Sei $\mathscr{M} \subseteq \mathbb{R}^{N+M}$ eine Mannigfaltigkeit. Dann gilt:*

(a) *Jeder Punkt $a \in \mathscr{M}$ besitzt eine* **relativ kompakte***, offene Umgebung $U \subseteq \mathscr{M}$. Insbesondere ist $\mathscr{M}$ lokal kompakt.*

(b) *Es gibt eine Folge (K_n) von kompakten Teilmengen von $\mathscr{M}$, so daß $K_n \subseteq K_{n+1}$ und $\mathscr{M} = \bigcup_n \mathring{K}_n$.*

Beweis. (a) Sei $a \in \mathscr{M}$. Sei (φ, V) eine Karte mit $a \in V$. Es gibt ein $r > 0$, so daß
$$B(\varphi(a), r) \subseteq \bar{B}(\varphi(a), r) \subseteq \varphi(V).$$

Da $\varphi : V \to \varphi(V)$ ein Homöomorphismus ist, da $\bar{B}(\varphi(a), r)$ kompakt ist, und da stetige Bilder von kompakten Mengen kompakt sind (Satz von Weierstraß), ist $U := \varphi^{-1}(B(\varphi(a), r))$ eine relativ kompakte, offene Umgebung von a.

(b) Nach (a) gibt es für jedes $a \in \mathscr{M}$ eine relativ kompakte, offene Umgebung $U_a \subseteq \mathscr{M}$. Insbesondere besitzt $\mathscr{M}$ eine Überdeckung aus relativ kompakten, offenen Teilmengen. Nach Lemma 5.5 (b) besitzt diese Überdeckung eine abzählbare Teilüberdeckung $(U_n)_n$. Setzte nun $K_n := \bigcup_{j \leq n} \bar{U}_j$. Dann ist K_n kompakt, $K_n \subseteq K_{n+1}$ und $\mathscr{M} \supseteq \bigcup_n \mathring{K}_n \supseteq \bigcup_n U_n = \mathscr{M}$.

Lemma 5.7 (Partition der Eins). *Sei $\mathscr{M} \subseteq \mathbb{R}^{N+M}$ eine N-dimensionale C^k-Mannigfaltigkeit mit einem Atlas $((\varphi_\alpha, U_\alpha))_{\alpha \in A}$. Dann gibt es eine Familie $(\pi_\alpha)_{\alpha \in A}$ in $C^k(M)$ dergestalt, daß*

(a) $0 \leq \pi_\alpha \leq 1$,

(b) $\operatorname{supp} \pi_\alpha \subseteq U_\alpha$,

(c) *für jedes $a \in \mathscr{M}$ gibt es eine offene Umgebung $V \subseteq \mathscr{M}$ von a, so daß* $\operatorname{supp} \pi_\alpha \cap V = \emptyset$ *für alle bis auf endlich viele $\alpha \in A$, d. h. die Familie $(\pi_\alpha)_{\alpha \in A}$ ist* **lokal endlich**,

(d) $\sum_\alpha \pi_\alpha = 1$.

Diese Familie $(\pi_\alpha)_{\alpha \in A}$ heißt dem Atlas untergeordnete **Partition der Eins**.

Beweis. Sei $(K_n)_{n \geq 0}$ eine Folge von kompakten Teilmengen von $\mathscr{M}$, so daß $K_n \subseteq K_{n+1}$ und $\mathscr{M} = \bigcup_n \mathring{K}_n$ (siehe Lemma 5.6 (b)). Sei $K_{-1} = \emptyset$. Setze sodann $W_n := K_n \setminus \mathring{K}_{n-1}$ ($n \geq 0$). Dann ist W_n kompakt, $W_n \cap W_m = \emptyset$ für $|n - m| \geq 2$, und $\bigcup_n W_n = \mathscr{M}$. Sei $V_n := \mathring{W}_{n-1} \cup W_n \cup \mathring{W}_{n+1}$. Dann ist V_n eine offene Menge und $W_n \subseteq V_n$.

Nachdem $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine offene Überdeckung von $\mathscr{M}$ ist, gibt es für jedes $n \geq 0$ eine endliche Teilmenge $A_n \subseteq A$, so daß $W_n \subseteq \bigcup_{\alpha \in A_n} U_\alpha$. Offensichtlich ist auch $W_n \subseteq \bigcup_{\alpha \in A_n} (U_\alpha \cap V_n)$. Nachdem W_n kompakt ist, gibt es ein $\delta > 0$, so daß die abgeschlossenen Mengen

$$(U_\alpha \cap V_n)^\delta := \{x \in U_\alpha \cap V_n : \operatorname{dist}(x, \mathscr{M} \setminus (U_\alpha \cap V_n) \geq \delta\}$$

immer noch W_n überdecken. Für jedes $\alpha \in A_n$ können wir dann nach Lemma 5.4 (c) ein $\chi_{n,i} \in C^k(M)$ wählen, so daß $0 \leq \chi_{m,i} \leq 1$, $\chi_{n,i} = 1$ auf $(U_\alpha \cap V_n)^\delta \cap W_n$ und $\operatorname{supp} \chi_{n,i} \subseteq U_\alpha \cap V_n \subseteq U_\alpha$. Insgesamt erhalten wir so eine lokal endliche Familie $(\chi_{n,i})_{n \geq 0, \alpha \in A_n}$, so daß $\chi := \sum_{\substack{n \geq 0 \\ \alpha \in A_n}} \chi_{n,i} > 0$ überall auf $\mathscr{M}$. Setze nun $\pi_\alpha = \sum_{n \geq 0} \chi_{n,i} / \chi$ ($\alpha \in A$).

Wir führen nun das Integral auf einer Mannigfaltigkeit schrittweise ein. Sei $\mathscr{M} \subseteq \mathbb{R}^{N+M}$ eine C^k-Mannigfaltigkeit, (φ, U) eine Karte und $f : \mathscr{M} \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, so daß $\operatorname{supp} f$ kompakt und eine Teilmenge von U ist. Dann definieren wir

$$\int_U f := \int_{\varphi(U)} f \circ \varphi^{-1}(x) \sqrt{\det J_{\varphi^{-1}}(x)^T J_{\varphi^{-1}}(x)}\, dx,$$

falls das Integral auf der rechten Seite existiert.

Lemma 5.8. *Die Definition des Integrals $\int_U f$ ist unabhängig von der Wahl der Karte (φ, U), d. h. wenn (ψ, V) eine weitere Karte ist und* $\operatorname{supp} f \subseteq V$*, dann ist*

$$\int_{\varphi(U)} f \circ \varphi^{-1}(x) \sqrt{\det J_{\varphi^{-1}}(x)^T J_{\varphi^{-1}}(x)}\, dx = \int_{\psi(V)} f \circ \psi^{-1}(x) \sqrt{\det J_{\psi^{-1}}(x)^T J_{\psi^{-1}}(x)}\, dx.$$

Beweis. Nach dem Transformationssatz ist

$$\begin{aligned}
&\int_{\varphi(U)} f \circ \varphi^{-1}(x) \sqrt{\det J_{\varphi^{-1}}(x)^T J_{\varphi^{-1}}(x)}\, dx = \\
&= \int_{\psi(V)} f \circ \psi^{-1}(y) \sqrt{\det J_{\varphi^{-1}}(x)^T J_{\varphi^{-1}}(x)}\, |\det J_{\varphi \circ \psi^{-1}}(y)|\, dy \\
&= \int_{\psi(V)} f \circ \psi^{-1}(y) \sqrt{\det J_{\varphi \circ \psi^{-1}}(y)^t J_{\varphi^{-1}}(x)^T J_{\varphi^{-1}}(x) J_{\varphi \circ \psi^{-1}}(y)}\, dy
\end{aligned}$$

und

$$J_{\varphi^{-1}}(x) J_{\varphi \circ \psi^{-1}}(y) = J_{\psi^{-1}}(y),$$

wie man leicht sieht, wenn man die Parametrisierungen φ^{-1} und ψ^{-1} lokal zu Diffeomorphismen Φ^{-1} und Ψ^{-1} auf Teilmengen von $\mathbb{R}^{N+M}$ fortsetzt.

Sei nun $f : \mathscr{M} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so daß $\operatorname{supp} f$ kompakt ist. Dann definieren wir

$$\int_{\mathscr{M}} f := \sum_{\alpha \in A} \int_{U_\alpha} f \pi_\alpha,$$

wobei $((\varphi_\alpha, U_\alpha))_{\alpha \in A}$ ein Atlas von $\mathscr{M}$ und $(\pi_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine untergeordnete Partition der Eins ist. Man beachte, daß aufgrund der lokalen Endlichkeit der Partition der Eins im Allgemeinen nur abzählbar viele der Integrale $\int_{U_\alpha} f$ ungleich Null sind, und weil f kompakten Träger hat, sind in der Tat nur endlich viele dieser Integrale ungleich Null. Somit ist die Summe auf der rechten Seite wohldefiniert. Ist $((\psi_\beta, V_\beta))_{\beta \in B}$ ein weiterer Atlas und $(\sigma_\beta)_{\beta \in B}$ eine diesem Atlas untergeordnete Partition der Eins, dann gilt

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\in A}\int_{U_\alpha} f\,\pi_\alpha &= \sum_{\alpha\in A}\sum_{\beta\in B}\int_{U_\alpha} f\,\pi_\alpha\,\sigma_\beta\\ &= \sum_{\alpha\in A}\sum_{\beta\in B}\int_{U_\alpha\cap V_\beta} f\,\pi_\alpha\,\sigma_\beta\\ &= \sum_{\beta\in B}\sum_{\alpha\in A}\int_{U_\alpha\cap V_\beta} f\,\pi_\alpha\,\sigma_\beta\\ &= \sum_{\beta\in B}\sum_{\alpha\in A}\int_{V_\beta} f\,\pi_\alpha\,\sigma_\beta\\ &= \sum_{\beta\in B}\int_{V_\beta} f\,\sigma_\beta,\end{aligned}$$

und somit ist die Definition des Integrals $\int_{\mathscr{M}} f$ unabhängig von der Wahl des Atlas und der Partition der Eins.

5.3 Integralsätze

Wir sagen, daß eine offene Teilmenge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ einen C^k**-Rand** besitzt, wenn $\partial\Omega$ eine $(N-1)$-dimensionale C^k-Mannigfaltigkeit ist. Wenn Ω einen C^k-Rand besitzt, dann gibt es nach Theorem 5.1 zu jedem Punkt $a \in \partial\Omega$ eine offene Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^N$, eine offene Menge $W \subseteq \mathbb{R}^N$ und einen C^k-Diffeomorphismus $\Phi : V \to W$, so daß $\Phi(V\cap\partial\Omega) = \{y \in W \,:\, y_N = 0\} =: W_0$. Wir wollen der Einfachheit halber annehmen, daß $\Phi(V\cap\Omega) = \{y \in W \,:\, y_N < 0\} =: W_-$ und $\Phi(V\cap\bar{\Omega}^c) = \{y \in W \,:\, y_N > 0\} =: W_+$. In jedem Punkt $a \in \partial\Omega$ ist der Tangentialraum $(N-1)$-dimensional, und somit ist der Normalenraum eindimensional. Im Normalenraum gibt es einen eindeutig bestimmten Vektor $\nu(a)$ der euklidischen Länge 1, so daß für alle $t > 0$ klein genug $a + t\nu \notin \Omega$. Dieser eindeutig bestimmte Vektor heißt **äußere Normale**.

Lemma 5.9 (Bestimmung der äußeren Normalen). *Seien V, $W \subseteq \mathbb{R}^N$ offen, und sei $\Phi : V \to W$ ein Diffeomorphismus, so daß $\Phi(V\cap\partial\Omega) = W_0$, $\Phi(V\cap\Omega) = W_-$ und $\Phi(V\cap\bar{\Omega}^c) = W_+$. Dann ist, für alle $a \in V\cap\partial\Omega$,*

$$\begin{aligned}\nu(a) &= (\nabla\Phi_N)(a)/\|(\nabla\Phi_N)(a)\| = (\partial_N\Phi^{-1})(\Phi(a))/\|(\partial_N\Phi^{-1})(\Phi(a))\|\\ &= (\nabla\Phi_N)(a)\,\|(\partial_N\Phi^{-1})(\Phi(a))\| = (\partial_N\Phi^{-1})(\Phi(a))\,\|(\nabla\Phi_N)(a)\|.\end{aligned}$$

Beweis. Für alle $y \in W_0$ ist

$$J_\Phi(\Phi^{-1}(y))J_{\Phi^{-1}}(y) = I,$$

d. h., für alle $1 \le i,\, j \le N$,

$$\langle(\nabla\Phi_\alpha)(\Phi^{-1}(y)), \partial_j\Phi^{-1}(y)\rangle = \delta_{i,j},$$

wobei $\delta_{i,j}$ das Kroneckersymbol ist. Da die Vektoren $\partial_j \Phi^{-1}(y)$ für $1 \leq j \leq N_1$ und $y \in W_0$ den Tangentialraum im Punkt $a = \Phi^{-1}(y)$ aufspannen, heißt das, daß der Vektor $(\nabla \Phi_N)(\Phi^{-1}(y))$ ein Normalenvektor sein muß, da er senkrecht auf diesen Tangentialvektoren steht. Wegen $\Phi(V \cap \Omega) = W_{.}$ und $\Phi(V \cap \bar{\Omega}^c) = W_+$ ist $\Phi_N(x) < 0$ für $x \in \Omega$ und $\Phi_N(x) > 0$ für $x \in \bar{\Omega}^c$. Somit gilt $a + t\,(\nabla \Phi_N)(a) \notin \Omega$ für alle $t > 0$ klein genug. Damit ist $(\nabla \Phi_N)(a)$ ein positives Vielfaches der äußeren Normalen, d. h.

$$\nu(a) = (\nabla \Phi_N)(a)/\|(\nabla \Phi_N)(a)\|.$$

Für die weiteren Gleichheiten betrachten wir für $y \in W_0$ die symmetrische, positiv definite Matrix $J_{\Phi^{-1}}(y)^T J_{\Phi^{-1}}(y)$. Der Raum $\mathbb{R}^N$ besitzt eine orthogonale Basis aus Eigenvektoren dieser Matrix. Weil der Raum $\{y \in \mathbb{R}^N : y_N = 0\}$ invariant unter dieser Matrix ist, ist der zu diesem Raum orthogonale Einheitsvektor e_N ein Eigenvektor, d. h. $J_{\Phi^{-1}}(y)^T J_{\Phi^{-1}}(y) e_N = c\, e_N$ für ein $c > 0$. Also ist

$$J_{\Phi^{-1}}(y)^T (\partial_N \Phi^{-1})(y) = c\, e_N,$$

bzw.

$$\langle (\partial_j \Phi^{-1})(y), (\partial_N \Phi^{-1})(y) \rangle = c\, \delta_{j,N} \text{ für alle } 1 \leq j \leq N.$$

Da wieder die Vektoren $\partial_j \Phi^{-1}(y)$ für $1 \leq j \leq N_1$ und $y \in W_0$ den Tangentialraum im Punkt $a = \Phi^{-1}(y)$ aufspannen, heißt das, daß der Vektor $(\partial_N \Phi^{-1})(y)$ ein Normalenvektor sein muß, da er senkrecht auf diesen Tangentialvektoren steht. Damit sind $(\partial_N \Phi^{-1})(y)$ und $(\nabla \Phi_N)(\Phi^{-1}(y))$ kolinear. Wir haben oben aber schon gezeigt, daß $\langle (\nabla \Phi_N)(\Phi^{-1}(y)), \partial_N \Phi^{-1}(y) \rangle = 1$, und daraus folgen die restlichen Identitäten.

Wir definieren schließlich den Raum

$$C^k(\bar{\Omega}) := \{ f \in C^k(\Omega) : \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^N, |\alpha| \leq k : \partial^\alpha f \text{ besitzt stetige Fortsetzung auf } \bar{\Omega} \}.$$

Die folgenden drei Integralsätze sind äquivalent.

Theorem 5.10 (Gaußscher Integralsatz). *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ eine offene Menge mit C^1-Rand und sei $f \in C^1(\bar{\Omega})$ eine Funktion mit kompakten Träger. Dann gilt für alle $1 \leq i \leq N$*

$$\int_\Omega \partial_i f = \int_{\partial\Omega} f\, \nu_i.$$

Theorem 5.11 (Gaußsche Regel der partiellen Integration). *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ eine offene Menge mit C^1-Rand und seien $f, g \in C^1(\bar{\Omega})$ zwei Funktionen mit kompakten Träger. Dann gilt für alle $1 \leq i \leq N$*

$$\int_\Omega \partial_i f\, g = \int_{\partial\Omega} f\, g\, \nu_i - \int_\Omega f\, \partial_i g.$$

Theorem 5.12 (Gaußscher Divergenzsatz). *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ eine offene Menge mit C^1-Rand und sei $F \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ eine Funktion mit kompakten Träger. Dann*

$$\int_\Omega \operatorname{div} F = \int_{\partial\Omega} F \cdot \nu.$$

Wir beweisen zuerst die Äquivalenz der drei Aussagen. Die Gaußsche Regel der partiellen Integration folgt aus dem Gaußschen Integralsatz, indem wir die Funktion f durch das Produkt fg mit $f,\ g \in C^1(\bar{\Omega})$ ersetzen, und die Produktregel $\partial_i(fg) = \partial_i f\, g + f\, \partial_i g$ und die Linearität des Integrals benutzen. Umgekehrt folgt der Gaußsche Integralsatz aus der Gaußschen Regel der partiellen Integration, indem wir g als eine Einschränkung einer Funktion in $C^1(\mathbb{R}^N)$ wählen, die kompakten Träger hat und auf dem Träger von f gleich 1 ist. Der Gaußsche Divergenzsatz folgt aus dem Gaußschen Integralsatz angewandt auf die einzelnen Komponenten F_i (anstelle von f) und aus der Linearität des Integrals. Schließlich folgt der Gaußsche Integralsatz aus dem Divergenzsatz, wenn man $F = (0,\dots,f,\dots,0)$ setzt (f an der i-ten Komponente von F), denn dann ist $\operatorname{div} F = \partial_i f$ und $F \cdot \nu = f\,\nu_i$. Es bleibt also, einen der drei Sätze zu beweisen. Wir beweisen hier den Gaußschen Integralsatz.

Beweis (von Theorem 5.10). Wir starten mit der folgenden Beobachtung, die dem Gaußschn Integralsatz für Funktionen mit Träger in Ω zeigt. Wenn $\operatorname{supp} f \subseteq \Omega$ (anstelle von $\operatorname{supp} f \subseteq \bar{\Omega}$), dann ist zum einen $f|_{\partial\Omega} = 0$ und wir können f außerhalb von Ω durch Null zu einer Funktion $f \in C^1(\mathbb{R}^d)$ mit kompakten Träger fortsetzen. Dann ist es auch egal, ob wir $\partial_i f$ über Ω oder über einen größeren Quader $Q =]a_1,b_1[\times\cdots\times]a_n,b_n[$ integrieren. Mit Fubini und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung erhalten wir zum Beispiel für $i = N$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \partial_N f &= \int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_N}^{b_N} \partial_N f(x_1,\dots,x_N)\,dx_N\dots\,dx_1 \\
&= \int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_{N-1}}^{b_{N-1}} f(x_1,\dots,x_N)\big|_{x_N=a_N}^{x_N=b_N}\,dx_{N-1}\dots\,dx_1 \\
&= 0 \\
&= \int_{\partial\Omega} f\,\nu_N.
\end{aligned}$$

Die Gleichheit gilt auch für andere i, wenn man nur die Reihenfolge der Integration vertauscht. Damit gilt also der Gaußsche Integralsatz für Funktionen mit kompakten Träger in Ω

Kommen wir nun zum eigentlichen Beweis. Wir nehmen zuerst an, daß V, W und Φ wie in Lemma 5.9 gegeben sind, und daß $\operatorname{supp} f \subseteq V \cap \bar{\Omega}$. Sei $h \in C^1(\mathbb{R})$ eine Funktion, so daß $0 \le h \le 1$, $h = 1$ in einer Umgebung von 0, $\operatorname{supp} h \subseteq [-1,1]$, und $h' \ge 0$ in $[-1,0]$. Für $\delta > 0$ definieren wir außerdem $h_\delta : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ durch $h_\delta(y) = h(y_N/\delta)$. Dann gilt, für alle $\delta > 0$,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \partial_i f &= \int_\Omega \partial_i(f\,(h_\delta \circ \Phi + 1 - h_\delta \circ \Phi))\\ &= \int_\Omega \partial_i f(x)\, h_\delta(\Phi(x))\,dx + \int_\Omega f(x)\,\partial_i(h_\delta \circ \Phi)(x)\,dx +\\ &\quad + \int_\Omega \partial_i(f\,(1 - h_\delta \circ \Phi)).\end{aligned}$$

Aufgrund der Wahl von h bzw. h_δ ist der Träger von $f\,(1 - h_\delta \circ \Phi)$ eine Teilmenge von Ω, so daß das dritte Integral auf der rechten Seite nach der obigen Beobachtung gleich Null ist. Außerdem gilt offensichtlich

$$\lim_{\delta \to 0+} \int_\Omega \partial_i f(x)\, h_\delta(\Phi(x))\,dx = 0.$$

Es bleibt also, das zweite Integral auf der rechten Seite zu untersuchen. Aus der Kettenregel, der speziellen Form von h_δ und dem Transformationssatz folgt

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(x)\,\partial_i(h_\delta \circ \Phi)(x)\,dx &= \int_\Omega f(x)\,\sum_{j=1}^N (\partial_j h_\delta)(\Phi(x))\partial_i \Phi_j(x)\,dx\\ &= \int_{V\cap\Omega} f(x)\,(\partial_N h_\delta)(\Phi(x))\partial_i \Phi_N(x)\,dx\\ &= \int_{W_-} f(\Phi^{-1}(y))\,\partial_N h_\delta(y)\,(\partial_i \Phi_N)(\Phi^{-1}(y))\,|\det J_{\Phi^{-1}}(y)|\,dy\\ &= \int_{W_-} f(\Phi^{-1}(y))\,\frac{1}{\delta} h'(y_N/\delta)(\partial_i \Phi_N)(\Phi^{-1}(y))\sqrt{\det J_{\Phi^{-1}}(y)^T J_{\Phi^{-1}}(y)}\,dy\\ &\overset{\delta \to 0+}{\to} \int_{W_0} f(\Phi^{-1}(y))(\partial_i \Phi_N)(\Phi^{-1}(y))\sqrt{\det J_{\Phi^{-1}}(y)^T J_{\Phi^{-1}}(y)}\,dy\\ &= \int_{W_0} f(\varphi^{-1}(y))\nu_i(\varphi^{-1}(y))\sqrt{\det J_{\varphi^{-1}}(y)^T J_{\varphi^{-1}}(y)}\,dy\\ &= \int_{\partial\Omega} f\,\nu_i.\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir also den Gaußschen Integralsatz für spezielle Funktionen $f \in C^1(\bar{\Omega})$. Für einen Beweis des Gaußschen Integralsatzes für beliebige Funktionen $f \in C^1(\bar{\Omega})$ mit kompakten Träger wählt man nun eine endliche Familie $((\Phi_\alpha, V_\alpha))_{1\le i\le n}$, wobei (V_α) eine offene Überdeckung von $\operatorname{supp} f \cap \partial\Omega$ ist, und die Φ_α Diffeomorphismen von V_α auf $W_\alpha = \Phi_\alpha(V_\alpha)$ sind. Man ergänzt die Familie $(V_\alpha)_{1\le i\le n}$ um die offene Menge $V_0 = \Omega$ und wählt dann eine der Familie $(V_\alpha)_{0\le i\le n}$ untergeordnete Partition der Eins $(\pi_\alpha)_{0\le i\le n}$. Dann ist

$$\begin{aligned}\int_\Omega \partial_i f &= \int_\Omega \partial_i (f \sum_{\alpha=0}^n \pi_\alpha) \\ &= \sum_{\alpha=0}^n \int_\Omega \partial_i (f \pi_\alpha) \\ &= \sum_{\alpha=1}^n \int_\Omega \partial_i (f \pi_\alpha) \\ &= \sum_{\alpha=1}^n \int_{\partial\Omega} f \pi_\alpha \nu_i \\ &= \int_{\partial\Omega} f \nu_i .\end{aligned}$$

Korollar 5.13 (Greensche Formel).

Theorem 5.14 (Satz von Stokes).

References

[Arnaudiès (2000)] Arnaudiès, J.-M. : *Equations différentielles de fonctions de variable réelle ou complexe*. Ellipses, Paris, 2000.

[Avez (1983)] Avez, A. : *Calcul différentiel*. Collection Maitrise de mathématiques pures. Masson, Paris, New York, Barcelone, 1983.

[Ayres Jr. (1986)] Ayres Jr., F. : *Théorie et applications des équations différentielles*. McGraw Hill, Paris, 1986.

[Azé et al. (2002)] Azé, D., Constans, G., Hiriart-Urruty, J.-B. : *Calcul différentiel et équations différentielles*. Dunod, Paris, 2002.

[Cartan (1967)] Cartan, H. : *Cours de calcul différentiel*. Hermann, Paris, 1967.

[Heuser (1989)] Heuser, H. : *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. B. G. Teubner, Stuttgart, 1989.

[Rouche and Mawhin (1973a)] Rouche, N., Mawhin, J. : *Equations différentielles ordinaires. Tome I: Théorie générale*. Masson et Cie., Editeurs, Paris, 1973a.

[Rouche and Mawhin (1973b)] Rouche, N., Mawhin, J. : *Equations différentielles ordinaires. Tome II: Stabilité et solutions périodiques*. Masson et Cie., Editeurs, Paris, 1973b.